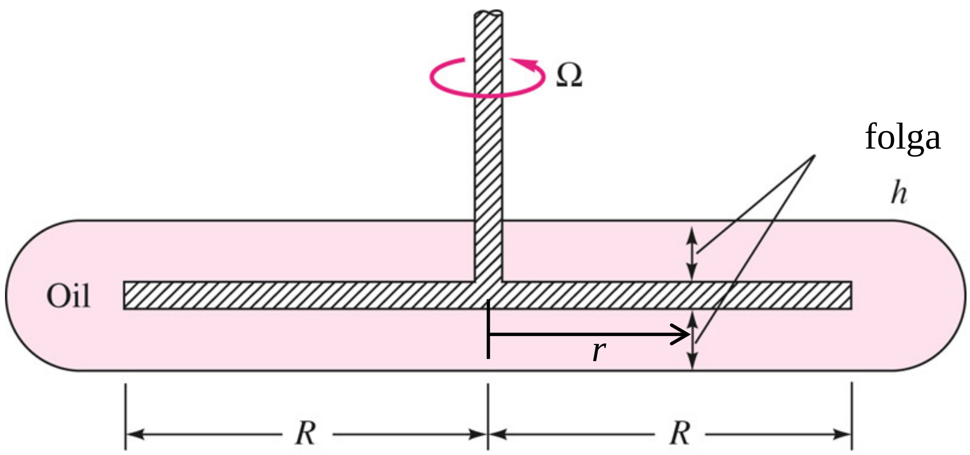
MECÂNICA DOS FLUIDOS: NOÇÕES, LABORATÓRIO E APLICAÇÕES
(PME 3332)
Gabarito Primeira Prova - 2016

1. (4 pontos) Um disco de raio R rota a uma velocidade angular constante Ω no interior de um reservatório em forma de disco cheio com óleo de viscosidade μ com uma folga h, como mostra a figura. Considerando um perfil linear de velocidade e desprezando a tensão de cisalhamento nas bordas externas do disco:

a) Determinar a tensão de cisalhamento em uma superfície em função da posição radial r.
b) Determinar o elemento de torque dT em uma superfície gerada por um anel de raio r e espessura dr.
c) Calcular o torque total viscoso T e a potência W no disco.

Lei de viscosidade de Newton: $\tau = \mu \dfrac{du}{dy}$.



Solução:

a) A velocidade tangencial da superfície varia linearmente com a posição radial $V(r) = \Omega r$, enquanto o reservatório está fixo; a tensão de cisalhamento em cada superfície resulta $\tau = \mu \dfrac{\Omega r}{h}$.
b) O elemento de torque resulta duas vezes (duas superfícies) o produto da tensão de cisalhamento vezes o braço de alavanca r vezes o elemento de área $dA = 2\pi r\, dr$:

$$dT = 2 \times \mu \frac{\Omega r}{h} \times r \times 2\pi r\, dr = \frac{4\pi \mu \Omega}{h} r^3\, dr$$

c) O torque total resulta a soma dos elementos de torque:

$$T = \frac{4\pi \mu \Omega}{h} \int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi \mu \Omega R^4}{h}$$

A potência resulta $W = T\,\Omega = \dfrac{\pi \mu \Omega^2 R^4}{h}$

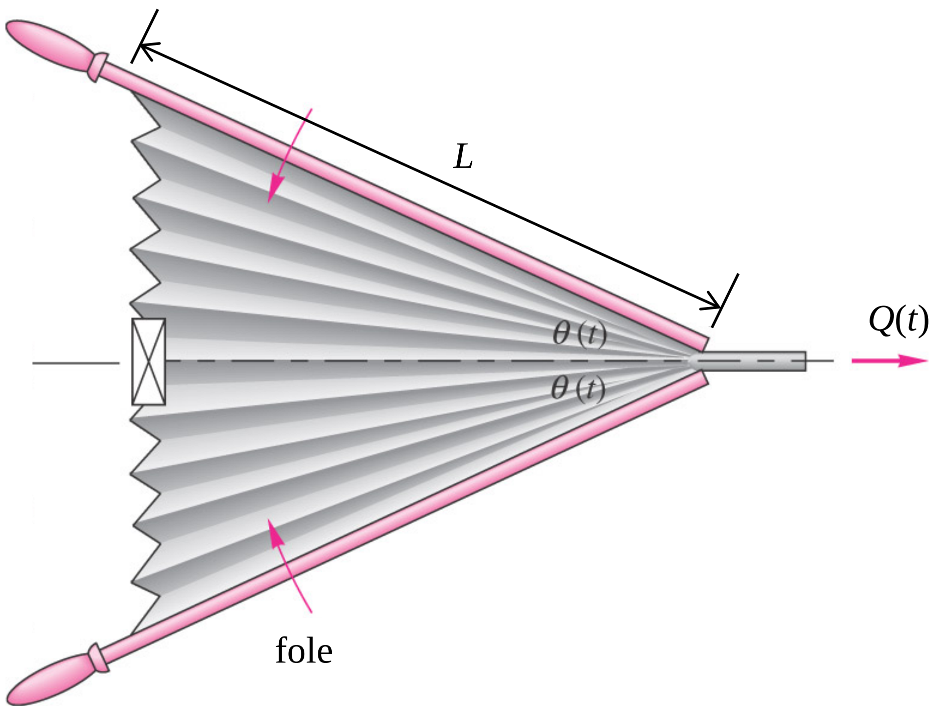
2. (4 pontos) Um fole pode ser modelado como um volume em forma de cunha, como na figura. A válvula de retenção do lado esquerdo (pregueado) fica fechada durante o sopro. Se b é a largura do fole, normal ao papel, e L é o comprimento do fole:

a) Definir um volume de controle para aplicar a conservação da massa.

b) Supondo que a superfície do fole forma aproximadamente um arco de circunferência no movimento e que a largura do jato de saída é muito pequena, deduzir uma expressão para a vazão volumétrica $Q(t)$ na saída, em função da velocidade angular $\dfrac{d\theta}{dt}$ durante o sopro.

Lei de conservação da massa em forma integral:

$$0 = \int_{\upsilon} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\upsilon + \int_A \rho \left(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA \quad \text{ou} \quad 0 = \frac{d}{dt}\int_{\upsilon} \rho \, d\upsilon + \int_A \rho \left(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA$$



Solução:

a) Escolhemos um volume de controle deformável nas superfícies superior e inferior de largura do fole L e fixo no arco de superfície do fole e na saída; desta maneira, o volume de controle se deforma com o movimento do fole.

b) Da equação de conservação da massa para um volume de controle deformável e escoamento incompressível, podemos escrever:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\upsilon} d\upsilon + \int_A \left(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA$$

Só existe fluxo na superfície do jato de saída, com $\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{V}$; assim, resulta:

$$0 = \frac{d\upsilon}{dt} + Q$$

O volume resulta $\upsilon = \theta b L^2$; a variação do volume resulta $\dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt} b L^2$; substituindo, resulta finalmente:

$$Q = -b L^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Observação: se tivéssemos escolhido um volume de controle fixo nas superfícies de largura do fole, a conservação da massa resulta:

$$0 = \int_A (\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}}) dA$$

Além do fluxo na superfície de saída Q existirão fluxos nas superfícies de largura do fole; na superfície superior, a velocidade tangencial resulta $V(x) = \dfrac{d\theta}{dt} x$, onde x é a coordenada ao longo da superfície de largura do fole. O fluxo na superfície superior resultará $b \dfrac{d\theta}{dt} \int_0^L x\, dx = \dfrac{1}{2} b L^2 \dfrac{d\theta}{dt}$. Na superfície inferior teremos um fluxo igual. Substituindo, resulta finalmente:

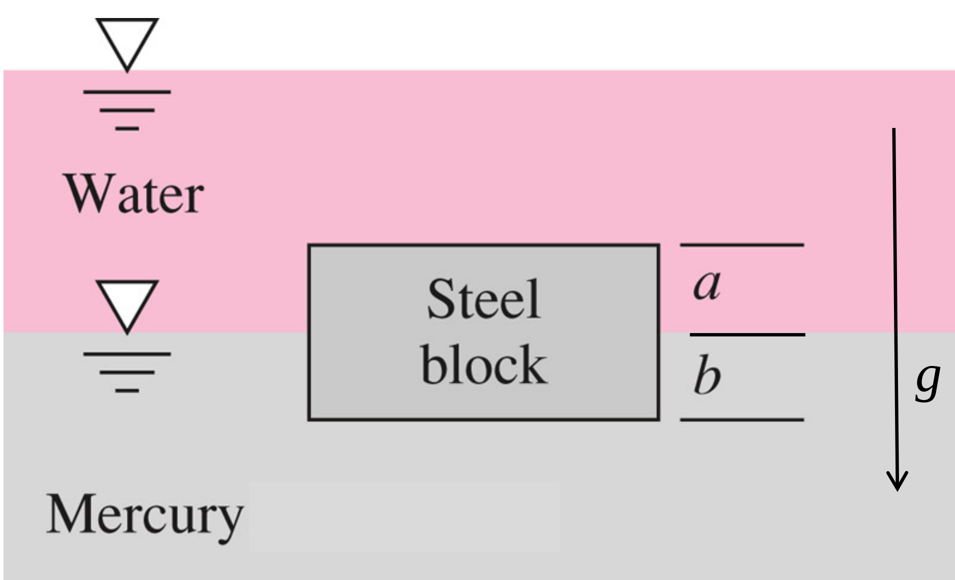
$\dfrac{1}{2} b L^2 \dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{2} b L^2 \dfrac{d\theta}{dt} + Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = -b L^2 \dfrac{d\theta}{dt}$; o resultado coincide com o anterior.

3. (2 pontos) Um bloco uniforme de aço, de massa específica ρ_s, flutuará em uma interface mercúrio-água (de massas específicas respectivamente ρ_m e ρ_w), como mostra a figura:

a) Determinar qual é a razão entre as distâncias $\dfrac{a}{b}$ para essa condição.

b) Supondo que os fluidos e o material do bloco sejam diferentes, que condições devem satisfazer as correspondentes massas especificas para que o bloco fique em equilíbrio na interface entre os fluidos?

Lei de Stevin: $p + \rho g z = cte$



Solução:

a) O peso do bloco de aço é equilibrado pelo empuxo. Se A é a área do bloco, um balanço de forças resulta:

$$\rho_s\, g\, A(a+b) = \rho_w\, g\, A a + \rho_m\, g\, A b \quad \Rightarrow \quad a+b = \frac{\rho_w}{\rho_s}a + \frac{\rho_m}{\rho_s}b \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{\dfrac{\rho_m}{\rho_s}-1}{1-\dfrac{\rho_w}{\rho_s}}$$

b) Para que as camadas de líquidos sejam estáveis, deve ser a massa específica do líquido inferior maior que a do líquido superior ($\rho_m > \rho_w$); da solução anterior, vemos que deve ser também a massa específica do líquido inferior maior que a do bloco ($\rho_m > \rho_s$), enquanto a massa específica do líquido superior deve ser menor que a do bloco ($\rho_w < \rho_s$); essas condições são satisfeitas para os materiais do problema. Desta maneira, deve ser $\rho_w < \rho_s < \rho_m$.