

Eletromagnetismo II

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 1º Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Gabarito - Primeira Prova Diurno

[1] Numa região do espaço com constante dielétrica ϵ e permeabilidade magnética μ , mas sem cargas e correntes, o campo elétrico é dado por

$$\vec{E}(z, t) = E e^{-\beta z} f(\xi) \hat{e}_x$$

onde $f(\xi)$ é uma função qualquer da variável $\xi = \beta(z - ct)$, e β e c são constantes.

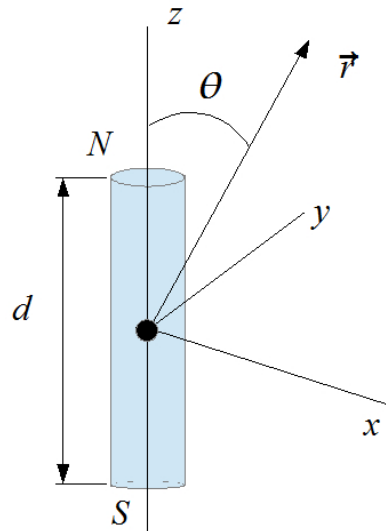
(0,5) **a)** Utilizando a Lei de Faraday, encontre uma expressão para derivada temporal $\partial \vec{B} / \partial t$ do campo magnético associado a este campo elétrico.

(1,0) **b)** Obtenha agora a seguinte equação diferencial para a função $f(\xi)$

$$(1 - \mu\epsilon c^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2 \frac{df}{d\xi} + f = 0.$$

(1,0) **c)** Obtenha a solução desta equação supondo $c^2 \neq 1/\mu\epsilon$. Caso sejam obtidas duas soluções, considere a fisicamente correta tomando o limite $c \rightarrow 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. A solução obtida corresponde a ondas senoidais amortecidas?

[2] Uma carga pontual Q é colocada no centro de um ímã permanente cilíndrico, de momento magnético m , como mostra a figura. As grandezas Q e m são independentes. Para posições bastante distantes do ímã ($r \gg d$), o seu campo magnético é dado, em coordenadas esféricas, pela expressão



$$\vec{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left[\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{e}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{e}_\theta \right]$$

- (1,0) **a)** Calcule a expressão para o vetor de Poynting $\vec{S}$ para esta configuração, na condição $r \gg d$.
- (0,5) **b)** Calcule a expressão para a densidade volumétrica de energia ε nos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, na mesma condição.
- (0,5) **c)** Verifique explicitamente se o teorema da conservação de energia.

$$\vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

é satisfeito.

- (0,5) **d)** Mesmo que este teorema seja satisfeito, como $|\vec{S}| \neq 0$, parece haver fluxo de energia em um problema em que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são constantes! Considere uma esfera de raio $R \gg d$ centrada na carga e verifique se esta afirmação está correta.

[3] Em aula vimos que em um meio dispersivo a constante dielétrica é complexa e depende da frequência de acordo com as expressões

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r;$$

$$\epsilon_r = \text{Re}[\epsilon_r] + i\text{Im}[\epsilon_r]$$

$$\text{Re}[\epsilon_r] = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$\text{Im}[\epsilon_r] = \frac{\gamma\omega\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

onde ω_0 é a frequência de ressonância, ω_p pe a frequência de plasmas e γ a constante de amortecimento do meio.

Uma onda plana se propagando no meio tem constante de onda complexa, ou seja,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k} = k \hat{k}; \quad k = \alpha + i\beta$$

(1,0) **a)** Obtenha as expressões para α e β

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0 \text{Re}[\epsilon_r]}{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\text{Im}[\epsilon_r]}{\text{Re}[\epsilon_r]} \right)^2} \right]^{1/2}$$

e

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0 \text{Re}[\epsilon_r]}{2}} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\text{Im}[\epsilon_r]}{\text{Re}[\epsilon_r]} \right)^2} \right]^{1/2}$$

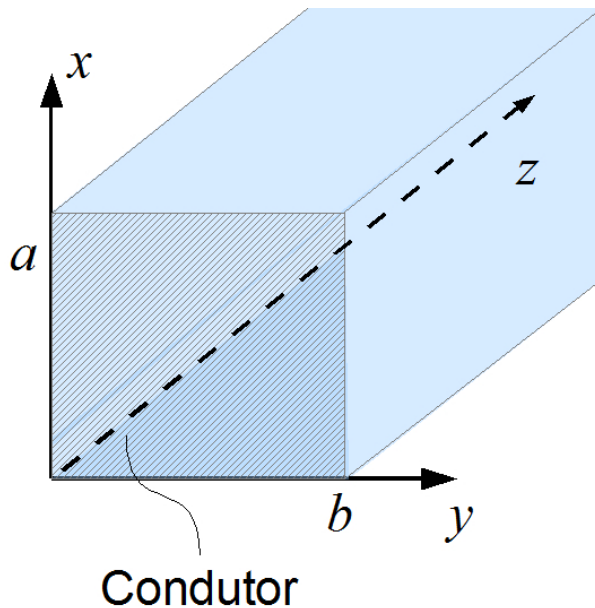
(1,0) **b)** Considere que a frequência ω esteja muito próxima da ressonância ω_0 , isto é, $\omega = \omega_0 - \delta\omega$, com $\delta\omega/\omega_0 \ll 1$ e $\delta\omega/\gamma \ll 1$, na condição que $\text{Im}[\epsilon_r] \approx \omega_p^2/\gamma\omega_0 \ll 1$. Mantendo aproximação até primeira

ordem em $\delta\omega$, mostre que neste caso

$$\alpha \approx \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0} (\omega_0 - \omega) \right]$$

(0,5) **c)** Obtenha a expressão para velocidade de grupo v_g .

[4] Considere um semiguia de onda, com uma tampa condutora no plano $z = 0$, como mostra a figura. Esta placa provocará reflexões, de forma que podemos considerar que dentro do guia haverá ondas se propagando em ambos os sentidos, ou seja, $(+z)$ e $(-z)$. Assim, se considerarmos os modos TE, por exemplo, a componente z do campo magnético será dada por



$$H_z(x, y, z, t) = \left[H_0 e^{i(kz - \omega t)} + H'_0 e^{-i(kz + \omega t)} \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

(0,5) **a)** Determine a relação entre H'_0 e H_0 para que a condição de contorno em $z = 0$ seja satisfeita.

(1,0) **b)** Usando as expressões que relacionam as outras componentes de $\vec{H}$ com H_z ,

$$H_x = \frac{ik}{\omega^2/c^2 - k^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad H_y = \frac{ik}{\omega^2/c^2 - k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

e lembrando que elas foram derivadas para propagação somente no

sentido positivo de z , mostre que

$$H_x(x, y, z, t) = -\frac{2m\pi}{a} H_0 \frac{k}{\omega^2/c^2 - k^2} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \text{sen}(kz) e^{-i\omega t}$$

$$H_y(x, y, z, t) = -\frac{2n\pi}{b} H_0 \frac{k}{\omega^2/c^2 - k^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \text{sen}(kz) e^{-i\omega t}$$

- c)** Determine a expressão para a densidade superficial de corrente $\vec{k}$ na placa $z = 0$.

GABARITO

Questão 1

a)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(-\hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \vec{E} = -E \left[e^{-\beta z} \beta \frac{df}{d\xi} - \beta e^{-\beta z} f \right] \hat{e}_y$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E \beta e^{-\beta z} \left(\frac{df}{d\xi} - f \right) \hat{e}_y$$

b)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \therefore \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore -\cancel{E}\beta \left[-\cancel{\beta}e^{-\cancel{\beta}z} \left(\frac{df}{d\xi} - f \right) + \cancel{\beta}e^{-\cancel{\beta}z} \left(\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{df}{d\xi} \right) \right] (-\hat{e}_x) = \\ = \mu\epsilon \cancel{E}\beta^2 e^{-\cancel{\beta}z} c^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} \hat{e}_x \end{aligned}$$

$$\therefore (1 - c^2 \mu\epsilon) \frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2 \frac{df}{d\xi} + f = 0$$

c)

$$(1 - c^2 \mu \epsilon) \frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2 \frac{df}{d\xi} + f = 0$$

$$\therefore f(\xi) = A e^{k\xi} \quad \Rightarrow \quad k^2 (1 - c^2 \mu \epsilon) - 2k + 1 = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2(1 - c^2 \mu \epsilon)} \left[2 \pm \sqrt{4 - 4(1 - c^2 \mu \epsilon)} \right]$$

$$\therefore k = \frac{1 \pm c\sqrt{\mu\epsilon}}{1 - c^2 \mu \epsilon} = \frac{1 \pm c\sqrt{\mu\epsilon}}{(1 - c\sqrt{\mu\epsilon})(1 + c\sqrt{\mu\epsilon})}$$

solução positiva $k = \frac{1}{1 - c\sqrt{\mu\epsilon}} \rightarrow \text{diverge se } c \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

solução negativa $k = \frac{1}{1 + c\sqrt{\mu\epsilon}} \rightarrow \text{solução aceitável.}$

Questão 2

a)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \times \left[\frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{e}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{e}_\theta \right]$$

$$\therefore \vec{S} = \frac{mQ}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^5} \hat{e}_\phi$$

b)

$$\varepsilon = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4} + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 m}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{r^3} (1 + 3 \cos^2 \theta)$$

c)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0; \quad \vec{E} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{S} = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0$$

d)

$$\int \vec{S} \cdot \hat{n} dA = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \underbrace{|S|}_{\neq 0} \underbrace{\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_r}_{=0} = 0$$

Portanto, embora $|\vec{S}| \neq 0$, não há fluxo de energia para a configuração. Recomendamos aos alunos interessados em compreender melhor o significado do Vetor de Poynting para campos estáticos ler

R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. L. Sands,
The Feynman Lectures on Physics Vol. II, pp. 17-6 e 22-11.

Questão 3

a)

$$k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega^2$$

$$k = \alpha + i\beta \quad \alpha^2 - \beta^2 = \mu_0 \epsilon_0 \operatorname{Re}[\epsilon_r] \omega^2$$

$$2\alpha\beta = \mu_0 \epsilon_0 \operatorname{Im}[\epsilon_r] \omega^2 \quad \therefore \beta = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \frac{\operatorname{Im}[\epsilon_r]}{2\alpha}$$

$$\alpha^2 - (\mu_0 \epsilon_0 \omega^2)^2 \frac{(Im[\epsilon_r])^2}{4\alpha^2} - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 Re[\epsilon_r]$$

$$\alpha^4 - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 Re[\epsilon_r] \alpha^2 - (\mu_0 \epsilon_0 \omega^2)^2 \frac{(Im[\epsilon_r])^2}{4} = 0$$

$$\therefore \alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0 Re[\epsilon_r]}{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{Im[\epsilon_r]}{Re[\epsilon_r]} \right)^2} \right]^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \frac{Im[\epsilon_r]}{2\omega \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0 Re[\epsilon_r]}{2}} \left[-1 + \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right) \right]^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega^2}{2\omega \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0 Re[\epsilon_r]}{2}}} \frac{Im[\epsilon_r] \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{Im[\epsilon_r]}{Re[\epsilon_r]} \right)^2} \right]^{1/2}}{\left[-1 + \left(1 + \left(\frac{Im[\epsilon_r]}{Re[\epsilon_r]} \right)^2 \right) \right]^{1/2}} \\ \therefore \beta &= \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0 Re[\epsilon_r]}{2}} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{Im[\epsilon_r]}{Re[\epsilon_r]} \right)^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

b)

$$\omega = \omega_0 - \delta\omega; \quad \frac{\delta\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 - \omega^2 \approx (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0 \delta\omega$$

$$Re[\epsilon_r] \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{\delta\omega}{\delta\omega^2 + \gamma^2/4} \quad \therefore Re[\epsilon_r] \approx 1 + 2 \frac{\omega_p^2}{\omega_0\gamma} \frac{\delta\omega}{\gamma}$$

$$\frac{Im[\epsilon_r]}{Re[\epsilon_r]} \approx \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0}$$

$$\alpha \approx \omega \sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_0}{2}} \left[1 + 2 \frac{\omega_p^2}{\omega_0\gamma} \frac{\delta\omega}{\gamma} \right]^{1/2} \left[1 + \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\gamma^2\omega_0^2}} \right]^{1/2}$$

$$\alpha \approx \omega \sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_0}{2}} \sqrt{2} \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\gamma^2\omega_0} (\omega_0 - \omega) \right]$$

c)

$$v_g = \frac{\partial v_g}{\partial \alpha} \quad \therefore 1 \approx \frac{1}{c} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0} (\omega_0 - \omega) \right] - \frac{\omega}{c} \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}$$

$$\therefore 1 \approx \frac{1}{c} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0} (\omega_0 - 2\omega) \right]$$

$$v_g \approx \frac{c}{1 + \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0} (\omega_0 - 2\omega)}$$

Questão 4

a)

$$B_n = 0 \text{ no condutor} \quad \Rightarrow \quad H_z = 0 \quad \therefore \boxed{H'_0 = H_0}$$

b)

$$H_z(x, y, z, t) = -H_0 \left[e^{i(kz-\omega t)} - e^{-i(kz+\omega t)} \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial H_z}{\partial x} = -H_0 \left[e^{i(kz-\omega t)} - e^{-i(kz+\omega t)} \right] \left(\frac{m\pi}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -H_0 \left[e^{i(kz-\omega t)} - e^{-i(kz+\omega t)} \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{n\pi}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Para o usar as expressões para H_x e H_y , temos que levar em conta o sinal de k , positivo para a propagação no sentido $+z$ e negativo para o sentido contrário. Então:

$$H_x = \frac{i(-H_0)}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \left[k e^{i(kz-\omega t)} + k e^{-i(kz+\omega t)} \right] \left(\frac{m\pi}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{b}\right)$$

$$H_x = -2i \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \frac{k}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \cos(kz) e^{-i\omega t}$$

do mesmo modo

$$H_y = -2i \frac{n\pi}{b} H_0 \frac{k}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(kz) e^{-i\omega t}$$

c)

$$\vec{H} = \vec{K}_s \times \hat{n} = \vec{K} \times \hat{e}_z \quad H_x \hat{e}_x + H_y \hat{e}_y = K_y \hat{e}_x - K_x \hat{e}_y$$

$$\boxed{K_x = -H_y; \quad K_y = H_x}$$