

Física IV - AULA 1 - INTERFERÊNCIA

Em 1861, Maxwell formulou as equações básicas do eletromagnetismo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$$

Numa região onde não existam cargas $\rho = 0$, nem correntes $\mathbf{J} = 0$, como o vácuo, verificamos que tanto o campo elétrico $\mathbf{E}$ quanto o campo magnético $\mathbf{B}$ satisfazem a equação homogênea das ondas

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0$$

em que $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ é a velocidade da luz no vácuo. Em meios materiais com permissividade relativa ϵ_r e permeabilidade relativa μ_r , a velocidade (de fase) da luz no meio é

$$v_p = (\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r)^{-1/2},$$

que é usualmente menor do que c . Em muitos contextos, a permissividade relativa é denominada constante dielétrica do meio e denotada por κ .

Exercício 1: "Demonstre a partir das equações de Maxwell no vácuo que os campos elétrico e magnético satisfazem a equação homogênea das ondas."

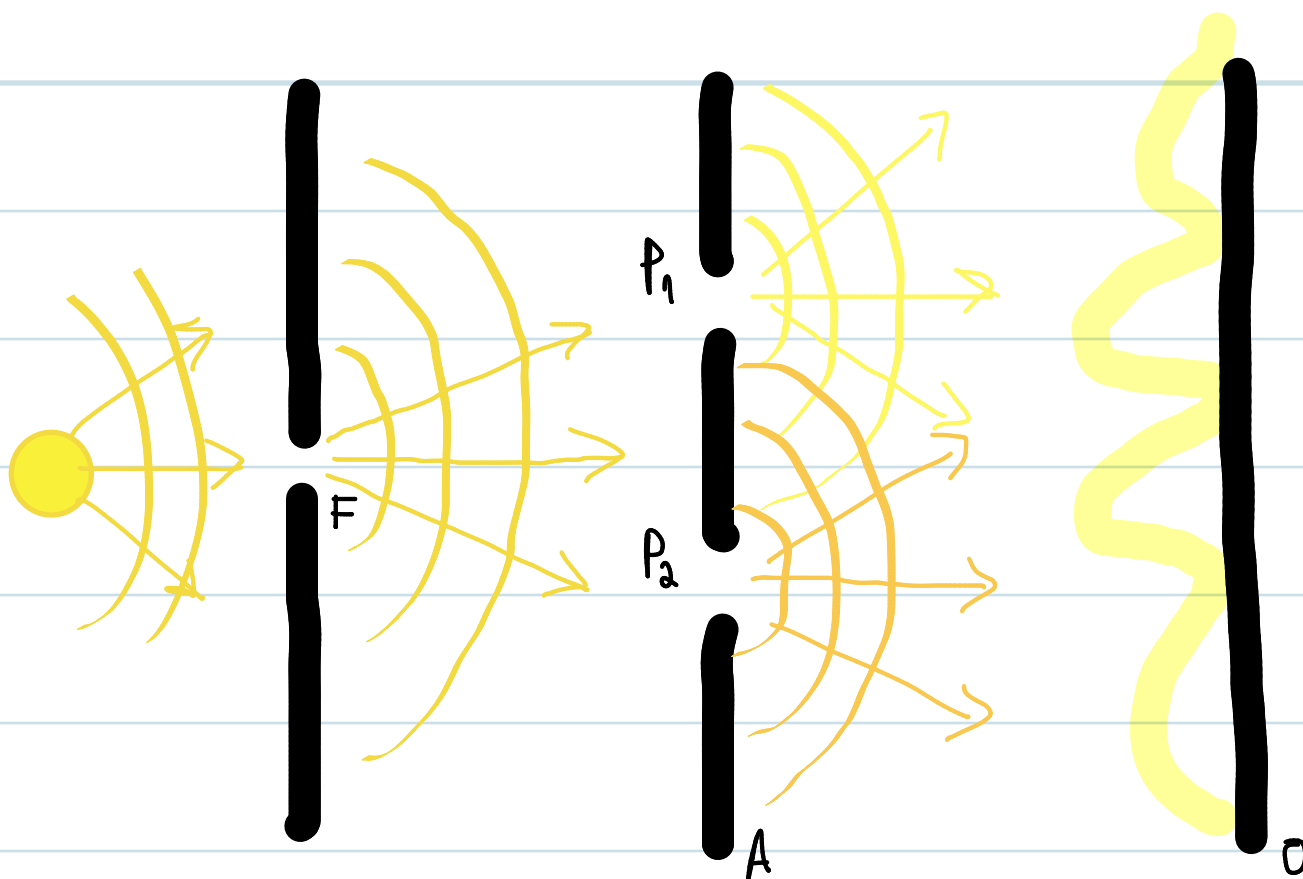
O fato de campo eletromagnético satisfazer a equação das ondas com velocidade de propagação igual à da luz permitiu que Maxwell conjecturasse que a luz é uma onda eletromagnética. A verificação experimental das equações de Maxwell só foi possível em 1888 quando Hertz produziu ondas de rádio e constatou que tinham propriedades idênticas às da luz. Portanto, validando ainda mais a teoria ondulatória da luz, em detrimento de sua rival, a teoria corpuscular da luz.

Apesar de alguns aspectos da propagação da luz serem conhecidos desde a antiguidade, foi apenas no final do século 17 que seu caráter ondulatório foi proposto no "Tratado sobre a Luz" de Christian Huygens, publicado em 1690. Iniciou-se, assim, uma das mais acirradas discussões na história da ciência. Seria a luz uma onda ou uma partícula? Enquanto os fenômenos da ótica geométrica são trivialmente compatíveis com a teoria corpuscular da luz, alguns efeitos como a interferência e a difração possuem caráter eminentemente ondulatório, inexplicáveis pela teoria corpuscular.

1 - O Experimento de Young

Um dos experimentos fundamentais nesta discussão foi realizado por Thomas Young em 1801 para constatar o fenômeno da interferência da luz. Para interpretar os seus resultados, Young fez uma analogia com dois conjuntos de ondas em um meio líquido, como as ondas na superfície da água, que entram simultaneamente em um canal estreito. Ele observou que se dois conjuntos de onda entrarem no canal com suas elevações coincidindo, produzirão elevações maiores. Contudo, se as elevações de um conjunto coincidirem com as depressões do outro, o resultado será um cancelamento, com as elevações preenchendo as depressões, de forma que a superfície da água permanecerá em repouso. Assim, ao observar um resultado semelhante quando duas porções de luz se juntam, concluiu que a luz também apresentava o fenômeno de interferência.

O arranjo experimental usado por Young consistia de uma fonte pontiforme de luz F que incidia sobre um anteparo opaco A onde foram feitos dois buracos também pontiformes P_1 e P_2 muito próximos entre si. A luz que passasse pelos buracos P_1 e P_2 incidia sobre um segundo anteparo opaco O , revelando um conjunto de franjas brilhantes e escuras: as **franjas de interferência**.



Para compreendermos o fenômeno de interferência evidenciado pelo experimento de Young, utilizaremos o fato de que as componentes do campo eletromagnético satisfazem individualmente a equação de onda homogênea, i.e.,

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 f - \nabla^2 f = 0, \quad f \in \{E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}.$$

Notando, adicionalmente, que nos experimentos de interferência são utilizadas fontes de luz monocromáticas, como uma lâmpada de sódio para luz amarela, podemos supor que há apenas uma frequência angular de oscilação ω . Consequentemente, temos o seguinte Ansatz para as componentes do campo eletromagnético:

$$f(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}].$$

Substituindo o Ansatz na equação de onda, obtemos uma equação para $p(\mathbf{x})$:

$$-\frac{\omega^2}{v^2} p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} - \nabla^2 p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{v^2} p(\mathbf{x}) + \nabla^2 p(\mathbf{x}) = 0.$$

Duas soluções para $p(\mathbf{x})$ são particularmente relevantes:

1) Ondas Planas: $p(\mathbf{x}) = A e^{i\delta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$

$$f(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [A e^{i\delta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\omega t}] = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta)$$

Da equação de onda para $p(\mathbf{x})$, temos a seguinte relação entre a frequência angular

ω e o vetor de onda $\mathbf{k}$:

$$\omega^2 = v^2 \|\mathbf{k}\|^2.$$

As seguintes definições são usuais:

⊗ Fase de onda: $\psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta$, δ : constante de fase

⊗ Vetor de onda: $\mathbf{k} = k \mathbf{u}$, $\|\mathbf{u}\| = 1$, $k = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{v} = n k_0$

v : velocidade de fase, n : índice de refração

⊗ Número de onda: $k = \|\mathbf{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}$

⊗ Comprimento de onda: λ

⊗ Frequência: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, T : período.

As fontes de onda são dadas por $\psi = \text{constante}$ e correspondem a planos perpendiculares

ao vetor de onda $\mathbf{k}$.

2) Ondas Esféricas: $p(\mathbf{x}) = A e^{i\delta} \frac{e^{ikr}}{r}$, $r = \|\mathbf{x}\|$

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t + \delta)$$

Da equação de onda para $p(\mathbf{x})$, temos a seguinte relação entre a frequência angular ω e o número de onda k :

$$\omega^2 = v^2 k^2.$$

As frentes de onda, i.e., superfícies de fase constante, coincidem neste caso com esferas de raio r , e centro na fonte de ondas. É importante notar, que diferentemente das ondas planas, a amplitude das ondas esféricas não é constante, decaindo com $1/r$.

Exercício 2: "Verifique que as ondas planas e esféricas de fato satisfazem a equação da onda."

O padrão de interferência dado pela sucessão de franjas claras e escuras sugere que a onda atinge o anteparo D com intensidades diferentes em cada ponto. Logo, para podermos descrever matematicamente o fenômeno de interferência observado por Young, precisamos saber a relação entre a função de onda f e a intensidade. Como a intensidade é proporcional à energia que atravessa um elemento de área perpendicular à direção de propagação por unidade de

tempo, precisamos de uma expressão para a densidade de energia transportada por uma onda eletromagnética.

Sabemos que para campos eletromagnéticos quase-estacionários, as densidades de energia elétrica e magnética são:

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} \|E\|^2, \quad u_M = \frac{1}{2\mu_0} \|B\|^2.$$

Lembrando que a função de onda $f(\mathbf{x}, t)$ representa alguma componente do campo eletromagnético, concluímos que sua intensidade oscila no tempo, numa dada posição $\mathbf{x}$, como

$$\text{Intensidade}[f(\mathbf{x}, t)] \propto |f(\mathbf{x}, t)|^2.$$

Calculemos, pois

$$f(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[p(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}] = \text{Re}[|p(\mathbf{x})| e^{i\text{Arg}(p(\mathbf{x}))} e^{-i\omega t}] = |p(\mathbf{x})| \cos(\omega t - \varphi),$$

em que φ é uma constante determinada pelo tipo de solução de onda (plana ou esférica) adotada. Portanto,

$$\text{Intensidade}[f(\mathbf{x}, t)] \propto |p(\mathbf{x})|^2 \cos^2(\omega t - \varphi).$$

Para a luz visível, a frequência de oscilação é tão grande, $\omega \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$, que os detectores só conseguem registrar o **valor médio temporal**:

$$\langle \cos^2(\omega t + \alpha) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \alpha) \rangle = \frac{1}{2}.$$

Exercício 3: "Calcule os valores médios do seno e do cosseno."

Consequentemente, somos levados à conclusão de que o valor médio da intensidade é proporcional a:

$$I(x) = |p(x)|^2,$$

que é constante para uma onda plana e decai com o inverso do quadrado da distância à fonte para uma onda esférica.

Se considerarmos um experimento de Young no qual é utilizada uma fonte de luz monocromática, invocando a linearidade ou o princípio da superposição, temos que a função de onda em algum ponto P sobre o anteparo O é dada pela soma de duas contribuições, uma devida a P_1 e a outra a P_2 :

$$f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t) = \text{Re} [p_1(x) e^{-i\omega t} + p_2(x) e^{-i\omega t}] = \text{Re} [(p_1(x) + p_2(x)) e^{-i\omega t}].$$

Por conseguinte, a intensidade da onda resultante em P é:

$$I(x) = |p_1(x) + p_2(x)|^2$$

Decompondo, como antes, $p_j = |p_j| e^{i\varphi_j}$, $\varphi_j = \text{Arg}(p_j)$, temos:

$$\begin{aligned} I(x) &= | |p_1| e^{i\varphi_1} + |p_2| e^{i\varphi_2} |^2 = (|p_1| e^{i\varphi_1} + |p_2| e^{i\varphi_2}) (|p_1| e^{-i\varphi_1} + |p_2| e^{-i\varphi_2}) \\ &= |p_1|^2 + |p_2|^2 + |p_1| |p_2| (e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}) \\ &= |p_1|^2 + |p_2|^2 + 2 |p_1| |p_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Em termos das intensidades das ondas incidentes, I_1 e I_2 , temos que a intensidade da onda resultante é dada por:

$$I = I_1 + I_2 + 2 I_1 I_2 \cos \Delta,$$

em que $\Delta = \varphi_2 - \varphi_1$ denota a **diferença de fase** entre as duas ondas incidentes. Essa última expressão é conhecida como **lei básica da interferência** entre duas ondas.

A diferença de fase Δ dita quando a intensidade da onda resultante é máxima ou mínima. Quando a intensidade resultante for máxima, correspondendo a

$$\cos \Delta = 1 \Leftrightarrow \Delta = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow I = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2,$$

temos uma **interferência construtiva**, ao passo que, quando a intensidade for mínima, correspondendo a

$$\cos \Delta = -1 \Leftrightarrow \Delta = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow I = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2,$$

temos uma **interferência destrutiva**. Em particular, se as duas ondas tiverem a mesma intensidade, i.e., $I_1 = I_2$,

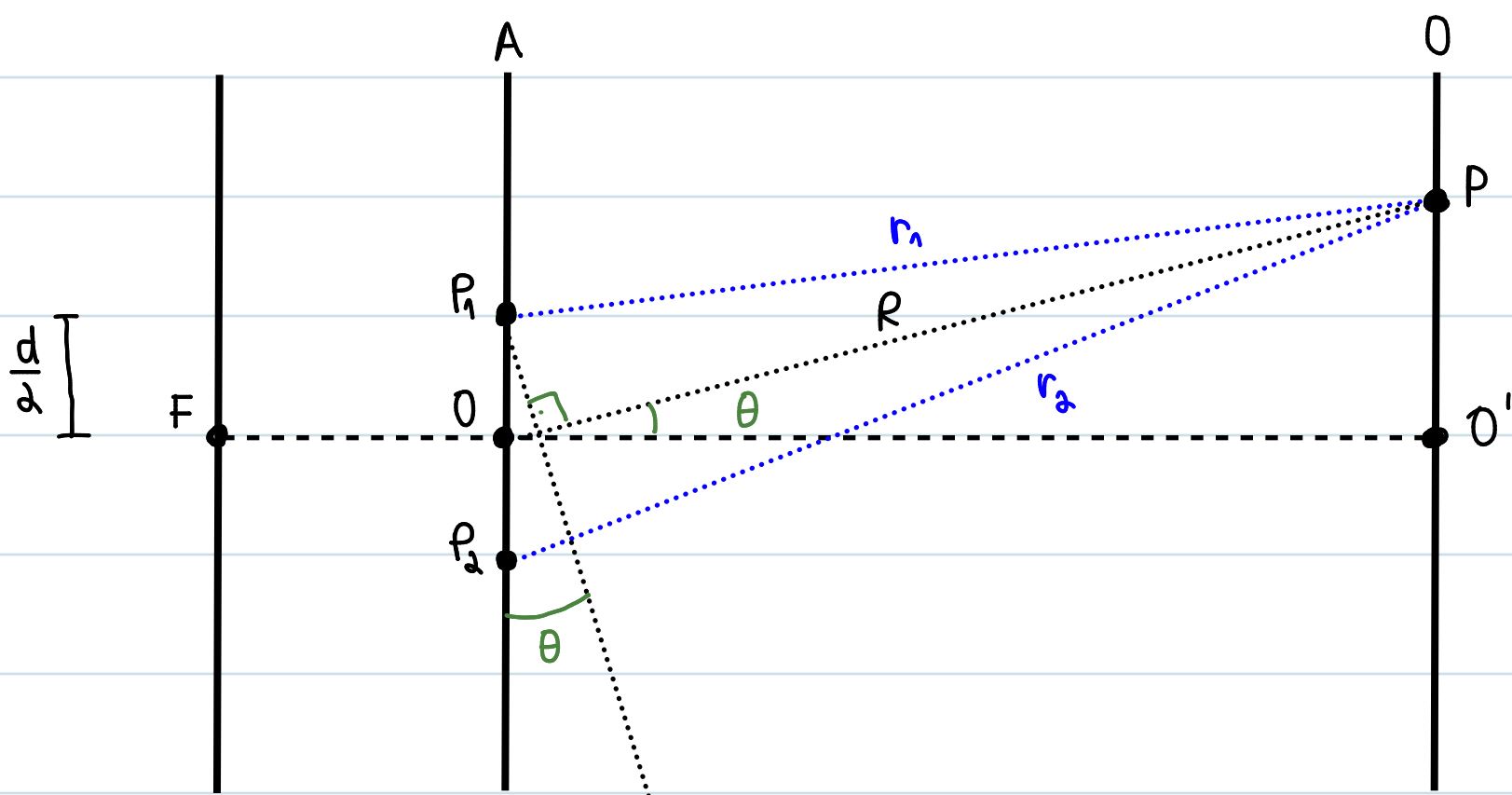
temos $I = 4I_1$ na interferência construtiva e $I = 0$, na destrutiva.

É importante ressaltar que efeitos como a interferência não são explicáveis do ponto de vista da teoria corpuscular, que prevê apenas a soma das intensidades.

De posse de uma expressão geral para a intensidade resultante de duas ondas monocromáticas incidentes sobre um mesmo anteparo, podemos retomar a análise do experimento de Young. Para tanto, precisamos relacionar algumas grandezas relevantes.

Primeiramente, tomaremos os orifícios P_1 e P_2 como fendas longas perpendiculares ao plano da figura e distantes $d/2$ do eixo de simetria, que corresponde à reta perpendicular aos anteparos A e O passando pelo ponto F . Essa distância d entre

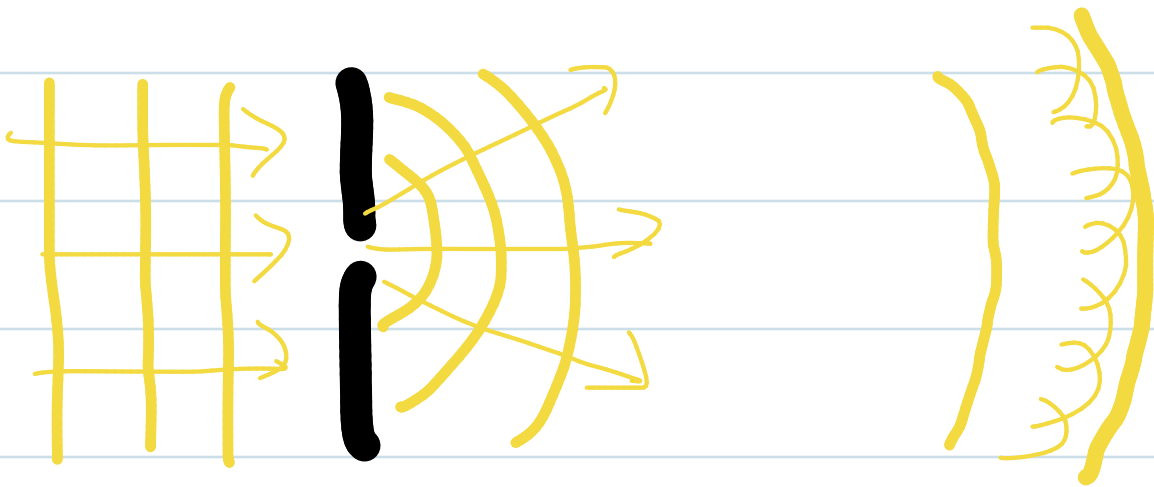
as aberturas será suportada muito menor do que a distância entre os anteparos A e O.



Para prosseguir, precisamos invocar o **Princípio de Huygens**

Princípio de Huygens: "Cada ponto em uma frente de onda, i.e., o lugar geométrico dos pontos sobre a onda com a mesma fase, comporta-se como uma fonte pontiforme de ondas secundárias. A frente de onda num instante posterior é dada pela envoltória das ondas secundárias."

Num meio homogêneo, as ondas secundárias são ondas esféricas com centro na fonte.



Assim, os pontos P_1 e P_2 atuam como fontes pontiformes de ondas esféricas. Por serem excitados pela mesma frente de onda incidente, gerada pela fonte pontiforme F , oscilam na mesma fase. Portanto, podemos representar a função de onda no ponto P pela sobreposição das ondas esféricas geradas por P_1 e P_2 :

$$p(x_p) = p_1(x_p) + p_2(x_p) = \frac{A_1}{r_1} e^{ikr_1} + \frac{A_2}{r_2} e^{ikr_2},$$

em que $r_1 = \|\vec{P_1P}\|$ e $r_2 = \|\vec{P_2P}\|$. Como as ondas geradas em P_1 e P_2 advêm da mesma frente de onda, temos que suas amplitudes coincidem, de forma que podemos tomar $A_1 = A_2 = A$.

Denotando $R = \|\vec{PO}\|$, e utilizando a hipótese de que a distância entre fendas é muito menor do que a distância entre os anteparos, temos que $d \ll R$,

de forma que podemos aproximar r_1 e r_2 por:

$$r_1 \approx R - \frac{d}{2} \sin \theta, \quad r_2 \approx R + \frac{d}{2} \sin \theta.$$

Como $d \ll R$, temos que

$$(r_1)^{-1} = \left(R - \frac{d}{2} \sin \theta\right)^{-1} = R^{-1} \left(1 - \frac{d}{2R} \sin \theta\right)^{-1} \approx R^{-1} \left(1 + \frac{d}{2R} \sin \theta\right) \\ \approx R^{-1},$$

$$(r_2)^{-1} = \left(R + \frac{d}{2} \sin \theta\right)^{-1} = R^{-1} \left(1 + \frac{d}{2R} \sin \theta\right)^{-1} \approx R^{-1} \left(1 - \frac{d}{2R} \sin \theta\right) \\ \approx R^{-1}.$$

Levando a

$$p(x_p) \approx \frac{A}{R} \left[\exp\left(ikR - \frac{ikd}{2} \sin \theta\right) + \exp\left(ikR + \frac{ikd}{2} \sin \theta\right) \right].$$

Logo, a intensidade resultante pode ser obtida da lei básica da interferência

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta$$

com

$$I_1 = \left| \frac{A}{R} \exp\left(ikR - \frac{ikd}{2} \sin \theta\right) \right|^2 = \frac{A^2}{R^2}$$

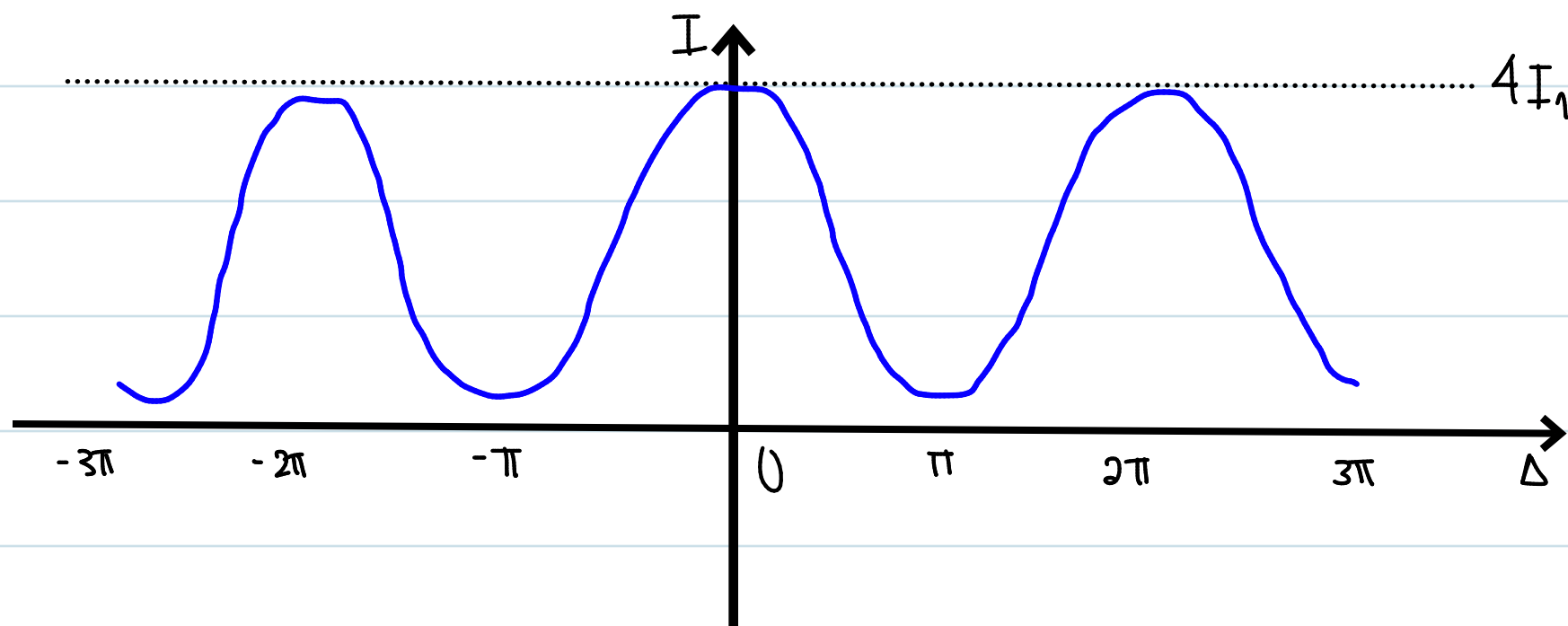
$$I_2 = \left| \frac{A}{R} \exp\left(ikR + \frac{ikd}{2} \sin \theta\right) \right|^2 = \frac{A^2}{R^2}$$

$$\Delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(kR + \frac{kd}{2} \sin \theta\right) - \left(kR - \frac{kd}{2} \sin \theta\right) = kd \sin \theta.$$

Consequentemente,

$$I = 2I_1 (1 + \cos \Delta) = 4I_1 \cos^2\left(\frac{\Delta}{2}\right).$$

A intensidade é máxima para $\theta = 0$, correspondendo a O' na figura, e oscila periodicamente entre tal valor máximo $4I_1$ e 0, conforme o gráfico abaixo:



Sabendo que dois máximos (mínimos) consecutivos apresentam uma diferença de fase de $\Delta = 2\pi$, podemos calcular a distância angular entre duas franjas claras (escuras) consecutivas:

$$\Delta = kd \sin(\Delta\theta) = kd \Delta\theta + O^3(\Delta\theta) \Rightarrow 2\pi = kd \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{2\pi}{kd} = \frac{\lambda}{d}.$$

Consequentemente, o espaçamento no anteparo O será

$$R\Delta\theta \sim \frac{R\lambda}{d}.$$

Para luz com comprimento de onda $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ (aproximadamente na região do verde), distância entre fendas $d = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, temos

$$\Delta\theta \sim 10^{-3} \text{ radianos,}$$

se adicionalmente tomarmos $R \sim 2\text{m}$, concluímos que o espaçamento entre as franjas é de

$$R\Delta\theta \sim 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2 \text{ mm.}$$

É interessante expressarmos as condições de interferência construtiva e destrutiva em termos da diferença de caminhos $r_2 - r_1$ entre as contribuições devidas a P_1 e P_2 . Para tanto, notamos que

$$r_2 - r_1 \simeq d \sin\theta \Rightarrow \Delta = k d \sin\theta \simeq k (r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)$$

1) Interferência Construtiva: $\Delta = 2n\pi \Rightarrow n\lambda = r_2 - r_1,$

2) Interferência Destrutiva: $\Delta = (2n+1)\pi \Rightarrow \lambda\left(n + \frac{1}{2}\right) = r_2 - r_1.$

Portanto, podemos concluir que os máximos da intensidade correspondem a caminhos que diferem por um número inteiro de comprimentos de onda.

Uma questão importante nesse contexto, tendo em vista o aparecimento de regiões no antiparo 0 onde a intensidade é duplicada, consiste sobre a conservação da energia no sistema. De fato, se levarmos em consideração a presença de regiões de sombra adequadamente, concluímos que o fenômeno de interferência

apenas redistribui a energia incidente. Podemos validar tal conclusão calculando o valor médio da intensidade incidente sobre o anteparo O :

$$\langle I \rangle = 4 I_1 \langle \cos^2 \Delta/2 \rangle = 4 I_1 \cdot 1/2 = 2 I_1.$$

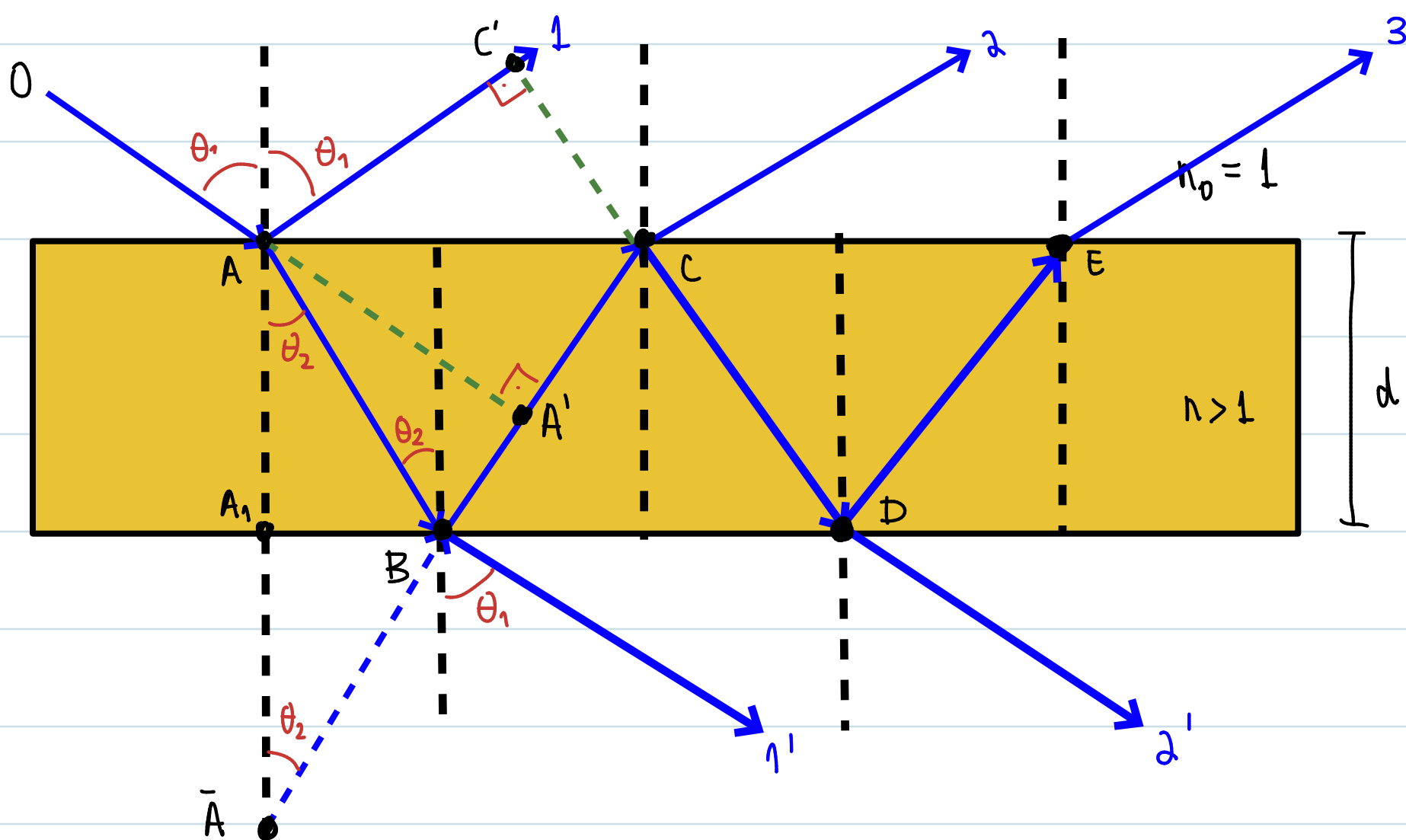
Um comentário final sobre o experimento de Young diz respeito à simplificação que fizemos ao considerar uma fonte de luz monocromática. A saber, é possível realizar tal experimento utilizando uma fonte de luz branca, o Sol por exemplo, como feito originalmente por Young. Nesse caso as franjas de interferência também são observadas. Contudo, apenas a franja central é branca, as demais são coloridas, pois cada cor do espectro produz uma figura de interferência com espaçamento diferente, $\Delta\theta \propto \lambda$. As diferentes cores observadas são então um resultado da sobreposição de ~~um~~ vários padrões.

2 - Interferência em Lâminas Delgadas

Nesta seção, vamos considerar os efeitos de interferência da luz ao atravessar lâminas delgadas de materiais transparentes. Neste caso, precisamos levar em consideração as inúmeras reflexões que a luz sofre entre as faces internas da lâmina, levando a interferência de vários feixes de luz, em contraste

com a interferência de apenas 2 feixes no experimento de Young.

Por concretudeza, consideramos uma lâmina de índice de refração n com espessura d situada no ar (índice de refração $n_0=1$), sobre a qual incide um raio de luz $\vec{OA}$ fazendo um ângulo θ_1 com a normal da lâmina em A .



Ao atingir a interface entre dois meios com índices de refração diferentes, um raio de luz será parcialmente refletido (raio 1) e parcialmente refratado (raio $\vec{AB}$). Da ótica geométrica sabemos os valores dos ângulos relevantes através das seguintes leis:

⊗ Lei da Reflexão: " O raio refletido pertence ao plano de incidência, e o ângulo de reflexão é igual ao de incidência. "

⊗ Lei da Refração (Snell-Descartes): " O raio refratado pertence ao plano de incidência, e $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ em que θ_1 é o ângulo entre a normal e o raio incidente, θ_2 é o ângulo entre a normal e o raio refratado e n_1 e n_2 são os respectivos índices de refração. "

No ponto B, ocorrerá um novo fenômeno de reflexão (raio $\overrightarrow{BC}$) e refração (raio 1') parciais. Esse processo continua a se repetir sempre que um raio atingir a interface entre os meios. Claramente, a intensidade dos raios envolvidos diminui a cada reflexão/refração em função da conservação da energia. Temos, dessa forma, um conjunto de raios refletidos pela lâmina delgada $\{1, 2, 3, \dots\}$ e um conjunto de raios refratados $\{1', 2', 3', \dots\}$.

Queremos avaliar o fenômeno de interferência que ocorre na luz refletida, soma das contribuições dos raios $1, 2, 3, \dots$, e na luz transmitida, soma das contribuições dos raios $1', 2', 3', \dots$. Para tanto, precisamos saber a diferença de fase entre raios consecutivos. Supondo que a luz incidente seja monocromática,

com frequência angular ω , temos que a contribuição temporal à fase $e^{-i\omega t}$ será a mesma para todos os raios. Consequentemente, precisamos considerar apenas a contribuição do percurso de cada raio à fase:

$$e^{ikl} = e^{ik_0 n l} = e^{\frac{2i\pi}{\lambda_0} n l},$$

em que k_0 é o número de onda no vácuo e λ_0 o comprimento de onda no vácuo. A quantidade $n l$ recebe o nome de **caminho ótico** correspondente ao percurso l , e constitui a quantidade relevante para avaliarmos a defasagem entre dois raios consecutivos.

Para calcular a diferença de caminho ótico entre os raios 1 e 2, notamos que, pelo Princípio de Huygens, o segmento $\overline{CC'}$ (perpendicular ao raio 2) pode ser considerado como a frente de onda transmitida associada à frente de onda representada pelo segmento $\overline{AA'}$ (perpendicular ao raio $\overrightarrow{BC}$). Logo, os caminhos óticos $[AC']$ e $[A'C]$ são iguais, i.e.,

$$n_0 \|\overrightarrow{AC'}\| = n \|\overrightarrow{A'C}\|.$$

Dessa forma, podemos expressar os caminhos óticos associados aos raios 1 e 2 como:

$$[1] = [AC'] = n_0 \|\overrightarrow{AC'}\|$$

$$[2] = [AB] + [BA'] + [A'C] = n (\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BA'}\| + \|\overrightarrow{A'C}\|)$$

$$\Rightarrow [2] = n \left(\|\vec{AB}\| + \|\vec{BA'}\| + \|\vec{A'C}\| \right) = n \left(\|\vec{AA'}\| + \|\vec{A'C}\| \right) \\ = n \left(\|\vec{AA'}\| \cos \theta_2 + \|\vec{A'C}\| \right) = 2nd \cos \theta_2 + n \|\vec{A'C}\|$$

Portanto, a diferença entre os caminhos óticos associados aos raios 1 e 2 é dada por:

$$[2] - [1] = 2nd \cos \theta_2.$$

Note que, pela simetria da figura, essa é também a diferença de caminho ótico entre os raios transmitidos 1' e 2'.

Exercício 4: "Mostre através de um cálculo explícito que a diferença de caminho ótico entre os raios 1' e 2' é dada por:

$$[2'] - [1'] = 2nd \cos \theta_2."$$

A igualdade entre as diferenças de caminho ótico entre dois raios refletidos consecutivos ($[2] - [1]$) e entre dois raios transmitidos consecutivos ($[2'] - [1']$) implica, a partir de nossa discussão anterior, que a diferença de fase entre os raios refletidos (1 e 2) e os transmitidos (1' e 2') seja a mesma. Logo, os máximos (mínimos) da intensidade refletida correspondem aos máximos (mínimos) da intensidade transmitida. Uma óbvia violação da conservação da energia!

Contudo, esqueçamos de considerar que quando uma onda é refletida na interface entre dois meios, pode ocorrer uma mudança de fase de π . Veremos posteriormente que, como consequência das condições de contorno aplicadas às equações de Maxwell, uma defasagem de π ocorre na reflexão de um raio de luz que passa de um meio menos refringente (o ar no nosso exemplo com $n_0=1$) para um meio mais refringente (a lâmina delgada com $n>1$). Consequentemente, a diferença de fase entre os raios 1 e 2 deve ser acrescida de um fator π , i.e.,

$$e^{\frac{2i\pi}{\lambda_0}([2]-[1])} \cdot e^{i\pi} = e^{\frac{2i\pi}{\lambda_0}([2]-[1] + \frac{\lambda_0}{2})} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda_0}(2nd \cos \theta_2 + \lambda_0/2)}$$

De forma que podemos interpretar a diferença de caminho ótico entre os raios 1 e 2 como:

$$[2] - [1] = 2nd \cos \theta_2 + \lambda_0/2.$$

Já a diferença de caminho ótico entre os demais raios refletidos pela lâmina delgada, 2 e 3, por exemplo, não deve ser acrescida de fator de $\lambda_0/2$, pois ambas as reflexões adicionais (em C e D) ocorrem de um meio mais refringente ($n>1$) para um meio menos refringente ($n_0=1$). Portanto, as contribuições dos demais raios refletidos $\{2, 3, 4, \dots\}$ diferem em seus caminhos óticos por:

$$[j+1] - [j] = 2n \cos \theta_j, \quad j \in \{2, 3, 4, \dots\}.$$

Por outro lado, as contribuições de dois raios transmitidos consecutivos diferem

sempre por duas reflexões adicionais. Por exemplo, os raios 1' e 2' diferem por reflexão em B e C. Portanto, a diferença de caminho ótico não precisa levar em conta a fase adicional de π , i.e.,

$$[(j+1)'] - [j'] = 2nd \cos \theta_2, \quad j \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

As expressões que encontramos para as diferenças de caminho que encontramos permitem que avaliemos a defasagem Δ , que corresponde ao produto do número de onda reduzido k_0 pela diferença de caminho ótico:

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \text{ Reflexão : } \Delta &= k_0 \left(2nd \cos \theta_2 + \frac{\lambda_0}{2} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(2nd \cos \theta_2 + \frac{\lambda_0}{2} \right) \\ &= \frac{4\pi}{\lambda_0} nd \cos \theta_2 + \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \text{ Transmissão : } \Delta &= k_0 2nd \cos \theta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2nd \cos \theta_2 \\ &= \frac{4\pi}{\lambda_0} nd \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Finalmente, usando que o termo de interferência depende da defasagem como $\cos \Delta$, concluímos, pela presença de um fator de π entre a defasagem da reflexão e transmissão, que um máximo (mínimo) de transmissão corresponde a um mínimo (máximo) de reflexão, em conformidade com a conservação de energia.

Em suma, concluímos:

* $2nd \cos \theta_2 = m \lambda_0, m \in \mathbb{N} \Rightarrow$ mínimo (máximo) de reflexão (transmissão)

* $2nd \cos \theta_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0, m \in \mathbb{N} \Rightarrow$ máximo (mínimo) de reflexão (transmissão)

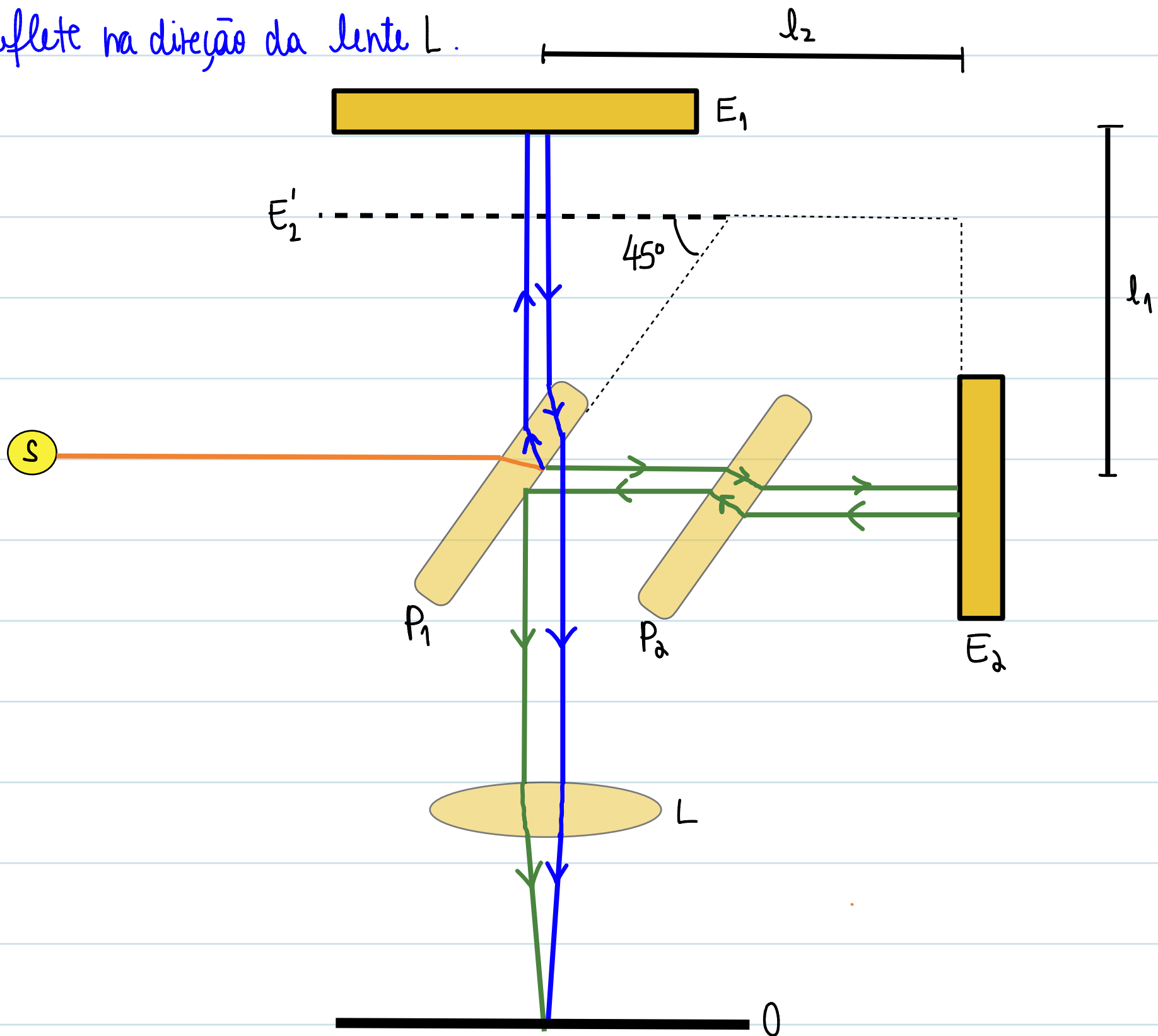
Exemplo 1: "Se tivermos um meio de espessura variável no ar, como numa lâmina de uma solução de água e sabão formada sobre um aro colocado na vertical, observaremos franjas escuras na luz (monocromática) de acordo com a espessura d do filme dada pela expressão acima. Por simplicidade, se tomarmos uma incidência normal, $\theta_1 \simeq \theta_2 \simeq 0$, temos para os mínimos de reflexão:

$$d = \frac{m \lambda_0}{2n} = \frac{m \lambda}{2}, m \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, se a luz incidente for branca, as franjas aparecerão em alturas diferentes. Como a luz refletida tem a cor complementar, temos um exemplo do típico fenômeno de interferência que ocorre em bolhas de sabão."

Exemplo 2: "No interferômetro de Michelson, a luz de uma fonte S é dividida em dois feixes perpendiculares por uma lâmina semiespelhada depositada sobre uma placa de vidro P_1 , a 45° do feixe incidente. O feixe refletido vai para um espelho E_1 , que o reflete de volta, atravessando P_1

e seguindo para a lente L . Já o feixe transmitido pela lâmina semiespelhada é refletido em um outro espelho E_2 , retornando à lâmina semiespelhada que o reflete na direção da lente L .



A placa P_2 , idêntica a P_1 mas não espelhada, é inserida entre P_1 e E_2 para

compensar a diferença de caminho ótico correspondente ao duplo atravessamento de P_1 pelo feixe que é refletido em E_1 . A lente L focaliza os dois feixes para observação no anteparo O .

Considerando E_2' a imagem especular de E_2 pela lâmina semiespelhada P_1 , as condições de interferência construtiva ou destrutiva são as mesmas que para uma lâmina de faces paralelas formada por E_1 e E_2' para o par de raios. Note que neste caso não ocorrem múltiplas reflexões. Como o raio que vai para E_1 é refletido na parede interna da camada espelhada e o raio que vai para E_2 , na parede externa, há uma defasagem adicional de π que deve ser considerada na diferença de caminhos óticos, assim como ocorreu para os raios 1 e 2. Portanto, a condição de interferência destrutiva (mínimos de reflexão) com $n=1$ é:

$$2d \cos \theta_m = m \lambda_0, \quad m \in \mathbb{N},$$

em que $d = |L_2 - L_1|$ é a diferença de tamanho dos braços do interferômetro e o ângulo θ_m é o ângulo com a normal dos espelhos E_1 e E_2' , que permite identificar os anéis escuros (franjas de interferência).

O interferômetro de Michelson foi desenvolvido por Albert Michelson em 1881, constituindo um dos instrumentos óticos mais utilizados por físicos e astrônomos para

medição de distância, espectroscopia de alta resolução, etc. Interferômetros de Michelson foram fundamentais em diversos experimentos de central importância para o desenvolvimento da Física, como o experimento de Michelson-Morley e o LIGO."