

# 5a Experiência : Viscosidade

4300254 - Laboratório de Mecânica - 1o Semestre/2015

## 1.Introdução

### 1.1. Viscosidade de um fluido

A *viscosidade* de um fluido<sup>1</sup> é o atrito interno que ocorre no fluido e dificulta o seu escoamento. A viscosidade do fluido pode ser definida a partir da força de resistência entre camadas adjacentes do fluido, quando uma camada se move em relação à outra.

A Figura 1 mostra uma camada A que se move com velocidade  $\vec{dv}$  em relação a uma camada B a uma distância  $dy$ . Uma força  $\vec{F}$  oposta à velocidade tende a segurar a camada A devido ao atrito interno. O *coeficiente de viscosidade*  $\eta$ , é definido pela relação:

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{dv}{dy} \quad \text{ou} \quad \eta = \frac{F/S}{\frac{dv}{dy}} \quad (1)$$

onde  $S$  é a área da camada A. A força de resistência ao movimento da camada é proporcional a  $\eta$ .

Como geralmente ocorre com várias outras propriedades dos fluidos, o coeficiente de viscosidade é bastante dependente da temperatura.

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade do coeficiente de viscosidade é  $1 \text{ kg/m s}$ . Na prática, a unidade geralmente utilizada é o *Poise* ( $1 P = 1 \text{ g/cm s}$ ). Por exemplo<sup>2</sup>, a viscosidade da água a  $20^{\circ}C$  é  $0,010 P$ , enquanto que a do ar atmosférico é  $0,00018 P$ . Para a glicerina a  $20^{\circ}C$ , a viscosidade é de aproximadamente  $15 P$ , mas é fortemente dependente da temperatura, sendo praticamente o dobro deste valor a  $10^{\circ}C$  e a metade a  $30^{\circ}C$ .

A chamada *viscosidade cinemática* é definida por

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido. Várias características do escoamento de um fluido dependem diretamente da viscosidade cinemática<sup>3</sup>.

<sup>1</sup>A palavra fluido é geralmente utilizada para designar um líquido ou um gas.

<sup>2</sup>Um outro exemplo está na Folha de dados para o óleo usado nesta experiência.

<sup>3</sup>Por exemplo, o número de Reynolds, definido a seguir, pode ser escrito em função da viscosidade cinemática.

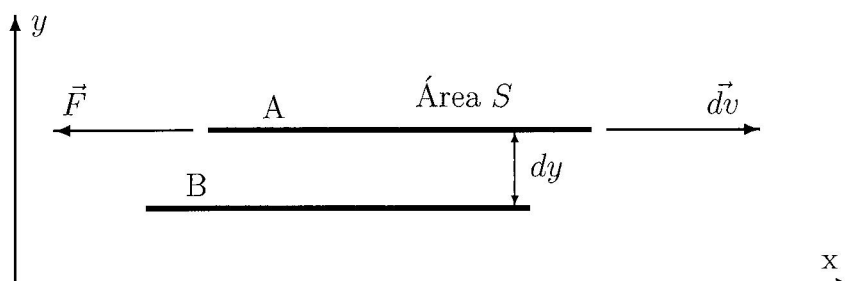


Figura 1: Camada A de um fluido se deslocando com velocidade  $\vec{dv}$  em relação a uma camada adjacente. A camada A sofre força  $\vec{F}$  oposta ao movimento devida ao atrito interno do fluido.

## 1.2. Escoamento laminar e turbulento

O escoamento do fluido pode ser descrito como um deslizamento de camadas somente quando as velocidades envolvidas são pequenas. Este tipo de escoamento descrito como um deslizamento de camadas é chamado *escoamento laminar*. Mas nem sempre o escoamento é assim. Quando as velocidades são altas, as camadas tendem a se desfazer, e os movimentos no fluido podem ser complicados, com *redemoinhos*, que também podem ser chamados *turbilhões ou vórtices*. Quando isto ocorre, o escoamento é chamado *turbulento*. Os tipos de escoamento são caracterizados por um número adimensional que é chamado *número de Reynolds*:

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v d}{\eta} \quad \text{ou} \quad \mathcal{R} = \frac{v d}{\nu} \quad (\text{N}^\circ \text{ de Reynolds}) \quad (2)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $v$  a velocidade e  $d$  a distância transversal envolvida no escoamento. Quando o número de Reynolds é muito grande ( $\mathcal{R} \gg 1$ ), o escoamento é turbulento. Para  $\mathcal{R} < 1$  ou da ordem de grandeza de 1, o escoamento é considerado *laminar*.

## 1.3. Lei de Stokes

Quando um corpo sólido se move em um fluido, a camada de fluido adjacente ao sólido adere à superfície do mesmo, de forma que existe uma força de resistência ao movimento devida ao atrito interno do fluido. No caso de uma esfera de raio  $r$  se movendo com velocidade  $v$  num *meio infinito* de viscosidade  $\eta$ , a força de atrito para *escoamento laminar* é dada por

$$F_{a\infty} = -6\pi\eta r v \quad (\text{Lei de Stokes}) \quad (3)$$

onde o sinal negativo indica que a força é oposta à velocidade. Esta expressão é conhecida como *fórmula de Stokes* ou *Lei de Stokes*.

Quando o meio não é infinito, a fórmula de Stokes não é exata. Se existir uma parede fixa próxima à esfera em movimento, a camada adjacente de fluido adere a esta parede e os deslizamentos das camadas se tornam mais difíceis. Assim, quando existem paredes fixas, próximas ao corpo em movimento, a força de atrito viscoso é maior. No caso do movimento de uma esfera de raio  $r$  se movendo no eixo de um tubo cilíndrico de raio  $R$ , a força de atrito pode ser escrita como

$$F_a = C_L F_{a\infty} \quad (4)$$

onde  $C_L$  é um fator de correção maior que 1, dado por<sup>4</sup>

$$C_L = 1 + \alpha + \alpha^2 \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{9r}{4R} \quad (\text{correção de Ladenburg}) \quad (5)$$

Um detalhe importante, relativo à Lei de Stokes, é a condição de *escoamento laminar*. Na medida em que a velocidade aumenta e o escoamento começa a se tornar turbulento, a força de resistência do fluido tende a ser proporcionalmente maior que a dada pela Lei de Stokes.

Substituindo a Equação 4 em 3, a força de atrito pode ser reescrita como

$$F_a = -6\pi\eta r v_c \quad \text{onde} \quad v_c = C_L v \quad (6)$$

Isto é, pode-se considerar a força de atrito dada pela Lei de Stokes (Equação 3), mas considerando uma **velocidade corrigida pelo fator de Ladenburg**  $v_c = C_L v$ .

---

<sup>4</sup>R. Ladenburg, em Ann. Physik **23** (1907)447.

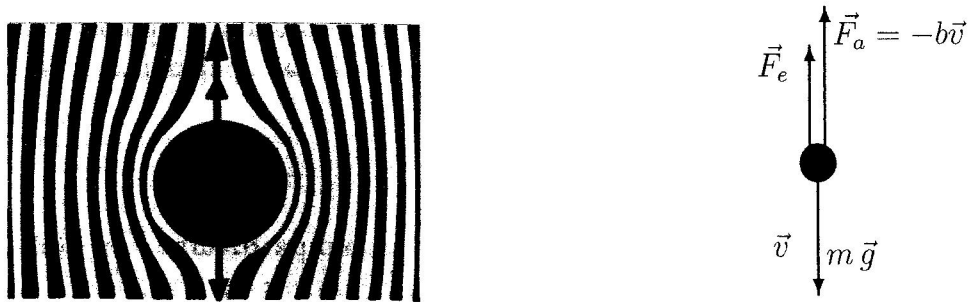


Figura 2: Representação da queda de uma esfera com velocidade  $\vec{v}$  num meio viscoso: além do peso  $m\vec{g}$  e da força de atrito  $\vec{F}_a$ , existe o empuxo  $\vec{F}_e$  devido ao fluido.

#### 1.4. Queda livre em meio viscoso

A equação de movimento de queda da esfera é obtida pela lei de Newton

$$m \frac{dv}{dt} = m^* g - b v \quad \text{onde} \quad b = 6 \pi \eta r C_L \quad (7)$$

e  $m^*$  é a massa aparente da esfera no fluido dada por

$$m^* = \frac{4 \pi}{3} (\rho_e - \rho) r^3 \quad \text{onde} \quad \rho_e \text{ é a densidade da esfera} \quad (8)$$

A solução da Equação 7, para velocidade inicial nula, é dada por<sup>5</sup>

$$v = \frac{m^* g}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m} t}) \quad (9)$$

Depois de um tempo razoavelmente grande a esfera atinge uma *velocidade limite*  $v_\ell$ :

$$v \longrightarrow v_\ell = \frac{m^* g}{b} \quad \text{para} \quad \frac{b}{m} t \gg 1 \quad \text{ou} \quad t \gg \frac{m}{b} \quad (10)$$

As equações acima podem ser resolvidas para obter<sup>6</sup>

$$v_c = \frac{2}{9} \frac{g}{\eta} (\rho_e - \rho) r^2 \quad \text{ou} \quad v_c = a r^2 \quad (11)$$

onde

$$v_c = C_L v_\ell \quad \text{e} \quad a = \frac{2}{9} \frac{g}{\eta} (\rho_e - \rho) \quad (12)$$

Para verificar a Equação 11, pode-se fazer a mudança de variáveis (linearização):

$$x = r^2 \quad \text{e} \quad y = v_c \quad (13)$$

O gráfico  $y \times x$  deve ser uma reta passando pela origem com coeficiente angular  $a$  (Equação 11). O coeficiente de viscosidade  $\eta$  pode ser obtido a partir de  $a$ .

<sup>5</sup>Ver, por exemplo, K. R. Symon, *Mecânica*, Editora Campus Ltda, Rio de Janeiro (1982).

<sup>6</sup>A dedução detalhada desta fórmula deve ser apresentada no relatório.

## 2. Experiência

A experiência consiste em deixar cair pequenas esferas de aço, de diferentes diâmetros, num tubo com óleo e medir as velocidades limites de queda. Os objetivos finais consistem em verificar a Equação 11 e obter experimentalmente a viscosidade do de óleo, comparando o resultado com um valor de referência.

Uma vez que a esfera já tenha atingido a velocidade limite, esta pode ser obtida medindo o tempo  $t$  de passagem da esfera entre 2 marcações separadas de uma distância  $h$ :

$$v_{\ell} = \frac{h}{t}$$

Para cada raio, a medição deve ser repetida algumas vezes para reduzir erros aleatórios de medição do tempo e, também, para se obter uma estimativa da incerteza

### 2.1. Procedimento experimental

- Uma vez que a viscosidade é bastante dependente da temperatura, esta deve ser medida no início e no final da experiência.
- A densidade  $\rho$  do óleo deve ser medida com um densímetro.
- Medir o diâmetro interno  $D$  do tubo de óleo, 3 vezes em diferentes direções.
- Ajustar o marcador superior do tubo a cerca de  $20\text{ cm}$  da superfície do óleo<sup>7</sup>. Ajustar os marcadores do tubo para uma distância  $h$  entre  $30\text{ cm}$  e  $40\text{ cm}$ , medindo cuidadosamente a distância entre as bordas superiores dos marcadores.
- Para os diâmetros das esferas podem ser considerados valores nominais que são bastante exatos (ver folha de dados). As incertezas nos diâmetros nominais das esferas não serão consideradas.

**CUIDADO:** Os diâmetros de **TODAS** esferas devem ser conferidos com um paquímetro. Isso porque pode haver esferas “erradas” nos recipientes. Em particular, o recipiente de  $1,00\text{ mm}$  pode ter esferas de  $1,15\text{ mm}$  ou  $1,50\text{ mm}$ . Também deve-se ter especial cuidado com o recipiente de esferas de  $2,50\text{ mm}$ , que podem ter esferas de  $2,76\text{ mm}$ . Esferas “erradas” devem ser descartadas no próprio tubo de óleo.

- Cronometrar o tempo  $t$  de queda das esferas para a distância  $h$  entre as bordas superiores dos marcadores. Devem ser feitas 5 medições. Podem ser feitas duas cronometragens simultâneas para cada esfera para “economizar” esferas<sup>8</sup>.

**Obs.:** As esferas devem ser soltas no centro do tubo e devem estar previamente embebidas em óleo para evitar bolhas na esfera. Uma bolha de ar presa numa esfera pequena compromete toda a teoria sobre as forças na esfera.

- Todos os grupos de alunos devem fazer as medições para esferas de  $1,00$ ,  $1,50$ ,  $2,00$  e  $2,50\text{ mm}$ . Entretanto, para esferas maiores, cada grupo deve fazer as medições para um único tipo de esfera. Assim, os resultados dos diferentes grupos (A, B, C, ...) devem ser anotados.

---

<sup>7</sup>A rigor, seria necessário verificar experimentalmente que depois de uma queda de  $20\text{ cm}$  em óleo, as esferas já atingiram a velocidade limite. Entretanto, esta verificação é muito difícil e não será feita por falta de tempo. Será apenas admitido que em  $20\text{ cm}$  as esferas já atingiram a velocidade limite, o que é perfeitamente verificado para as esferas menores (ver Exercício 3).

<sup>8</sup>As esferas são recuperadas mais tarde, mas é bastante trabalhoso separar as esferas por diâmetro.

### 3. Cálculos e análise de dados

- Determinar o valor de referência para a viscosidade cinemática  $\nu$  para a temperatura média durante a experiência, a partir dos valores fornecidos pelo fabricante do óleo (ver Folha de Dados).

- Montar uma tabela (semelhante à das medições de tempo da Folha de Dados) contendo:

$$d(mm), h(cm), \bar{t}(s), \sigma_{\bar{t}}(s), \sigma_t(s), v_\ell(cm/s), \sigma_{v_\ell}(s), \alpha, C_L, v_c(cm/s),$$

onde  $\sigma_t$  é a incerteza padrão em  $\bar{t}$  (ver Experiência 1).

- Montar tabela semelhante à anterior contendo:

$$d(mm), x \equiv r^2(cm^2), y \equiv v_c(cm/s), \sigma_y, \mathcal{R}$$

onde  $\sigma_y \equiv \sigma_{v_c}$ . Por simplicidade e também porque a incerteza em  $C_L$  é relativamente pequena, pode-se considerar  $\sigma_{v_c} \equiv \sigma_{v_\ell}$ . Para calcular o  $N_{\underline{0}}$  de Reynolds  $\mathcal{R}$  pode ser usado o valor de referência para  $\nu$ .

- Fazer um gráfico de  $y_i \times x_i$ , com barras de incerteza.

- Analisando o gráfico obtido e também os valores do  $N_{\underline{0}}$  de Reynolds  $\mathcal{R}$ , determinar quais os pontos que correspondem aproximadamente a escoamento laminar<sup>9</sup>. Os pontos correspondentes a escoamento turbulento devem ser excluídos da análise para obter o valor de  $a$ .

- Ajustar os parâmetros de uma reta tipo  $y = ax$  aos pontos correspondentes a escoamento laminar, determinando o coeficiente angular  $a$  e a respectiva incerteza.

- Determinar o valor da viscosidade  $\eta$  e a respectiva incerteza.

- Calcular o valor da viscosidade cinemática  $\nu$  e a respectiva incerteza.

- Comparar o resultado obtido para  $\nu$  com o valor de referência.

- Conclusões: Discutir a experiência e resultados obtidos.

---

<sup>9</sup>A transição de escoamento laminar para escoamento turbulento não é uma transição brusca. Por isso a escolha dos pontos deve ser feita com base no bom senso a partir do comportamento do gráfico e do  $N_{\underline{0}}$  de Reynolds  $\mathcal{R}$ .

## Folha de dados - Experiência 5 - Viscosidade

Equipe: ..... Turma: .....  
 ..... Data: .....  
 ..... Tubo No: .....

### Medições preliminares e dados iniciais

$\rho = ( \quad \pm \quad ) g/cm^3$      
  $\rho_e = ( 7,85 \pm 0,03 ) g/cm^3$      
  $g = 9,7864 m/s^2$   
 $T_{inicial} = ( \quad \pm \quad ) ^\circ C$      
  $T_{final} = ( \quad \pm \quad ) ^\circ C$      
  $T_{media} = ( \quad \pm \quad ) ^\circ C$

**Tabela 1.** Valores de referência para o óleo Lubrax MG-1.

$T^\circ C$	0	10	20	30	40	50
$\nu (St)$	20,0	8,0	4,00	2,10	1,28	0,80

**Tabela 2.** Medições do diâmetro interno do tubo de óleo.

	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$\bar{D} (mm)$
$mm \rightarrow$				

**Tabela 3.** Medições do tempo de queda  $t$  da esfera para uma altura  $h$

Todos os grupos

Diferentes grupos

$d (mm)$	1,00	1,50	2,00	2,50	A 3,17	B 3,96	C 4,76	D 5,50	E 6,35	F 7,50
$h (cm)$										
$t_1 (s)$										
$t_2 (s)$										
$t_3 (s)$										
$t_4 (s)$										
$t_5 (s)$										
$\bar{t} (s)$										
$v_\ell (cm/s)$										