

Eletromagnetismo II

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 1º Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 11

Na aula passada derivamos os potenciais de Lienard-Wiechert, que fornecem os potenciais produzidos por uma carga pontual

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]}; \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{u}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]}$$

onde \vec{u} é a velocidade da carga, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q$, onde \vec{r} é a posição em que se calcula os potenciais, e os colchetes indicam que as grandezas devem ser calculadas no instante retardado.

$$t_r = t - \frac{R}{c} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q|}{c}$$

ou seja, por exemplo,

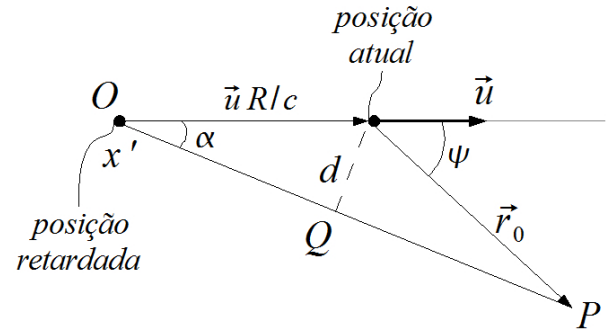
$$[\vec{u}] = \left[\frac{d\vec{r}_q}{dt} \right]_{t_r}.$$

Como a relação entre a posição “retardada” e a “presente” em geral não é conhecida, os potenciais de Lienard-Wiechert em geral só permitem o cálculo dos campos em termos das posições e velocidades retardadas. No entanto, no caso de movimento uniforme, é possível expressar os potenciais em termos da posição “atual” da carga, ou seja, a posição da carga no mesmo instante em que os campos são medidos. Isto é feito no Exemplo 10.3 do livro texto, mas vamos fazê-lo de forma mais completa calculando também os campos.

Campo eletromagnético produzido por uma carga em movimento uniforme

Consideremos uma carga se movendo com velocidade constante \vec{u} , na direção x . Vamos denotar o denominador das expressões para os potenciais retardados por s ; isto é,

$$s = R - \vec{R} \cdot \vec{\beta} = R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{c}$$



Pela geometria da figura, temos que $\vec{r}_0 \times \vec{u} = \vec{R} \times \vec{u}$ e

$$s = R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{c} = R - \frac{Ru}{c} \cos \alpha = \vec{R} - \vec{OQ} = \vec{PQ}$$

$$\therefore s^2 = \vec{PQ}^2 = r_0^2 - d^2 = r_0^2 - R^2 \beta^2 \sin^2 \alpha = r_0^2 - r_0^2 \beta^2 \sin^2 \psi$$

$$\therefore s = r_0 \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}$$

e os potenciais ficam (comparar com as equações 10.42 e 10.45 do livro texto)

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0 \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}}; \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{u}}{r_0 \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}} = \frac{\vec{u}\phi}{c^2}$$

$$\sin^2 \psi = \frac{\vec{r}_0 \times \vec{u}}{|r_0| |\vec{u}|}$$

Para calcular o campo elétrico, utilizamos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Como a carga se move com velocidade uniforme, a derivada parcial com o tempo pode ser transformada em uma derivada espacial, levando em conta que \vec{r}_0 é a posição da carga que varia como tempo. Portanto, segundo o movimento da carga, o valor de uma grandeza física na posição e instante (\vec{r}, t) tem que ser igual ao seu valor na posição e instante $(\vec{r} +$

$\vec{u}_q dt, t + dt$), ou seja

$$f(\vec{r}, t) = f(\vec{r} + \vec{u}_q dt, t + dt) = f(\vec{r}, t) + \vec{u}_q \cdot \nabla f dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \mathcal{O}(dt^2)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{u}_q \nabla f$$

Para facilitar o cálculo, vamos escrever

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{s}; \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q u_q}{s} \hat{e}_x$$

$$s = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \beta^2 r_0^2 \text{sen}^2 \psi} = \sqrt{r_0^2 - \beta^2 (y_0^2 + z_0^2)} \quad [r_0^2 \text{sen}^2 \psi = (\vec{r}_0 \times \hat{e}_x)^2 = y_0^2 + z_0^2]$$

$$\therefore E_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-\frac{1}{2} 2x_0}{s^3} + \frac{u_q^2}{c^2} \frac{\frac{1}{2} 2x_0}{c^3} \right] = \frac{q x_0}{4\pi\epsilon_0 s^3} (1 - \beta^2); \quad \beta = \frac{u_q}{c}$$

$$E_y = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-\frac{1}{2} 2y_0}{s^3} - \frac{-\beta^2 \frac{1}{2} 2y_0}{c^3} \right] = \frac{q y_0}{4\pi\epsilon_0 s^3} (1 - \beta^2);$$

$$E_z = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-\frac{1}{2} 2z_0}{s^3} - \frac{-\beta^2 \frac{1}{2} 2z_0}{c^3} \right] = \frac{q z_0}{4\pi\epsilon_0 s^3} (1 - \beta^2);$$

Juntado esses resultados, temos

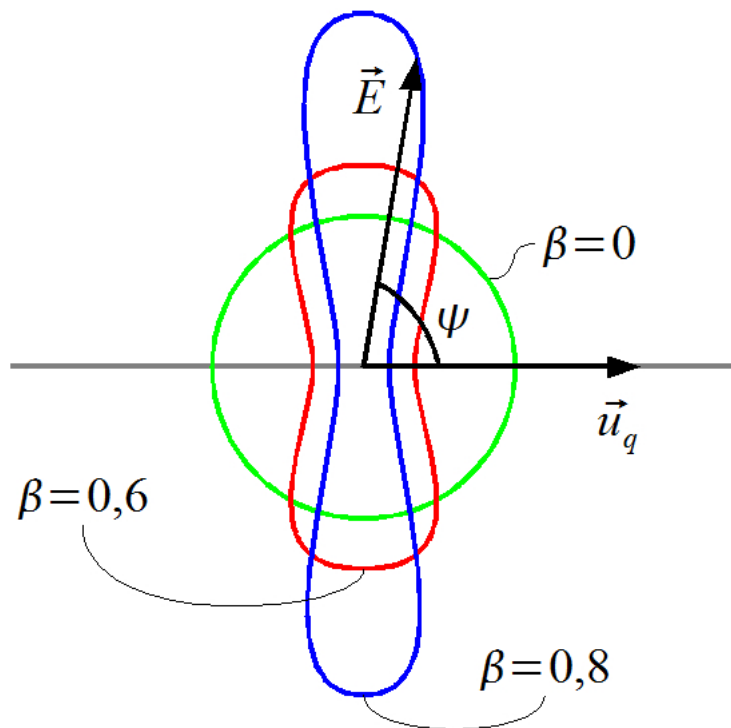
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q \vec{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \text{sen}^2 \psi]^{3/2}}}$$

O campo magnético fica

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left[\frac{\vec{u}_q}{c} \phi \right] = -\frac{\vec{u}_q}{c^2} \times \nabla \phi = -\frac{u_q}{c^2} \times \left[\vec{E} + \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{=\vec{u}_q} \right]$$

$$\therefore \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{u}_q}{c^2} \times \vec{E} = \frac{1}{c} \vec{\beta} \times \vec{E}}$$

A expressão para $\vec{E}(\vec{r}, t)$ mostra que, enquanto para cargas não relativísticas o campo é praticamente isotrópico, ele se concentra na direção perpendicular ao movimento à medida que $\beta \rightarrow 1$.



Exercício (Prob 10.14): Mostrar como as expressões que derivamos para $\phi(\vec{r}, t)$ e $\vec{A}(\vec{r}, t)$ se reduzem as equações 10.42 e 10.43 do livro texto.