

# Experiência VII (aulas 11 e 12)

## Cordas vibrantes

---

1. Objetivos
2. Introdução
3. Arranjo experimental
4. Procedimento experimental
5. Análise de dados
6. Apêndice
7. Referências

### **1. Objetivos**

Essa experiência tem como objetivo estudar as ressonâncias observadas em um fio tensionado e submetido a um estímulo sonoro. A partir desse estudo, determinar uma expressão empírica que estabeleça uma conexão entre as frequências de ressonância desse sistema com todos os parâmetros relevantes ao experimento.

### **2. Introdução**

Em muitas situações do cotidiano, a explicação de um fenômeno experimental pode ser muito complexa do ponto de vista teórico. Apesar disso é importante poder prever o efeito causado por esse fenômeno. Nesses casos, costuma-se determinar fórmulas empíricas que possibilitem a previsão de uma grandeza física quando o objeto estudado se encontra em alguma configuração pré-estabelecida. Nesse contexto, uma fórmula empírica não pode ser considerada uma explicação física do fenômeno estudado, mas apenas uma ferramenta de previsão para esse fenômeno.

Quando se quer determinar uma expressão empírica para uma determinada grandeza deve-se, a partir da observação, estabelecer quais parâmetros influenciam a grandeza estudada. Uma vez estabelecida a lista de parâmetros, estuda-se, através de medidas, a dependência da grandeza física de cada um desses parâmetros, mantendo-se todos os outros fixos. Em seguida, todos os dados obtidos são analisados com o intuito de extrair uma expressão que permita prever o valor da grandeza estudada para um determinado conjunto de parâmetros.

Nesta experiência, realizaremos o estudo do fenômeno de ressonância de um fio tensionado com o objetivo de obter uma expressão que relacione as frequências de ressonância observadas com os parâmetros do experimento.

Quando um fio tensionado é posto a vibrar, dependendo da frequência de vibração utilizada, o fio pode entrar em um estado de ressonância, na qual a amplitude da vibração torna-se bastante elevada. As frequências nas quais a ressonância é observada dependem de vários parâmetros do fio. Esse é o efeito que permite, por exemplo, que vários instrumentos musicais funcionem, como o violão, piano, etc. No caso do violão, em geral de seis cordas, cada corda vibra em uma frequência de ressonância bem estabelecida (notas musicais). Para gerar as diferentes notas, cada corda possui características físicas diferentes, como o material de que é construída, espessura, etc. Além disso, outros fatores, como o comprimento da corda e a tensão aplicada à mesma (afinação do instrumento) influenciam a frequência de ressonância. Assim, para obter uma expressão que possibilite prever a frequência de ressonância de uma corda deve-se estudar como a frequência varia com cada um desses parâmetros.

A hipótese mais simples para uma fórmula empírica consiste em supor que a dependência de uma grandeza ( $y$ ) com um determinado parâmetro ( $x$ ) se dá através da expressão:

$$y = Ax^b \quad (1)$$

onde  $A$  e  $b$  são constantes. Outras formas (exponencial, logarítmica, trigonométrica, etc.) podem ocorrer. Contudo, somente a observação e análise das medidas efetuadas nos permitem fazer uma escolha mais adequada.

No nosso exemplo do violão, os parâmetros que podem influenciar a frequência de vibração do fio são: o *comprimento* ( $L$ ), a *tensão* aplicada ( $T$ ) e as suas características de construção. No último caso, podemos representar essas características de construção através da *densidade linear* do fio ( $\mu = M/L$ , com  $M$  sendo a massa e  $L$  o comprimento do fio). Assim, uma primeira aproximação para uma expressão que correlacione a frequência de ressonância com esses parâmetros pode ser escrita como:

$$f = AL^\beta T^\gamma \mu^\delta, \quad (2)$$

Onde  $A$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são constantes.

Quando observamos um fio de violão, percebemos que, devido à sua construção, outras frequências além da frequência natural de ressonância, podem ser obtidas. Devido ao fato de a corda estar presa em ambas as

extremidades, além da frequência natural, frequências de meio tom também são possíveis de serem obtidas.

Na Figura 1 é mostrado um esquema da vibração de uma corda cujo comprimento é bem determinado, presa em ambas as extremidades. O modo mais simples de vibração é aquele no qual a corda se movimenta totalmente em fase. Costuma-se denominar essa frequência de “frequência natural de vibração”. Um segundo modo de vibração, no qual podemos dividir a corda ao meio e em que cada metade se movimenta em oposição de fase, também é possível, pois a corda permanece fixa em suas extremidades e assim sucessivamente, conforme mostra a Figura 1. Cada um desses modos é representado por um número, correspondente ao número de ventres (máximos de vibração) observados. Assim, o primeiro modo de vibração possui  $n = 1$ , o segundo,  $n = 2$  e assim indefinidamente. Com base nesses argumentos é de se esperar que a frequência de vibração de um fio também dependa do *modo* de vibração observado. Assim, a fórmula empírica para as frequências de ressonância pode ser escrita como:

$$f = Cn^\alpha L^\beta T^\gamma \mu^\delta, \quad (3)$$

Onde  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são constantes que podem ser extraídas dos dados experimentais.

O objetivo desse experimento é estudar o fenômeno de ressonância em um fio tensionado e verificar se as hipóteses para a dependência da frequência com os parâmetros experimentais é válida e, caso seja, determinar o valor das constantes na expressão (3).

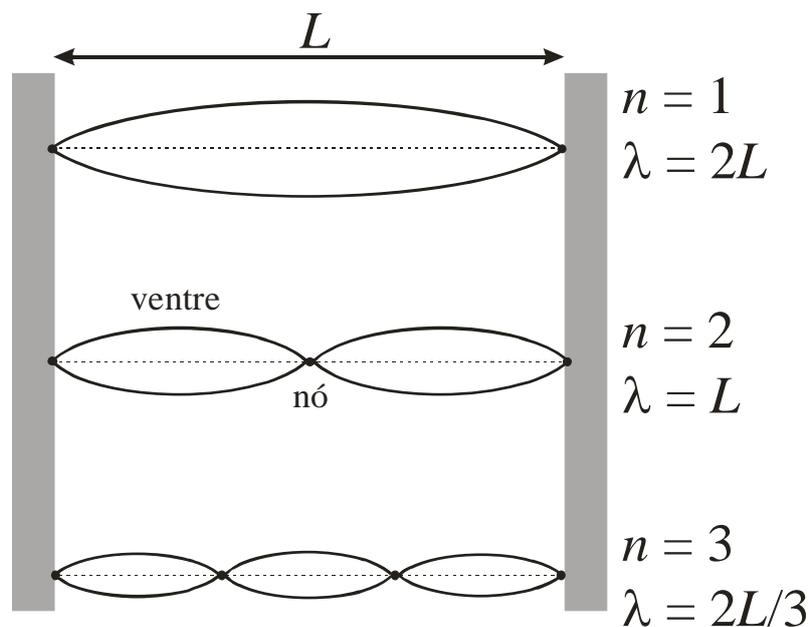


Figura 1. Modos normais de vibração de um fio de comprimento  $L$ .

### 3. Arranjo experimental

O Arranjo experimental utilizado para o estudo da ressonância de um fio está esquematizado na Figura 2. Nesse arranjo, um fio de nylon é preso a um suporte e tensionado através de um sistema de polia. A tensão no fio é controlada através da massa acoplada a esse sistema.

Um alto-falante é acoplado ao fio, próximo a uma das suas extremidades. Este alto-falante é excitado por meio de um gerador de ondas harmônicas senoidais cuja frequência pode ser controlada pelo experimentador.

O experimento consiste em selecionar diversos fios de densidades lineares e comprimentos diferentes, montá-los no arranjo experimental e tensioná-los. Em seguida, o gerador de áudio tem sua frequência ajustada de modo a observar os modos normais de vibração desse fio.

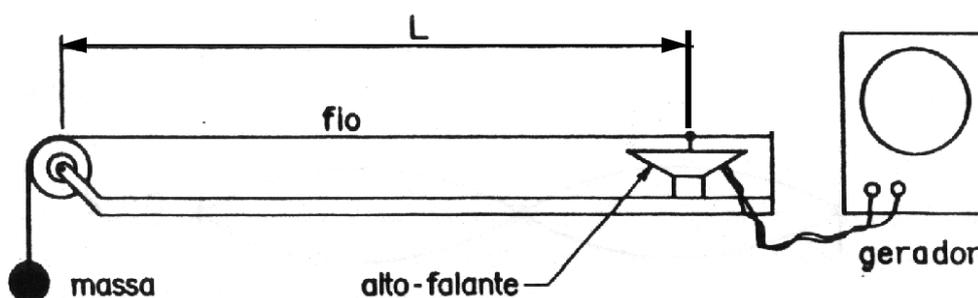


Figura 2. Arranjo experimental utilizado para estudar o fenômeno de ressonância de um fio tensionado.

Deve-se tomar os dados necessários para avaliar a dependência das frequências de ressonância com cada um dos parâmetros envolvidos no experimento (modo de vibração, densidade linear do fio, tensão aplicada ao fio e comprimento do fio). Sendo assim, a tomada e análise de dados está dividida em 4 partes, cada uma delas relacionada a uma das grandezas que influenciam as frequências de vibração do fio.

### 4. Procedimento experimental

Cada grupo deve realizar a tomada e análise dos dados da Parte I e, a critério do professor, escolher, ainda na primeira aula, entre as partes II a IV para uma segunda tomada e análise de dados.

## **Parte I:**

### ***Estudo da variação da frequência ( $f$ ) com o modo de vibração ( $n$ )***

Selecione um determinado fio de nylon de comprimento  $L$  (o maior comprimento possível, de modo a aproveitar o fio para as medidas seguintes), monte-o no arranjo experimental e aplique uma tensão que deve permanecer fixa durante a tomada de dados da Parte I. Não se esqueça de anotar esses parâmetros (densidade linear do fio, comprimento e tensão aplicada).

Com o gerador de áudio, ajuste a frequência de oscilação de modo a observar o modo fundamental de ressonância ( $n = 1$ , ou seja, observa-se apenas um ventre). Essa frequência é observada quando a amplitude de oscilação do fio é máxima. Leia e anote o valor para a frequência de ressonância para esse modo de vibração no gerador de áudio (não esqueça a incerteza).

Repita o procedimento acima para modos de vibração de maior ordem ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) para o maior número possível de modos. Note que a amplitude de oscilação diminui com o aumento do número de ventres observados de modo que modos muito elevados ( $n = 5, 6, 7, \dots$ ) podem ser difíceis ou impossíveis de observar.

Organize todos os dados obtidos em uma tabela que estabeleça a forma da relação entre frequência de ressonância ( $f$ ) e o modo de vibração ( $n$ ).

## **Parte II:**

### ***Estudo da variação da frequência ( $f$ ) com a tensão aplicada ao fio ( $T$ )***

Utilizando o fio da tomada de dados da Parte I, ajuste a frequência do gerador de áudio para observar o segundo modo de vibração ( $n = 2$ ). Leia e anote o valor para a frequência de ressonância para esse modo de vibração no gerador de áudio e para a tensão ( $T$ ) aplicada ao fio (não esqueça a incerteza).

Repita a medida da frequência para  $n = 2$  alterando apenas a tensão que é aplicada ao fio. Para isso, deposite ou retire os lastros presos ao sistema de polia do arranjo experimental. Não se esqueça de medir a massa que está sendo utilizada para tensionar o fio. Repita esse processo para 6-8 tensões diferentes e organize os dados em uma tabela que estabeleça a relação entre a frequência do segundo modo de vibração do fio com a tensão aplicada ao mesmo.

Deve-se tomar o cuidado de não selecionar valores de massa muito próximos entre uma medida e outra, pois nesse caso a análise gráfica torna-se difícil de ser realizada. Variações de aproximadamente 50 g entre uma medida e outra fornecem dados satisfatórios.

### **Parte III:**

#### ***Estudo da variação da frequência ( $f$ ) com o comprimento do fio ( $L$ )***

Utilizando o mesmo fio e os mesmos parâmetros utilizados na Parte I da tomada de dados, ajuste a frequência do gerador de áudio para observar o segundo modo de vibração ( $n = 2$ ). Leia e anote o valor para a frequência de ressonância para esse modo de vibração no gerador de áudio e para o comprimento ( $L$ ) do fio utilizado (não esqueça a incerteza).

Repita o procedimento acima, reduzindo o comprimento do fio. Meça a frequência de ressonância do segundo modo de vibração para esse novo comprimento (não esqueça de anotar o comprimento e sua incerteza). Repita esse procedimento, variando o comprimento do fio de aproximadamente 10 cm entre uma medida e outra. Organize os dados em uma tabela de tal forma a correlacionar a frequência de vibração com o comprimento utilizado para o fio.

### **Parte IV:**

#### ***Estudo da variação da frequência ( $f$ ) com a densidade linear do fio ( $\mu$ )***

O estudo da dependência da frequência de ressonância com a densidade linear do fio necessita a troca do fio utilizado entre uma medida e outra. Deve-se tomar o cuidado de reproduzir todos os outros parâmetros ( $L$  e  $T$ ), dentro das incertezas experimentais, de tal modo que o único parâmetro variável seja a densidade linear ( $\mu$ ).

Meça a frequência do segundo modo de vibração ( $n = 2$ ) para cada um dos fios disponíveis no laboratório. Organize os dados em uma tabela de tal forma a correlacionar a frequência de vibração com a densidade linear do fio.

## **5. Análise dos dados**

A nossa hipótese inicial para a determinação de uma expressão empírica para as frequências de ressonância de um fio tensionado é tal que a frequência de ressonância pode ser escrita como:

$$f = Cn^\alpha L^\beta T^\gamma \mu^\delta, \quad (3)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são constantes que podem ser extraídas dos dados experimentais.

Faça, inicialmente, uma *análise dimensional* da expressão (3) e, com base nessa análise, determine os valores para os valores das potências ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ ). É possível obter todos os valores a partir de uma análise dimensional da expressão (3)?

Agora vamos determinar o valor das constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  a partir dos dados experimentais. Caso a expressão (3) seja representativa do fenômeno de ressonância em um fio, temos que, variando apenas um dos parâmetros, a dependência da frequência de ressonância com esse parâmetro é uma expressão da forma:

$$f = K \cdot x^a, \quad (4)$$

onde  $K$  é uma constante que depende dos valores dos outros parâmetros fixados,  $x$  é o parâmetro que está sendo variado ( $n$ ,  $L$ ,  $T$  ou  $\mu$ ) e  $a$  é a constante (potência) relacionada a esse parâmetro ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ou  $\delta$ ). Nesse caso, fazendo-se um gráfico da frequência de ressonância como função do parâmetro  $x$  em um *papel di-log* (estude no Capítulo IV as escalas logarítmicas), obtém-se uma reta cuja inclinação é a constante  $a$ .

Faça um gráfico di-log para cada um dos conjuntos de dados obtidos nas Partes I a IV. Esses gráficos são, de fato, compatíveis com retas? Obtenha, a partir dos gráficos obtidos, valores experimentais para as constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ . Os valores experimentais são compatíveis com aqueles extraídos a partir da análise dimensional realizada com a expressão empírica para a frequência de ressonância? Compare também com os valores teóricos esperados, conforme descrito no Apêndice desse capítulo. Como você poderia obter a constante de proporcionalidade ( $C$ ) da fórmula empírica (3)? Discuta os resultados.

## 6. Apêndice: Modos normais de oscilação de um fio tensionado

(Texto baseado na apostila de laboratório da disciplina  
*Física Experimental II para Engenharia*)

Quando aplicamos a segunda lei de Newton a trechos de um fio que está tensionado e executando uma oscilação transversal, chegamos a uma equação diferencial da forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = 0$$

que corresponde à equação de uma onda com velocidade de propagação  $v$ . As coordenadas  $(x, y)$  são as posições, no espaço, de um ponto do fio que, quando em repouso, está contido no eixo  $x$  ( $y = 0$ ). A oscilação se dá na direção  $y$ , transversal ao eixo  $x$ , e  $t$  corresponde ao tempo.

A associação da equação acima com a de propagação de uma onda não é imediata. Esse fato pode ser percebido empiricamente, quando damos um “chacoalhão” no fio e fazemos pulsos caminharem pelo fio tensionado. A demonstração teórica fica mais clara quando vemos que uma função qualquer dada por  $y(x,t) = f(x \pm vt)$  é uma solução da equação acima. Nesse caso, para  $t$  fixo temos uma forma bem estabelecida para o fio em função de  $x$  e, caso deixemos o tempo fluir, essa forma viaja na direção de  $x$ , com velocidade  $v$ . O sentido de deslocamento é dado pelo sinal positivo ou negativo na expressão  $x \pm vt$ .

No caso particular de um fio tensionado de comprimento  $L$  e fixo em ambas as extremidades, no qual aplicamos uma perturbação periódica e transversal ao fio, observamos o fenômeno de ressonância toda vez que a frequência da perturbação externa for igual a uma das **frequências próprias** do fio tensionado.

Para determinar quais são as frequências de ressonância desse arranjo, devemos recordar a correspondência entre a frequência de oscilação ( $f$ ) de uma onda qualquer com o seu comprimento de onda ( $\lambda$ ). Essa correspondência depende da velocidade de propagação da onda e é dada por:

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

A determinação dos possíveis comprimentos de onda pode ser realizada com argumentos puramente geométricos. Na Figura 1 são mostrados alguns modos possíveis de vibração. Como o fio está preso em ambas as extremidades, somente modos cujos comprimentos de onda satisfazem essa condição são possíveis. Esses modos são classificados de

acordo com o número de ventres observados. Um modo com apenas 1 ventre possui  $n = 1$  e assim sucessivamente. Da Figura 1 pode-se extrair que o comprimento de onda está relacionado ao modo de vibração, bem como ao comprimento do fio, segundo a expressão:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \text{ com } n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

Nesse caso, o índice  $n$ , em  $\lambda_n$ , representa o modo de vibração observado.

Para um fio fixo e de comprimento  $L$ , as frequências naturais de vibração podem, então, ser escritas através da expressão:

$$f_n = \frac{nv}{2L}, \text{ com } n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

A velocidade de propagação da onda no fio depende das suas propriedades e da tensão longitudinal aplicada ao mesmo (maiores detalhes para a determinação da velocidade podem ser obtidas na referência 1). Para um fio cuja densidade linear vale  $\mu$  ( $\mu = M/L$ , sendo  $M$  a massa do fio) e sujeito a uma tensão longitudinal  $T$  a velocidade de propagação de uma onda por esse fio vale:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Desse modo, as frequências naturais de vibração de um fio tensionado são dadas por:

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \text{ com } n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

## 7. Referências

- [1] H. Moysés Nussenzveig, “Curso de Física Básica”, vol. 2, Editora Edgard Blücher Ltda.