Análise dimensional e semelhança

J. L. Baliño

Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula

Sumário

Introdução

- Equações de conservação em forma diferencial são muito complexas (não lineares) para serem resolvidas de maneira analítica. A solução obtida pode não ser única.
- Necessidade de experimentos reais ou numéricos através da Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD ou *Computational Fluid Dynamics*) para obter soluções.
- Necessidade de uma profunda inter-relação entre experimento e teoria para explicar satisfatoriamente um problema de Mecânica dos Fluidos.
- Necessidade de apresentar os resultados de uma maneira sintética e elegante.
- Análise dimensional surge como ferramenta natural em diferentes áreas da Ciência.

Metodologia

- Análise dimensional: método para reduzir o número de variáveis experimentais que afetam um dado fenômeno físico, através de uma técnica de compactação.
- Se um fenômeno físico depende de n variáveis *dimensionais*, o problema pode ser reduzido a k variáveis *adimensionais*, em que a redução $j = n - k = 1,\ 2,\ 3$ (ou 4), dependendo da complexidade do problema; geralmente $n - k$ é igual ao número de dimensões básicas (ou fundamentais) que regem o problema; elas podem ser massa, comprimento, tempo e temperatura (sistema $MLT\theta$) (poderia ser acrescentada a corrente).
- Benefícios:
  - Economía de tempo de dinheiro em experimentos, através de um planejamento inteligente.
  - Obtenção das leis de escala entre modelo e protótipo (teoria de semelhança).

Exemplo

Vamos supor que a força F em um corpo imerso em uma corrente de fluido de massa específica ρ e viscosidade μ depende destas variáveis e de um comprimento característico l e da velocidade da corrente V:

$$F = F\left(l,\, V,\, \rho,\, \mu\right)$$

Para ter 10 pontos representativos para cada variável no hiper-espaço de variáveis independentes, precisariamos 10^4 experimentos. No entanto, podemos demonstrar que a relação anterior é equivalente a seguinte forma adimensional:

$$C_F = C_F\left(Re\right) \quad ; \quad C_F = \frac{F}{\rho\, V^2\, l^2} \quad ; \quad Re = \frac{\rho\, V\, l}{\mu}$$

onde C_F é o coeficiente de força adimensional e Re é o número de Reynolds. Desta maneira, só precisamos 10 experimentos para ter a mesma informação.

Teorema Pi de Buckingham (1914)

"Se um processo físico satisfaz o princípio de homogeneidade dimensional e envolve n variáveis dimensionais, ele pode ser reduzido a uma relação entre apenas k variáveis adimensionais ou Πs. A redução $j = n - k$ é igual ao número máximo de variáveis que no formam um Π entre elas e é sempre menor ou igual ao número de dimensões que descrevem as variáveis."

Receita teorema Pi

1. Listar e contar as n variáveis envolvidas no problema. Neste caso, $n = 5$.
2. Listar as dimensões de cada variável de acordo com um sistema (por exemplo, $MLT\theta$):

Variáveis	F	l	V	ρ	μ
Dimensões	$\{MLT^{-2}\}$	$\{L\}$	$\{LT^{-1}\}$	$\{ML^{-}3\}$	$\{ML^{-1}T^{-1}\}$

3. Encontrar j. Como existem três dimensões básicas (massa, comprimento e tempo) que descrevem o problema, deve ser $j = 3$ e $k = n - j = 2$, isto é, existem dois parâmetros adimensionais.
4. Selecionar $j = 3$ variáveis repetitivas que não formam um Π entre elas. O grupo l, V e ρ funcionam pois só V contém o tempo e só ρ contém a massa.

Receita teorema Pi (continuação)

5. Montar a matriz de dimensões e acrescentar uma variável adicional para encontrar os parâmetros Π. Acrescentando F:

Variáveis / Dimensões	l	V	ρ	F
M	0	0	1	1
L	1	1	-3	1
T	0	-1	0	-2

$$\Pi_1 = l^a\, V^b\, \rho^c\, F$$

Como Π_1 é adimensional, deve ser:

$$0\,a + 0\,b + 1\,c + 1 = 0$$
$$1\,a + 1\,b + (-3)\,c + 1 = 0$$
$$0\,a + (-1)\,b + 0\,c + (-2) = 0$$

Daqui resulta $a = -2$, $b = -2$, $c = -1$ e $\Pi_1 = \dfrac{F}{\rho\, l^2\, V^2}$.

Receita teorema Pi (continuação)

6. Acrescentando μ:

Variáveis / Dimensões	l	V	ρ	μ
M	0	0	1	1
L	1	1	-3	-1
T	0	-1	0	-1

$$\Pi_2 = l^a\, V^b\, \rho^c\, \mu$$

$$\begin{aligned} 0\,a + 0\,b + 1\,c + 1 &= 0 \\ 1\,a + 1\,b + (-3)\,c + (-1) &= 0 \\ 0\,a + (-1)\,b + 0\,c + (-1) &= 0 \end{aligned}$$

Daqui resulta $a = -1$, $b = -1$, $c = -1$ e $\Pi_2 = \dfrac{\mu}{\rho\, l\, V} = \dfrac{1}{Re}$.

7. Resulta finalmente $\Pi_1 = \Pi_1\,(\Pi_2)$ ou $\phi\,(\Pi_1,\, \Pi_2) = 0$.

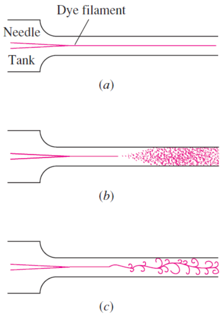
Receita teorema Pi (comentários)

- A Física do problema está na escolha das variáveis. Se faltarem ou sobrarem, os resultados não serão úteis.
- O teorema Π indica *o número* de variáveis adimensionais e uma receita para obter um conjunto delas.
- É preferível escolher variáveis repetitivas que sejam variáveis de controle, para que a adimensionalização seja com variáveis independentes.
- É preferível acrescentar as variáveis dependentes, para que elas apareçam no numerador dos números Πs.
- Uma vez conhecidos alguns números adimensionais importantes na Mecânica dos Fluidos, *não existe necessidade* de utilizar o teorema Pi de Buckingham.
- Existem outros métodos para achar os Πs (Ipsen, 1960).

Número de Reynolds

$$Re_l = \frac{\rho\, V\, l}{\mu}$$

O número de Reynolds (Osborne Reynolds, 1842-1912) governa a grande maioria dos fenômenos e indica a importância relativa entre as forças de inércia e as forças viscosas. Determina a transição entre o regime laminar e o regime turbulento em todos os escoamentos.

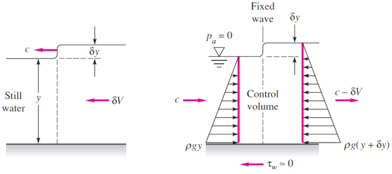


(a) Regime laminar.
(b) Regime turbulento.
(c) Regime turbulento, foto instantânea.
$(Re_D)_{cr} \cong 2,3 \times 10^3$ para dutos comerciais de diâmetro D.

Número de Froude

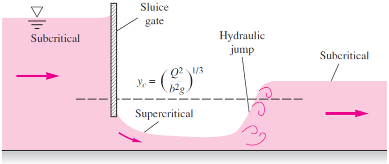
$$Fr = \frac{V^2}{g\, l}$$

O número de Froude (William Froude, 1810-1879) tem efeito dominante em escoamentos com superfícies livres e indica a importância relativa entre as forças de inércia e as forças gravitacionais. Exemplos: resistência em navios, ondas de superfície, canais abertos.



(a) (b)

$$c_0^2 = g\, y$$

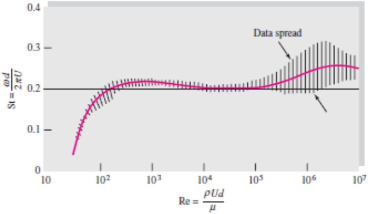


Número de Strouhal

$$St = \frac{\omega\, l}{V}$$

onde $\omega = 2\,\pi\,f$ é uma frequência angular característica. O número de Strouhal (Vincenc Strouhal, 1850-1922) tem efeito dominante em escoamentos transientes com tempos característicos e indica a importância relativa entre as forças de aceleração local e aceleração convectiva. Exemplos: turbomáquinas, desprendimento de vórtices, interação fluido-estrutura.

(a)

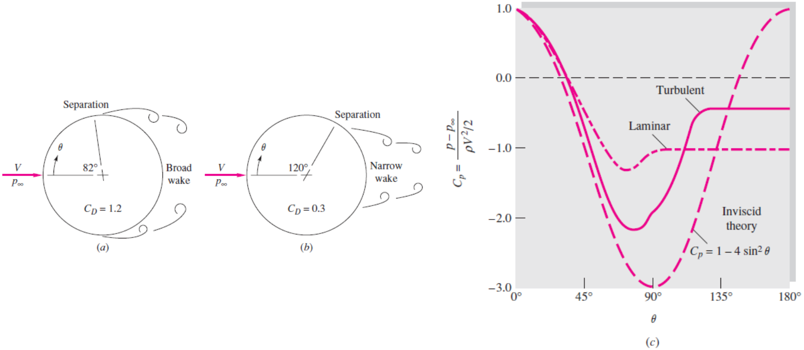


(b)

Número de Euler

$$Eu = \frac{p - p_a}{\rho V^2}$$

onde p_a é uma pressão característica. O número de Euler (Leonhard Euler, 1707-1783) é a adimensionalização natural da pressão e tem efeito dominante em escoamentos próximos à cavitação.



Condição de semelhança

- Considerando um modelo e um protótipo geometricamente semelhantes, as condições de escoamento em um teste de modelo são completamente semelhantes às do protótipo se todos os parâmetros adimensionais relevantes têm os mesmos valores correspondentes para o modelo e protótipo.
- Conhecida $\phi\left(\Pi_1,\ \Pi_2, ...,\ \Pi_k\right)$, deve ser $\left(\Pi_i\right)_m = \left(\Pi_i\right)_p$, para $i = 1, ..., k$.
- Nem sempre é possível satisfazer a igualdade de todos os parâmetros adimensionais; nestes casos, deve ser analisada a importância dos diferentes parâmetros.
- A condição de semelhança estabelece os fatores correspondentes às diferentes variáveis. Define-se o fator de escala da variável φ como $k_\varphi = \dfrac{\varphi_m}{\varphi_p}$.