Eletromagnetismo II - 4300303 - 1/2

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 1° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Terceira Série de Exercícios

Exemplos do livro texto recomendados para estudo (não devem ser entregues)

10.2; 10.3; 10.4; 11.3; 11.4

Problemas do livro texto para serem entregues:

10.3; 10.4; 10.5; 10.8; 10.9 (completo); 10.10; 10.18; 11.5; 11.10

Estudo Dirigido (para ser entregue)

Neste estudo vamos rederivar as expressões para os campos elétrico e magnético produzidos por uma carga em movimento uniforme, usando uma formulação similar à utilizada por Oliver Heaviside na derivação original deste resultado (1888). Seguiremos a apresentação do livro de Richard Becker, "Electromagnetic Fields and Interations", Cap. DIII, seção 4. O interessante desta derivação é que não utiliza os potenciais de Lienard-Wiechert, que foram obtidos posteriormente. Consideremos inicialmente uma densidade de carga $\rho(\vec{r}, t)$, concentrada em um pequeno volume e se deslocando com velocidade constante $\vec{v}$. Então a densidade de corrente devido ao movimento das cagas é dado por

$$\vec{j} = \rho\vec{v}$$

Assim, as equações de Maxwell, ficam

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \rho \vec{v} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

a) Mostre que as equações $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ e $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$ são satisfeitas se

$$\vec{B} = \vec{F} \times \vec{E}$$

onde $\vec{F}$ é um vetor constante qualquer.

b) Substitua essa expressão para $\vec{B}$ na quarta equação de Maxwell utilizando a primeira, obtenha a relação

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + c^2 \left(\vec{F} \cdot \nabla\right) \vec{E} = \rho \left(\vec{v} - c^2 \vec{F}\right)$$

Portanto esta relação é satisfeita se $\vec{F} = \vec{v}/c^2$ e

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\left(\vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{E}; \qquad \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}$$

c) As equações para os potenciais são

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}; \qquad \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Substituindo $\vec{j} = \rho\vec{v}$ na equação para $\vec{A}$, com $\vec{v}$ constante, mostre que

$$\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c}\phi$$

d) Mostre que a solução $\vec{B} = \vec{v} \times \vec{E}/c^2$ é compatível com a relação entre os potenciais se a condição

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\,\vec{A} = 0$$

for utilizada, de forma que

$$\vec{E} = -\nabla\phi + \vec{\beta}\left(\vec{\beta} \cdot \nabla\phi\right); \qquad \vec{\beta} = -\frac{\vec{v}}{c^2} \times \nabla\phi; \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

e) O resultado do item c) implica em que todos os campos podem ser calculados se a equação de onda para ϕ for solucionada. Considere $\vec{v} = v\hat{e}_x$ e utilize novamente a condição de derivada convectiva nula, $d\phi/dt = 0$. Mostre então que a equação de onda para ϕ fica

$$\left(1 - \beta^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

f) Esta equação pode ser transformada na Equação de Poisson, no caso Eletrostático, $\nabla^2\phi = \rho/\epsilon_0$, fazendo a transformação de variáveis,

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad \eta = y; \qquad \zeta = z$$

então

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial \zeta^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho\left(\xi\sqrt{1-\beta^2}, \eta, \zeta\right)$$

cuja solução já sabemos da Eletrostática

$$\phi\left(\xi, \eta, \zeta\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho\left(\xi'\sqrt{1-\beta^2)}, \eta', \zeta'\right)}{\left[(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + (\zeta-\zeta')^2\right]^{1/2}} d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'$$

Faça a transformação inversa das variáveis e mostre que

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{\left[(x-x')^2 + (1-\beta^2)\left[(y-y')^2 + (z-z')^2\right]\right]^{1/2}};$$

$$d\tau' = dx'\,dy'\,dz'$$

g) Usando a geometria que adotamos na derivação do mesmo resultado em aula (veja figura), e supondo a carga na origem, isto $\rho(\vec{r}\,') = q\delta\left(\vec{r}\,'\right)$, mostre que

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)\,r^2 + \beta^2 x^2}}$$

Finalmente, notando que $x = r\cos\psi$, obtenha o resultado final

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r\sqrt{1-\beta^2 sen^2\psi}}$$

Problemas suplementares (não precisam ser entregues) para aprofundar o estudo para a terceira prova

1. Mostre que a parcela do campo magnético produzido por um partícula acelerada que só depende da aceleração $\vec{a}$ pode também ser escrito como

$$\vec{B}_a(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{c^2 s^3}\frac{\vec{R}}{R}\times\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-R\vec{\beta}\right)\times\vec{a}\right]\right\}\right]$$

2. Mostre que a expressão para o campo $\vec{B}$ pode também ser escrito como

$$\vec{B} = \frac{\vec{R}\times\vec{E}}{cR},$$

ou seja, o campo magnético é sempre perpendicular ao campo elétrico $\vec{E}$ e ao vetor $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q(t')$, onde $\vec{r}_q$ é calculado na posição retardada da partícula.

3. Calcule o vetor de Poynting para o campo produzido por uma carga elétrica em movimento uniforme. Faça um diagrama polar do vetor de Poynting para $\beta = 0; 0.6; 0.8$. Calcule a energia radiada através de uma esfera de raio R, centrada na carga em movimento. Use coordenadas polares com o eixo z na direção de $\vec{\beta}$ e, se as integrais resultantes forem muito complicadas, supondo $\beta \ll 1$.

4. Mostre que a expressão da parcela $\vec{E}_a$ do campo elétrico produzido por uma carga acelerada, que só depende da aceleração, é dada por uma carga acelerada, que só depende da aceleração, é dada por

$$\vec{E}_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{R} \times \left\{\left(\vec{R} - R\vec{\beta}\right) \times \vec{a}\right\}}{s^3}\right]_{t'}$$