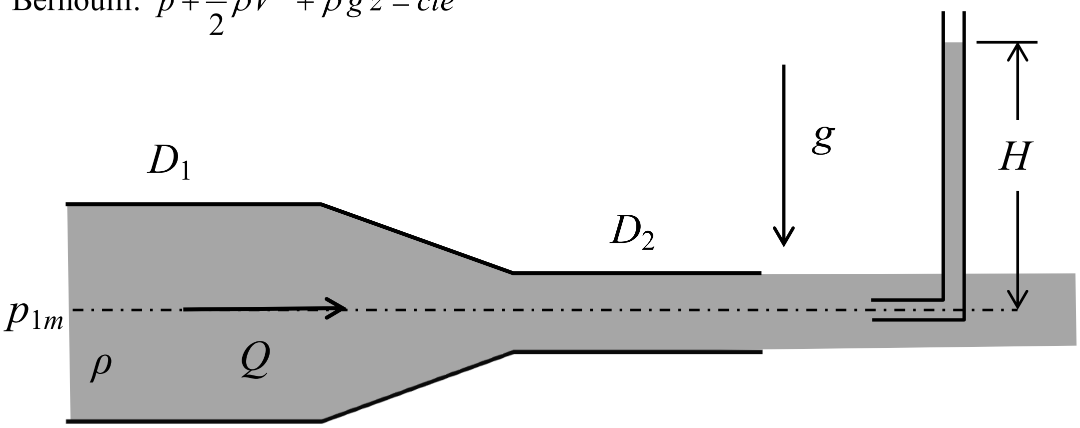
LABORATÓRIO E APLICAÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 2332)
NOÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 2333)
Gabarito Segunda Prova - 2015

1. (3 pontos) Na figura, a massa específica do líquido circulante no duto é ρ e o jato descarrega na pressão atmosférica, onde se localiza um tubo de estagnação. Se são conhecidos a pressão manométrica a montante p_{1m}, a aceleração gravitacional g e os diâmetros D_1 e D_2, calcular a altura H e a vazão volumétrica Q. Desprezar as perdas.

Bernoulli: $p+\frac{1}{2}\rho V^2+\rho g z = cte$



Solução:

Da equação de continuidade: $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V_2}=\frac{A_2}{A_1}=\beta^2$, onde $\beta=\frac{D_2}{D_1}$.

Da equação de Bernoulli para a linha de corrente central, com a mesma cota, entre 1 e 2 (jato de saída):

$$p_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_a+\frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad \Rightarrow \quad p_{1m}=p_1-p_a=\frac{1}{2}\rho V_2^2\left(1-\beta^4\right)$$

$$V_2=\left[\frac{2\,p_{1m}}{\rho\left(1-\beta^4\right)}\right]^{1/2}$$

$$Q=\frac{\pi}{4}D_2^2 V_2$$

Da equação de Bernoulli para o jato de saída, na linha de corrente no tubo de estagnação:

$$p_a+\frac{1}{2}\rho V_2^2 = p_e \quad \Rightarrow \quad p_e-p_a=\frac{1}{2}\rho V_2^2$$

Da relação hidrostática no tubo de estagnação:

$$p_a+\rho g H = p_e \quad \Rightarrow \quad p_e-p_a=\rho g H$$

Eliminando p_e-p_a das relações anteriores e depois eliminando V_2, resulta:

$$\rho g H=\frac{1}{2}\rho V_2^2=\frac{p_{1m}}{1-\beta^4} \quad \Rightarrow \quad H=\left[\frac{p_{1m}}{\rho g\left(1-\beta^4\right)}\right]^{1/2}$$

2. (3 pontos) A força de arrasto F em um corpo imerso em uma corrente uniforme de fluido de massa específica ρ, viscosidade μ e velocidade V depende destas variáveis e do seu comprimento característico L.

a) Achar um conjunto de parâmetros adimensionais e a relação funcional que descreve o fenômeno.
b) Sabendo que a força é independente da viscosidade para velocidades grandes, achar a relação funcional válida para esta condição.
c) Sabendo que a força é independente da massa específica para velocidades pequenas, achar a relação funcional válida para esta condição.
d) Baseado nos resultados anteriores, graficar em forma qualitativa a relação entre força e velocidade, permanecendo o resto das variáveis fixas.

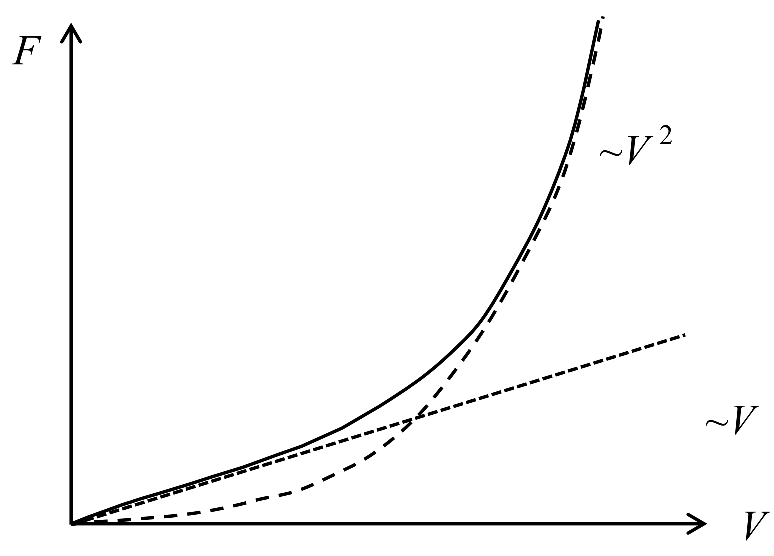
Solução:

a) Temos 5 variáveis dimensionais e 3 dimensões, de maneira que existem dois parâmetros adimensionais, que são $C_F = \dfrac{F}{\rho V^2 L^2}$ e $Re = \dfrac{\rho V L}{\mu}$. A relação funcional resulta, em forma implícita, $\phi\left(\dfrac{F}{\rho V^2 L^2}, \dfrac{\rho V L}{\mu}\right) = 0$.

b) Para $V >> 1$, F é independente de μ, de maneira que $\dfrac{F}{\rho V^2 L^2} \cong cte = C_\rho$, onde C_ρ é uma constante adimensional. Assim, resulta $F \cong \left(C_\rho \, \rho L^2\right) V^2$ (quadrática).

c) Para $V << 1$, F é independente de ρ. Eliminando a massa específica entre os dois parâmetros adimensionais, resulta $\Pi = C_F \, Re = \dfrac{F}{\rho V^2 L^2} \dfrac{\rho V L}{\mu} = \dfrac{F}{\mu V L}$, de maneira que $\dfrac{F}{\mu V L} \cong cte = C_\mu$, onde C_μ é uma constante adimensional. Assim, resulta $F \cong \left(C_\mu \, \mu L\right) V$ (linear).

d) Em forma qualitativa, a relação funcional resulta:



3. (4 pontos) Em uma bomba centrífuga a potência mecânica por unidade de vazão mássica gH (onde g é a aceleração gravitacional e H o incremento da altura de energia) depende da vazão volumétrica Q, velocidade angular N e diâmetro D. Experimentalmente foi determinada para um modelo com parâmetros g_m, N_m e D_m a seguinte relação entre altura de energia e vazão:

$$H_m = A_m - B_m\, Q_m^2$$

onde A_m e B_m são constantes dimensionais de ajuste. Também foi medida a vazão correspondente ao ponto de operação de máxima eficiência (*best efficiency point* ou *bep*) $\left(Q_m\right)_{bep}$.

a) Definir um conjunto de parámetros adimensionais dos quais depende o fenômeno.
b) Baseados na relação dimensional para o modelo, achar a relação universal entre os parámetros adimensionais para todos os problemas semelhantes.
c) Calcular a relação funcional da altura H_p em função da vazão Q_p em um protótipo com parâmetros g_p, N_p e D_p.
d) Determinar a vazão de operação de máxima eficiência para o protótipo $\left(Q_p\right)_{bep}$.

Onde corresponda, expressar os resultados em função dos fatores de escala $k_\varphi = \dfrac{\varphi_m}{\varphi_p}$.

Solução:

a) Temos 4 variáveis dimensionais e 2 dimensões básicas, de maneira que resultarão 2 parâmetros adimensionais, que podem ser o coeficiente de altura $C_H = \dfrac{g\,H}{N^2\,D^2}$ e o coeficiente de vazão $C_Q = \dfrac{Q}{N\,D^3}$. A relação entre parâmetros adimensionais pode ser, em forma explícita:

$$C_H = C_H\left(C_Q\right)$$

b) A condição de semelhança entre modelo e qualquer problema semelhante é:

$$C_H = \frac{g_m\,H_m}{N_m^2\,D_m^2} \quad\Rightarrow\quad H_m = C_H\,\frac{N_m^2\,D_m^2}{g_m}$$

$$C_Q = \frac{Q_m}{N_m\,D_m^3} \quad\Rightarrow\quad Q_m = C_Q\,N_m\,D_m^3$$

Substituindo na relação para o modelo:

$$C_H\,\frac{N_m^2\,D_m^2}{g_m} = A_m - B_m\left(C_Q\,N_m\,D_m^3\right)^2 \quad\Rightarrow\quad C_H = \frac{A_m\,g_m}{N_m^2\,D_m^2} - B_m\;g_m\,D_m^4\,C_Q^2$$

$$C_H = A - B\,C_Q^2$$

onde $A = \dfrac{A_m\,g_m}{N_m^2\,D_m^2}$ e $B = B_m\;g_m\,D_m^4$ são constantes adimensionais universais.

c) Da igualdade dos números adimensionais para o modelo e protótipo:

$$\frac{g_m\,H_m}{N_m^2\,D_m^2} = \frac{g_p\,H_p}{N_p^2\,D_p^2} \quad\Rightarrow\quad H_m = k_N^2\,k_D^2\,k_g^{-1}\,H_p$$

$$\frac{Q_m}{N_m\, D_m^3} = \frac{Q_p}{N_p\, D_p^3} \quad \Rightarrow \quad Q_m = k_N\, k_D^3\, Q_p$$

Substituindo na curva característica do modelo, resulta:

$$H_p\, k_N^2\, k_D^2\, k_g^{-1} = A_m - B_m \left(k_N\, k_D^3\, Q_p\right)^2 \quad \Rightarrow \quad H_p = k_N^{-2}\, k_D^{-2}\, k_g\, A_m - k_D^4\, k_g\, B_m\, Q_p^2$$

$$H_p = A_p - B_p\, Q_p^2$$

onde $A_p = k_N^{-2}\, k_D^{-2}\, k_g\, A_m$ e $B_p = k_D^4\, k_g\, B_m$.

a) Da igualdade do C_Q no *bep*, resulta:

$$\left(Q_p\right)_{bep} = k_N^{-1}\, k_D^{-3} \left(Q_m\right)_{bep}$$

IMPORTANTE:

- Escrever de maneira legível.
- Anteceder as expressões matemáticas com um raciocínio ou com uma explicação do que vai ser feito. NÃO SERÃO ACEITAS EXPRESSÕES MATEMÁTICAS SEM UM RACIOCÍNIO!