Eletromagnetismo II

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 1° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 14

Potência radiada por uma carga em movimento acelerado (Griffiths 11.2)

Para calcular a potência radiada por um carga acelerada é necessário cuidado ao relacionar a potência perdida pela carga, no instante retardado, com medida por um observador no instante atual. De fato, a potência perdida pela carga acelerada é a energia por ela radiada, no intervalo de tempo retardado dt_r, durante a emissão do sinal. Esta energia é transportada pelo campo eletromagnético e, para medi-la, num ponto $\vec{r}$, é necessário integrar o vetor de Poynting numa dada área. No entanto, o vetor de Poynting dá o fluxo de energia por unidade de tempo no instante atual t, quando o sinal é detectado. Portanto, para calcular a potência radiada no instante retardado, teremos que utilizar a relação entre dt_r e dt, vista anteriormente, $(\partial t_r/\partial t)_r = R/s$.

Vamos iniciar pelo cálculo do vetor de Poynting

$$\vec{S}_{rad} = \vec{E}_a \times \vec{H}_a = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_a \times \vec{B}_a, \qquad \text{(vácuo)}$$

onde não consideramos os campo $\vec{E}_v$ e $\vec{B}_v$ porque sabemos que não correspondem ao campo de radiação. Das expressões para $\vec{E}_a$ e $\vec{B}_a$ sabemos que

$$\vec{B}_a = \frac{[\vec{R}] \times \vec{E}_a}{[R]c}$$

então,

$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c}\frac{\vec{E}_a \times \left([\vec{R}] \times \vec{E}_a\right)}{[R]} = \frac{1}{\mu_0 c}\frac{E_a^2[\vec{R}] - \left(\vec{E}_a \cdot [\vec{R}]\right)\vec{E}_a}{[R]}$$

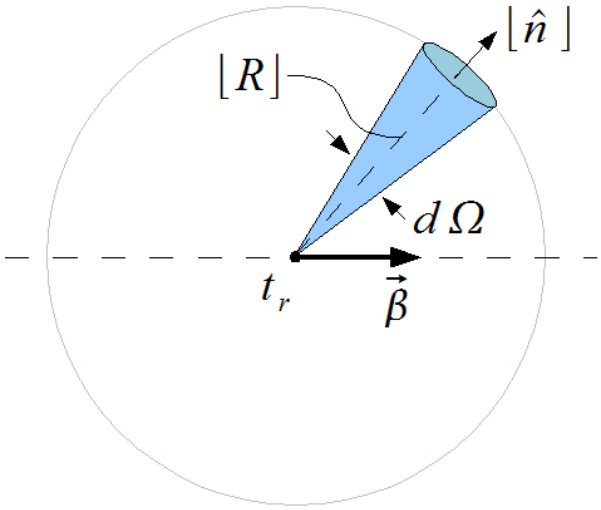
É fácil verificar que $\vec{E}_a \cdot [\vec{R}] = 0$ (verifique!); então

$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c}\frac{[\vec{R}]}{[R]}E_a^2$$

Definindo o versor $[\hat{n}]$ como $[\hat{n}] = [\vec{R}]/[R]$, ou seja, o versor segundo a direção retardada da carga ao observador, temos finalmente,

$$\boxed{\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c}[\hat{n}]E_a^2 = \epsilon_0 c[\hat{n}]E_a^2}$$

Esta expressão para $\vec{S}_{rad}(\vec{r},t)$ corresponde então ao fluxo de potencia efetivamente medido no instante t no ponto $\vec{r}$. Se considerarmos um ângulo sólido $d\Omega$, a energia que atravessar a área elementar $[R]^2\,d\Omega$ no intervalo de tempo dt, no ponto de observação, corresponderá à energia $-dW\,d\Omega$ perdida pela carga, por radiação, dentro do mesmo ângulo sólido (veja figura)



$$-dW\,d\Omega = \left(\vec{S}_{rad}[\hat{n}]\right)[R]^2\,d\Omega\,dt$$

A potência radiada pela carga no instante t_r, por unidade de ângulo sólido, é então

$$\frac{dP}{d\Omega} = -\frac{dW}{dt_r} = \left(\vec{S}_{rad}\cdot[\hat{n}]\right)[R]^2\frac{dt}{dt_r}$$

Mas, como vimos anteriormente

$$\frac{dt}{dt_r} = \frac{[s]}{[R]}$$

Então

$$\frac{dP(t_r)}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c}[s][R]E_a^2 = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2[R]\frac{\left[\vec{R}\times\left\{\left(\vec{R}-\vec{\beta}R\right)\times\vec{a}\right\}\right]^2}{[s]^5}$$

Notando que

$$[s] = [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] = [R][1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}]$$

podemos finalmente escrever

$$\boxed{\frac{dP(t_r)}{d\Omega} = \frac{1}{c^3}\left(\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\right)\frac{\left[\hat{n} \times \left\{\left(\hat{n} - \vec{\beta}\right) \times \vec{a}\right\}\right]^2}{[1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}]^5}}$$

É bom realçar, mais uma vez, que tudo dentro do colchetes [ ] é calculado no instante retardado, t_r. Isto significa que, se conhecermos a velocidade e a aceleração instantâneas de um carga, podemos calcular a potência por ela radiada instantaneamente.

Radiação no limite de baixas velocidades

Se $\beta = u/c \ll 1$, temos

$$s = R\left[1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}\right] \approx R$$

De modo que

$$\frac{dP(t_r)}{d\Omega} \approx \frac{1}{c^3}\left(\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\right)[\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{a})]^2$$

Vamos denotar por θ o ângulo entre $\hat{n}$ e $\vec{a}$, na posição retardada da partícula carregada; então

$$\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{a}) = a\, sen\theta\, \hat{n} \times \hat{n}_\perp$$

onde $\hat{n}_\perp$ é um versor perpendicular ao plano formado por $\hat{n}$ e $\vec{a}$. Então

$$[\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{a})]^2 = [a^2]\, sen^2\theta(\hat{n} \times \hat{n}_\perp \cdot \hat{n} \times \hat{n}_\perp) = [a^2]\, sen^2\theta$$

Portanto, a potência radiada por unidade de ângulo sólido fica

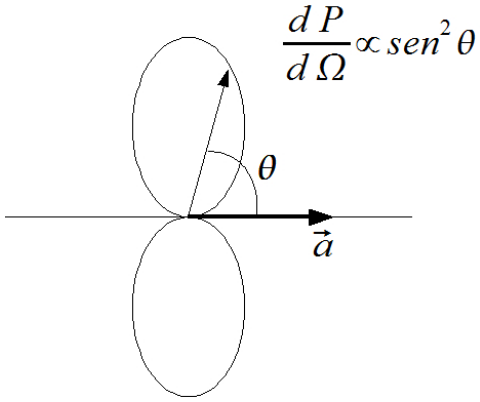
$$\boxed{\frac{dP(t_r)}{d\Omega} = \frac{1}{c^3}\left(\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\right)a^2\, sen^2\theta}$$

onde a é a aceleração da carga no instante retardado, ou seja, no instante em que perdeu a

energia por radiação. Apenas para facilitar a notação, usualmente não se escreve $[a]^2$.

Nota: Para transformar esta expressão para o sistema CGS basta fazer $1/4\pi\epsilon_0 \to 1$.

A potência radiada tem portanto uma distribuição anisotrópica, igual a que obtivemos para a distribuição de potência radiada de um dipolo; a potência é nula na direção da aceleração e máxima na direção perpendicular. Para calcular a potência total radiada pela carga basta integrar em todo o ângulo sólido, como fizemos para a antena dipolo curto. O resultado é



$$\boxed{P(t_r) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{q^2a^2}{c^3}}$$

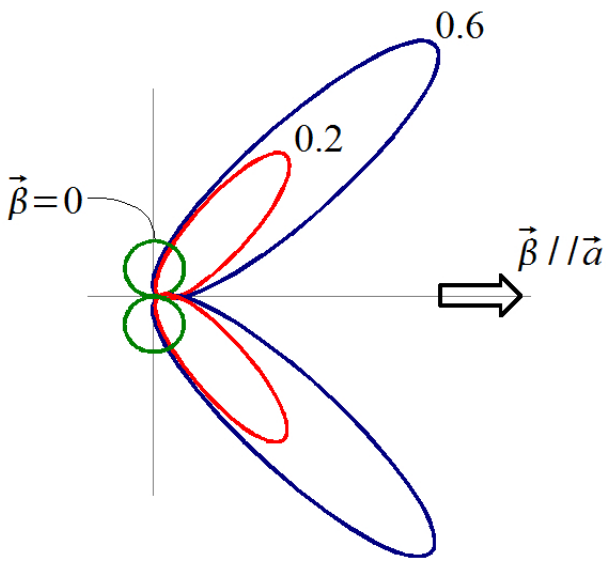
Esta expressão foi derivada pelo físico teórico inglês Sir J.J. Larmor em 1897 e, por isso, é denominada Fórmula de Larmor.

Radiação no limite de altas velocidades com $\vec{\beta} /\!/ \vec{a}$

Consideremos agora o caso em que a aceleração é paralela à velocidade, ou seja, a carga é acelerada sem alterar a direção da velocidade. Este caso tem aplicação prática nos aceleradores lineares de partículas e na radiação de frenamento (bremsstrahlung). Se $\vec{\beta} /\!/ \vec{a}$, obtemos da expressão para $dP(t_r)/d\Omega$ que

$$\frac{dP(t_r)}{d\Omega} = \frac{1}{c^3}\left(\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\right)\frac{[\hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{a})]^2}{[1-\hat{n}\cdot\vec{\beta}]^3} \qquad \text{(Prob. 11.15)}$$

O fator no numerador fornece o mesmo resultado que o já obtido para baixas velocidades, $\hat{n}\times(\hat{n}\times\vec{a}) = a^2\,sen^2\theta$. Já o fator no denominador altera significativamente o diagrama de radiação, inclinando a direção de máxima radiação no sentido de deslocamento da carga, conforme indica a figura.



A direção em que a intensidade de radiação é máxima pode ser determinada derivando a expressão acima com a relação θ,

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)=\frac{1}{c^3}\left(\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\right)a^2\left[\frac{2\,sen\theta\,cos\theta}{[1-\beta\,cos\theta]^5}-\frac{5\,sen^2\theta\,sen\theta}{[1-\beta\,cos\theta]^6}\right]$$

Igualando a zero, obtemos

$$cos\theta_{max}=\frac{1}{3\beta}\left[-1\pm\sqrt{1+15\beta^2}\right]$$

O sinal apropriado deve ser escolhido de forma que no limite $\beta\to 0$ tenhamos máxima intensidade para $\theta=\pi/2$, conforme o resultado para baixas velocidades. Portanto o sinal correto é o positivo. Portanto

$$cos\theta_{max}=\frac{-1+\sqrt{1+15\beta^2}}{3\beta}\qquad\Rightarrow\qquad\theta_{max}\approx\sqrt{\frac{1-\beta}{2}},\qquad\text{quando }\beta\to 1$$

Portanto, para partículas relativísticas a emissão de radiação tende a ser dirigida para a dianteira do movimento. Este pico para frente é bastante pronunciado no caso de bremsstrahlung, mesmo para baixas energias, no caso de elétrons (algumas centenas de keV).