Eletromagnetismo II

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 1° Semestre 2015

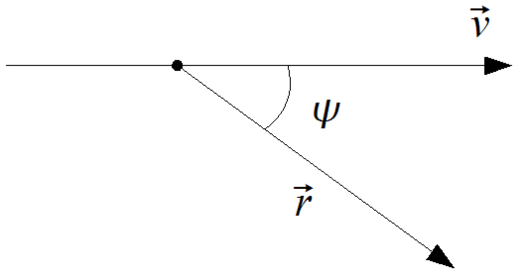
Preparo: Diego Oliveira

Aula 12

Na aula passada mostramos que os campos produzidos por uma carga em movimento uniforme no laboratório são dados por

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\frac{1-\beta^2}{\left[1-\beta^2 sen^2\psi\right]^{3/2}}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}; \qquad sen\psi = \frac{\vec{r}\times\vec{v}}{|\vec{r}||\vec{v}|}$$



onde $\vec{r}$ é a posição onde estamos medindo o campo, com relação à <u>posição atual da carga</u>.

Na terceira série de exercícios será feito um estudo dirigido em que este mesmo resultado é obtido diretamente, sem utilizar os potenciais de Lienard-Wiechert.

Os resultados intermediários que obtivemos nesta apresentação foram

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{v}\frac{\phi}{c^2}; \qquad \phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{q}{\sqrt{1-\beta^2 sen^2\psi}}$$

e

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

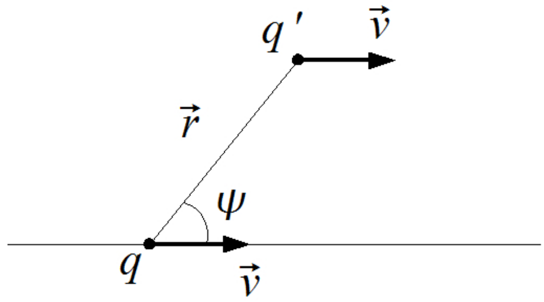
Portanto a carga em movimento produz um campo elétrico e um campo magnético. Vamos explorar um pouco mais a física deste resultado, discutindo uma consequência que não é apresentada no livro texto.

Seguiremos a apresentação feita no livro

Richard Becker; Electromagnetic Fields and Interactions
Cap. DIII; Seção 64

Potencial Convectivo de Heaviside

Suponhamos que exista uma outra carga, q', se movendo paralelamente à carga q, com mesma velocidade $\vec{v}$. Portanto as duas cargas estão no mesmo referencial inercial. Como a carga q produz um campo elétrico e um magnético, no referencial do laboratório, a força na carga q' será dada pela força de Lorentz



$$\vec{F} = q'\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right) = q'\vec{E}+q'\vec{v}\times\left(\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right) = q'\vec{E}+q'\frac{\vec{v}}{c^2}\left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right)-q'\frac{v^2}{c^2}\vec{E}$$

$$\vec{F} = q'\left(1-\beta^2\right)\vec{E}+q'\frac{\vec{v}}{c^2}\left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right)$$

Mas como

$$\vec{E} = -\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi-\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\nabla\phi+\frac{\vec{v}}{c^2}\vec{v}\cdot\nabla\phi$$

Temos

$$\vec{v}\cdot\vec{E} = -\vec{v}\cdot\nabla\phi+\frac{v^2}{c^2}\vec{v}\cdot\nabla\phi = -\left(1-\beta^2\right)\vec{v}\cdot\nabla\phi$$

$$\therefore\vec{F} = q'\left(1-\beta^2\right)\left[-\nabla\phi+\cancel{\frac{\vec{v}}{c^2}\vec{v}\cdot\nabla\phi}\right]-q'\frac{\vec{v}}{c^2}\left(1-\cancel{\beta^2}\right)\vec{v}\cdot\nabla\phi$$

$$\therefore\vec{F} = -\nabla\left(q'\varphi\right)$$

onde

$$\varphi = (1-\beta^2)\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\,\frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2 sen^2\psi}}$$

é o potencial convectivo introduzido por Heaviside.

Assim a força entre as duas cargas será dada pelo $\nabla\varphi$ e, portanto, será normal às superfícies $\varphi = const$.

Estas superfícies são dadas por $\varphi = cte$, ou seja

$$r\sqrt{1-\beta^2 sen^2\psi} = cte \quad \Rightarrow \quad r^2 - r^2\beta^2 sen^2\psi = cte$$

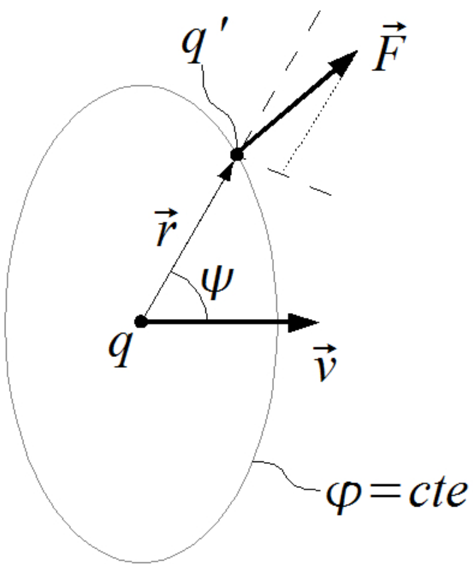
$$x^2 + y^2 + z^2 - \beta^2(y^2+z^2) = cte$$

onde usamos

$$sen\psi = \frac{|\vec{r}\times\vec{v}|}{|\vec{r}||\vec{v}|} = \frac{|\left(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z\right)\times v\hat{e}_x|}{rv} = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{r}$$

Assim as superfícies $\varphi = cte$ serão dadas pelas elipsoides

$$x^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2) = cte$$



Portanto a força não estará ao longo da linha que une as duas cargas! A consequência imediata deste resultado é que se as duas cargas estiverem presas aos terminais de uma barra rígida isolante, a barra experimentará um torque, devido à componente da força normal a ela, tentando girá-la a orientar-se na direção do movimento! Este resultado permitiria determinar o movimento absoluto de um referencial inercial. Este fato foi usado por George Fitzgerald, no século 19, para propor que o movimento absoluto da Terra em relação ao referencial inercial poderia ser detectado pela tendência de um capacitor se orientar na direção do movimento.

A verificação experimental foi realizada por Trouton e Noble, numa série de difíceis experimentos conduzidos entre 1901 e 1903, com resultado nulo [F.T. Trouton e H.R. Noble, Phil. Trans. Royal Soc. A 202, 165 (1903)], o que foi confirmado em inúmeras experiências posteriores, mais cuidadosas, concordado com o Primeiro Postulado da Relatividade Restrita. De fato, segundo esta teoria, uma tensão mecânica deve existir na barra que une as duas cargas, cancelando o torque elétrico. Para quem tiver interesse em entender este assunto com maior profundidade, recomendo as referências:

- S.A. Teukolsky; American Journal of Physics **64**, 1104 (1996)

- T.H. Boyer, American Journal of Physics **80**, 962 (2012)

Determinação do Campo Produzido por cargas puntiformes

Como a equação da órbita da partícula, $\vec{r}_q(t)$, pode ser uma função qualquer, a relação entre a posição retardada, $\vec{r}_q(t_r)$, que aparece nos potenciais de Lienard-Wiechert, e a posição atual da carga não é, em geral, conhecida explicitamente. Somente no caso de movimento uniforme da carga esta relação pode ser obtida de maneira explícita, conforme mostrado no exemplo 10.3 do livro texto. Isto dificulta o cálculo dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ a partir das relações

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \nabla \times \vec{A}$$

porque, quando aplicamos o operador ∇ temos que calcular as derivadas espaciais mantendo o instante "atual" t fixo e não o tempo retardado t_r. Mas para t fixo, o tempo retardado depende implicitamente das coordenadas (x, y, z)! Ou seja, quando fazemos

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x + \Delta x, t) - \phi(x, t)}{\Delta x}$$

estamos subtraindo os valores do potencial em pontos espaciais vizinhos, mantendo t fixo. Mas isto significa que os valores $\phi(x + \Delta x)$ e $\phi(x)$ foram produzidos para diferentes valores do tempo retardado t_r. Da mesma forma, a derivada parcial de $\vec{A}$ com relação t implica que (x, y, z) são mantidos fixos. Portanto, subtrai valores de $\vec{A}$, num mesmo ponto, para valores distintos do instante "atual"t. Mas, entre t e $t + \Delta t$ a posição $\vec{r}_q(t_r)$ da fonte se alterou! Portanto, temos que determinar as relações entre $\nabla_{\vec{r}}|_t$ e $(\partial/\partial t)_{\vec{r}}$ com as variações no instante retardado $t_r = t - |\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|/c$, para derivar as expressões corretas do campo, num caso geral da equação da órbita da partícula, $\vec{r}_q(t_r)$, em função do instante retardado.

A notação

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{r}}$$

significa derivada parcial com relação ao instante atual com as coordenadas do ponto de observação mantidas fixas e

$$\nabla_{\vec{r}}|_t$$

significa derivadas espaciais parciais com o instante "atual" t mantido fixo.

Dada a equação da órbita da partícula, $\vec{r}_q(t)$, vamos definir as seguintes grandezas

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}_q}{dt_r}; \qquad \text{velocidade da partícula no instante retardado, } [\vec{u}];$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}_q}{dt_r^2} = \frac{d\vec{u}}{dt_r}; \qquad \text{aceleração da partícula no instante retardado, } [\vec{a}];$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q; \qquad s = R - \vec{\beta} \cdot \vec{R} = R - \frac{\vec{u} \cdot \vec{R}}{c}$$

A. Relação entre $\left.\dfrac{\partial}{\partial t}\right|_{\vec{r}}$ e $\left.\dfrac{\partial}{\partial t_r}\right|_{\vec{r}}$

O tempo retardado é definido por $t_r = t - R/c$, ou

$$R = c(t - t_r)$$

Mas note que t_r aparece também em R, implicitamente, através da equação da órbita da partícula

$$R = \left[\left(x - x_q(t_r)\right)^2 + \left(y - y_q(t_r)\right)^2 + \left(z - z_q(t_r)\right)^2\right]^{1/2}$$

Derivando a primeira expressão para R com relação ao instante atual, mantido fixas as coordenadas do ponto de observação, temos

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \left(\frac{\partial R}{\partial t_r}\right)_{\vec{r}}\left(\frac{\partial t_r}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = c\left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}\right) \qquad \therefore \left.\frac{\partial t_r}{\partial t}\right|_{\vec{r}} = \frac{c}{c + \left.\frac{\partial R}{\partial t_r}\right|_{\vec{r}}}$$

Mas, da segunda expressão

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t_r}\right)_{\vec{r}} = -\frac{1}{R}\left[\overbrace{(x - x_q)}^{R_x}\underbrace{\frac{\partial x_q}{\partial t_r}}_{u_x} + \overbrace{(y - y_q)}^{R_y}\underbrace{\frac{\partial y_q}{\partial t_r}}_{u_y} + \overbrace{(z - z_q)}^{R_z}\underbrace{\frac{\partial z_q}{\partial t_r}}_{u_z}\right]$$

ou

$$\boxed{\left(\frac{\partial R}{\partial t_r}\right)_{\vec{r}} = -\frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{R}}$$

Este resultado nos permite transformar a derivada com relação ao tempo atual t, com $\vec{r}$ mantido fixo, numa derivada com relação ao tempo retardado:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \left(\frac{\partial t_r}{\partial t}\right)_{\vec{r}}\left(\frac{\partial}{\partial t_r}\right)_{\vec{r}} \qquad \therefore \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \frac{R}{s}\left(\frac{\partial}{\partial t_r}\right)_{\vec{r}}}$$

B. Expressão para $\nabla_{\vec{r}}|_t$ considerando o movimento da fonte

Quando t é mantido fixo, t_r depende implicitamente de (x, y, z). Portanto

$$\nabla|_t = \left[\nabla_{\vec{r}} + (\nabla_{\vec{r}}\, t_r)\,\frac{\partial}{\partial t_r}\right]_t$$

Para calcular $\nabla t_r|_t$, notamos que

$$R = c(t - t_r) \qquad \therefore \nabla R|_t = -c\,\nabla t_r|_t \qquad \therefore \nabla t_r|_t = -\frac{1}{c}\,\nabla R|_t$$

Mas, para cada componente ∇R aparece novamente a derivada t_r; por exemplo,

$$\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_t = \frac{1}{R}\big(x - x_q(t_r)\big) + \frac{\partial t_r}{\partial x}\left.\frac{\partial R}{\partial t_r}\right|_{\vec{r}} = \frac{x - x_q}{R} - \frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{R}\frac{\partial t_r}{\partial x}$$

Fazendo o mesmo para as componentes y e z, temos

$$\nabla R|_t = \frac{1}{R}\left[(x - x_q)\hat{e}_x + (y - y_q)\hat{e}_y + (z - z_q)\hat{e}_z\right] + \frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{R}\left(\frac{\partial t_r}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial t_r}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial t_r}{\partial z}\hat{e}_z\right)$$

$$\therefore \qquad \nabla R|_t = \frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{R}\cdot\vec{u}}{R}\,\nabla t_r|_r$$

Substituindo este resultado na expressão anterior, obtemos

$$\nabla t_r|_t = -\frac{\vec{R}}{Rc} + \frac{\vec{R}\cdot\vec{\beta}}{R}\nabla t_r \qquad \therefore \Bigg[\underbrace{1 - \frac{\vec{R}\cdot\vec{\beta}}{R}}_{\frac{s}{R}}\Bigg]\nabla t_r|_t = -\frac{\vec{R}}{Rc}$$

$$\therefore \boxed{(\nabla t_r)_t = -\frac{\vec{R}}{cs}}$$

Desta forma, obtemos a expressão para o outro operador que necessitamos para calcular os campos

$$\boxed{\nabla|_t = \nabla_{\vec{r}} - \frac{\vec{R}}{cs}\frac{\partial}{\partial t_r}}$$

Com esses dois operadores, podemos finalmente obter as expressões para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.