Eletromagnetismo II

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 1° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 13

Campo Eletromagnético produzido por cargas puntiformes

Na aula passada discutimos como transformar as derivadas espaciais $\nabla_{\vec{r}}|_t$ e temporal $\partial/\partial t|_{\vec{r}}$ em termos das derivadas no instante retardado, de forma que as expressões para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ pudessem ser obtidas diretamente dos potenciais de Lienard-Wiechert, sem a necessidade de inverter a relação implícita para o tempo retardado, $t_r = t - R/c$; $R = |\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|$.

Assim obtivemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \frac{R}{s}\left(\frac{\partial}{\partial t_r}\right)_{\vec{r}}$$

e

$$\nabla_{\vec{r}}|_t = \left(\nabla_{\vec{r}} - \frac{R}{c^2}\frac{\partial}{\partial t_r}\right)_t$$

onde definimos

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q; \qquad s = R - \vec{R}\cdot\vec{\beta} = R - \frac{\vec{u}\cdot\vec{R}}{c}; \qquad [\vec{u}] = \frac{d\vec{r}_q}{dt_r}$$

Com estes operadores, podemos obter as expressões para os campos usando diretamente as equações

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= -\nabla\phi(\vec{r},t) - \frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}\\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \nabla\times\vec{A}(\vec{r},t)\end{aligned}$$

onde

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{[s]};\qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{[\vec{u}]}{[s]}$$

$$\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{1}{[s]}-\frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{[\vec{u}]}{[s]}\qquad\left[\nabla=\nabla_{\vec{r}}|_t;\quad \frac{\partial}{\partial t}=\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{r}}\right]$$

$$\therefore\qquad \frac{4\pi\epsilon_0}{q}\vec{E}=-\nabla\frac{1}{[s]}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{[\vec{u}]}{[s]};\qquad c^2=\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}$$

(De agora em diante vamos suprimir o símbolo [ ] para simplificar a notação)

$$\therefore\qquad \nabla\frac{1}{s}=-\frac{1}{s^2}\left[\nabla s-\frac{\vec{R}}{cs}\frac{\partial s}{\partial t_r}\right];\qquad s=R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{c}$$

$$\therefore\qquad \nabla s=\nabla R-\frac{1}{c}\nabla\left[u_x(x-x_q)+u_y(y-y_q)+u_z(z-z_q)\right]=\nabla R-\frac{1}{c}\left[u_x\hat{e}_x+u_y\hat{e}_y+u_z\hat{e}_z\right]$$

$$\therefore\qquad \nabla s=\frac{\vec{R}}{R}-\frac{\vec{u}}{c}$$

Por outro lado

$$\frac{\partial s}{\partial t_r}=\frac{\partial R}{\partial t_r}-\frac{1}{c}\frac{d\vec{u}}{dt_r}\cdot\vec{R}-\frac{1}{c}\vec{u}\cdot\frac{d\vec{R}}{dt_r}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t_r}=\frac{\partial}{\partial t_r}\left[(x-x_q)^2+(y-y_q)^2+(z-z_q)^2\right]^{1/2}=-\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{R}$$

$$\therefore\qquad \boxed{\frac{\partial s}{\partial t_r}=-\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{R}-\frac{1}{c}\vec{a}\cdot\vec{R}+\frac{v^2}{c}}$$

$$\therefore\qquad \boxed{\nabla\frac{1}{s}=-\frac{1}{s^2}\left(\frac{\vec{R}}{R}-\frac{\vec{u}}{c}\right)-\left[\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{R}+\frac{\vec{a}\cdot\vec{R}}{c}-\frac{v^2}{c}\right]\frac{\vec{R}}{cs^3}}$$

Por outro lado,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{r}} \frac{\vec{u}}{s} = \frac{R}{s} \left.\frac{\partial}{\partial t_r}\right|_{\vec{r}} \frac{\vec{u}}{s} = \frac{R}{s^2}\frac{d\vec{u}}{dt_r} - \frac{R\vec{u}}{s^3}\frac{\partial s}{\partial t_r} = \frac{R\vec{a}}{s^2} - \frac{R\vec{u}}{s^3}\frac{\partial s}{\partial t_r}$$

$$\therefore \qquad \boxed{\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{r}} \frac{\vec{u}}{s} = \frac{R\vec{a}}{s^2} + \frac{R\vec{u}}{s^3}\left[\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{R} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{R}}{c} - \frac{v^2}{c}\right]}$$

Colecionando esses resultados, obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\epsilon_0}{q}\vec{E} &= \frac{1}{s^2}\left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{v}}{c}\right) + \frac{\vec{R}}{cs^3}\left(\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{R} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{R}}{c} - \frac{v^2}{c}\right) - \frac{R\vec{a}}{c^2s^2} - \frac{R\vec{u}}{c^2s^3}\left[\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{R} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{R}}{c} - \frac{v^2}{c}\right] \\ &= \frac{1}{s^3}\left(\vec{R} - \frac{R\vec{v}}{c}\right)\left[\frac{s}{R} + \frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{cR} - \frac{v^2}{c^2}\right] + \frac{1}{c^2s^3}\left(\vec{R} - \frac{R\vec{v}}{c}\right)\left(\vec{R}\cdot\vec{a}\right) - \frac{R\vec{a}}{c^2s^2} \end{aligned}$$

Usando a expressão para s, temos

$$\frac{s}{R} + \frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{cR} - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \cancel{\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{cR}} + \cancel{\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{cR}} - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \beta^2$$

Resumindo, a expressão para o campo elétrico pode ser escrita como

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_v(\vec{r},t) + \vec{E}_a(\vec{r},t)$$

onde

$\vec{E}_v(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{s^3}\left(\vec{R} - R\vec{\beta}\right)\left(1-\beta^2\right)\right]$, só depende da velocidade retardada da partícula;

$\vec{E}_a(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{c^2s^3}\left(\vec{R}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{R} - R\vec{\beta}\right) - \frac{R\vec{a}}{c^2s^2}\right]$, é proporcional à aceleração da partícula.

O campo magnético pode ser calculado da mesma forma,

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\nabla\times\frac{[\vec{u}]}{[s]} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla\times\frac{\vec{u}}{s} \qquad \text{(retirando [ ])}$$

Portanto

$$\frac{4\pi\epsilon_0 c^2}{q}\vec{B} = \left[\nabla_{\vec{r}} - \frac{\vec{R}}{cs}\frac{\partial}{\partial t_r}\right] \times \frac{\vec{u}}{s}$$

$$\nabla_{\vec{r}} \times \frac{\vec{u}}{s} = \frac{1}{s}\cancelto{0}{\nabla \times \vec{u}_r(t_r)} - \vec{u} \times \nabla\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}\vec{u} \times \nabla s = \frac{1}{s^2}\vec{u} \times \left[\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{u}}{c}\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{\nabla_{\vec{r}} \times \frac{\vec{u}}{s} = \frac{\vec{u} \times \vec{R}}{s^2 R}}$$

$$\left[\frac{\vec{R}}{cs}\frac{\partial}{\partial t_r}\right] \times \frac{\vec{u}}{s} = \frac{\vec{R} \times \vec{a}}{cs^2} + \frac{\vec{R} \times \vec{u}}{sc}\frac{\partial}{\partial t_r}\frac{1}{s}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_r}\frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}\frac{\partial s}{\partial t_r} = -\frac{1}{s^2}\left[-\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{R} - \frac{1}{c}\vec{a}\cdot\vec{R} + \frac{v^2}{c}\right]$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{4\pi\epsilon_0 c^2}{q}\vec{B} &= -\frac{\vec{R} \times \vec{A}}{cs^2} + \frac{\vec{u} \times \vec{R}}{s^2}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{s}\left(\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{Rc} + \frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] \\
&= -\frac{\vec{R} \times \vec{a}}{cs^2} + \frac{\vec{u} \times \vec{R}}{s^3}\left[\underbrace{1 - \cancel{\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{Rc}}}_{s/R} + \cancel{\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{Rc}} + \frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right]
\end{aligned}$$

Portanto, o campo magnético pode ser escrito na mesma forma do campo elétrico

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_v(\vec{r}, t) + \vec{B}_a(\vec{r}, t)$$

onde

$$\begin{aligned}
\vec{B}_v(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\left[\frac{\vec{\beta} \times \vec{R}}{s^3}\left(1 - \beta^2\right)\right] \\
\vec{B}_a(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\left[\frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c^2 s^3}\left(\vec{\beta} \times \vec{R}\right) - \frac{\vec{R} \times \vec{a}}{c^2 s^2}\right] \qquad (s = R - \vec{\beta}\cdot\vec{R})
\end{aligned}$$

As expressões que derivamos permitem calcular os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, no ponto $\vec{r}$ e no instante t, conhecidas a posição, velocidade e aceleração retardada da partícula. É importante realçar que as expressões são corretas, relativisticamente, considerando $\vec{u}$ como a velocidade relativa entre a carga e o observador.

No limite estático, $\vec{\beta} = 0$ e $\vec{a} = 0$, obtemos $s = R$ e

$$\vec{E} = \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

$\vec{E}_a = 0$, $\vec{B}_a = 0$, de acordo com a expressão para o campo eletrostático de uma carga virtual.

A partir das expressões para $\vec{E}$ e $\vec{B}$, podemos concluir imediatamente que só as cargas aceleradas radiam. De fato, a dependência de $\vec{E}_v$ e $\vec{B}_v$ com R é dada por

$$E_v \propto \frac{1}{R^2} \qquad \text{e} \qquad B_v \propto \frac{1}{R^2}$$

De acordo com nossa discussão sobre campos de radiação, estes campos decaem mais rápido que $1/R$ e, portanto, não constituem campos de radiação. Já o comportamento de $\vec{E}_a$ e $\vec{B}_a$ é dado por

$$E_v \propto \frac{1}{R} \qquad \text{e} \qquad B_v \propto \frac{1}{R}$$

Portanto, a parcela do campo eletromagnético, produzido por uma partícula em movimento, que é proporcional à aceleração é que é responsável pela radiação.

O fato de uma partícula que se move com velocidade uniforme não radiar é consistente com a teoria da relatividade. Para um partícula em movimento uniforme, podemos sempre encontrar um referencial no qual esteja em repouso em relação ao observador. Portanto, neste referencial o campo por ela produzido é estático e, pelo segundo postulado da Relatividade Especial (inexistência de referencial privilegiado) um outro observador, se movendo com relação à carga não poderia ver um campo de radiação, senão haveria um mecanismo para diferenciar os dois observadores.

A aceleração que aparece nas expressões para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ pode ser uma aceleração linear, centrípeta, etc. Caso seja uma aceleração negativa (frenagem) a radiação emitida é denominada Radiação de Bremsstrahlung.

Os campos $\vec{E}_v$ e $\vec{B}_v$ são em geral denominados campos de indução, enquanto que $\vec{E}_a$ e $\vec{B}_a$ são denominados campos de radiação.

Finalmente, vamos considerar uma situação interessante. Consideremos uma partícula se movendo com velocidade constante, no vácuo, tal que $|\vec{\beta}| < 1$. Então, só temos os campos $\vec{E}_v$ e $\vec{B}_v$ e não há radiação. Suponhamos agora que a partícula entre num meio com índice de refração $n > 1$. As expressões para $\vec{E}_v$ e $\vec{B}_v$ no meio seriam as mesmas, mas a velocidade da luz no meio é dada por

$$c_{meio} = \frac{c}{n} < c$$

Se a partícula já estava com uma velocidade $\vec{u}$ próxima da luz no vácuo, pode ser que sua velocidade seja maior que c_{meio}. Então, o fator s que aparece no denominador de $\vec{E}_v$ e $\vec{B}_v$,

$$s = R - \vec{\beta} \cdot \vec{R} = R\left(1 - \frac{u\, cos\theta}{c_{meio}}\right) = R\left(1 - \frac{nu\cos\theta}{c}\right)$$

pode se tornar nula dentro do cone definido por $\theta = arccos(c/nu)$, onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e a direção de observação. Neste caso, os campos $\vec{E}_v$ e $\vec{B}_v$ podem se tornar infinitos e talvez possamos esperar que a realidade eles de convertam em campos de radiação. Esta radiação existe e foi observada por Sherenkov em 1934; por isto é denominado Radiação de Sherenkov. Concluindo essa discussão, uma partícula em movimento uniforme não radia no vácuo; num dado meio ela pode radiar se sua velocidade for maior que a velocidade da luz no meio.

Campo produzido por uma carga em movimento uniforme

Nós já derivamos os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ produzido por uma carga em movimento uniforme diretamente dos potenciais de Lienard-Wiechert. É interessante, no entanto, refazer este cálculo a partir das expressões gerais que acabamos de obter. Se $[\vec{a}] = 0$, temos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{s^3}\left(\vec{R} - R\vec{\beta}\right)\left(1 - \beta^2\right)\right]_{t_r} ; \qquad s = R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}$$

Será visto no exercício como, a partir desta expressão, se pode obter o resultado que derivamos anteriormente.