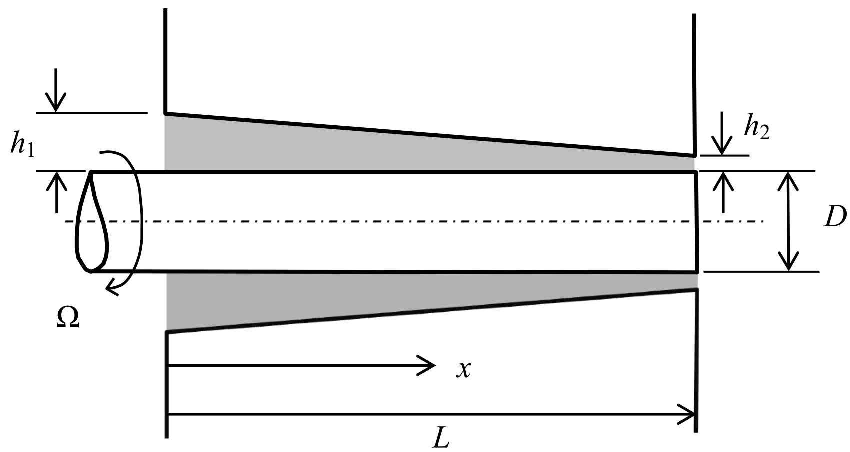
LABORATÓRIO E APLICAÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 2332)
NOÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS (PME 2333)
Gabarito Primeira Prova - 2015

1. (3 pontos) Um mancal rotatório de diâmetro D rota com velocidade angular constante Ω. Devido a uma defeito no processo de usinagem, a superfície exterior fixa varía sua espessura na direção axial de manera linear entre os valores h_1 e h_2 ao longo do comprimento L, como mostra a figura. Se a espessura está preenchida com um líquido de viscosidade μ, determinar o torque T e a potência W no mancal.

Lei de viscosidade de Newton: $\tau = \mu \dfrac{du}{dy}$

Ajuda para o cálculo: $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\,x} = \frac{1}{b}\ln(a+b\,x) + cte$



Solução:
A tensão de cisalhamento (na direção tangencial) resulta:

$$\tau = \mu \frac{\Omega D}{2\,h(x)}$$

onde $h(x) = h_1 + \dfrac{h_2 - h_1}{L}x = h_1 + m\,x$ é a espessura local, e $m = \dfrac{h_2 - h_1}{L}$. O elemento de torque dT resulta o produto da tensão de cisalhamento vezes o elemento de área vezes o braço de alavanca:

$$dT = \tau\,(\pi\,D\,dx)\frac{D}{2} = \frac{\pi}{4}\frac{\mu\,\Omega\,D^3}{h(x)}\,dx = \frac{\pi}{4}\mu\,\Omega\,D^3\,\frac{dx}{h_1 + m\,x}$$

Integrando, o torque resulta:

$$T = \frac{\pi}{4}\mu\,\Omega\,D^3\int_0^L \frac{dx}{h_1 + m\,x} = \frac{\pi}{4}\mu\,\Omega\,D^3\left[\frac{1}{m}\ln(h_1 + m\,x)\right]\Bigg|_0^L = \frac{\pi}{4}\mu\,\Omega\,D^3\,\frac{1}{m}\ln\left(\frac{h_1 + m\,L}{h_1}\right)$$

Como $h_1 + m\,L = h_2$, resulta finalmente:

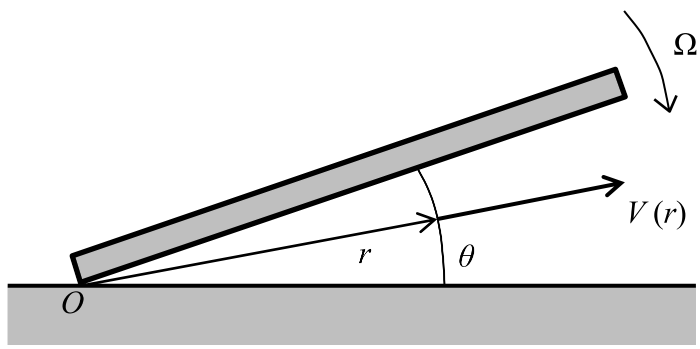
$$T = \frac{\pi}{4}\frac{\mu\,\Omega\,D^3\,L}{h_2 - h_1}\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = \frac{\pi}{4}\frac{\mu\,\Omega\,D^3\,L}{h_1 - h_2}\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$

A potência resulta:

$$W = \Omega T = \frac{\pi}{4} \frac{\mu \Omega^2 D^3 L}{h_1 - h_2} \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$

2. (3 pontos) Uma placa plana está articulada no ponto O a uma superfície horizontal. A placa articulada forma em um instante de tempo um ângulo θ e rota com uma velocidade angular $\Omega = -\frac{d\theta}{dt}$ na direção horária, como mostrado na figura, espremendo um fluido incompressível entre as duas superfícies. Supondo que o problema é bi-dimensional, definir um volume de controle conveniente e determinar a velocidade média na direção radial $V(r)$ em função da posição radial.

Conservação da massa: $0 = \int_\upsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} d\upsilon + \int_A \rho \left(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA$ ou $0 = \frac{d}{dt}\int_\upsilon \rho \, d\upsilon + \int_A \rho \left(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA$



Solução:
Escolhemos o volume de controle fixo do líquido na posição radial até r. Como o escoamento é incompressível, resulta:

$$0 = \int_A \left(\boldsymbol{V}.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA$$

O fluxo na superfície (arco em r) por unidade de comprimento na direção normal ao papel resulta $Q_{out} = V(r) r\,\theta$ (positivo). Para calcular o fluxo na superfície superior, vemos que:

$\boldsymbol{V} = -\Omega\, r\, \boldsymbol{i}_\theta$, $\breve{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{i}_\theta$, de maneira que o elemento de vazão volumétrica por unidade de comprimento na direção normal ao papel resulta $dQ = -\Omega\, r\, dr$ (negativo pois é entrante). Integrando, a vazão entrante resulta $Q = -\int_0^r \Omega\, r\, dr = -\frac{1}{2}\Omega\, r^2$. Como $Q_{out} + Q = 0$, resulta:

$$V(r) r\,\theta = \frac{1}{2}\Omega\, r^2 \quad \Rightarrow \quad V(r) = \frac{1}{2}\frac{\Omega\, r}{\theta}$$

Se tivessemos escolhido um volume de controle que se deforma com a superfície superior, a conservação da massa resulta:

$$0 = \frac{d\upsilon}{dt} + \int_A \left(\boldsymbol{V}_r.\breve{\boldsymbol{n}}\right) dA$$

Como a superfície de controle (arco em r) não se deforma, o fluxo resulta o mesmo do caso anterior, $Q_{out} = V(r) r\,\theta$. Por otra parte, a variação do volume por unidade de comprimento na direção norma ao papel resulta $d\upsilon = -\frac{1}{2}(\Omega\, r\, dt)r = -\frac{1}{2}\Omega\, r^2\, dt$, de maneira que $\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{1}{2}\Omega\, r^2$ e obtemos o mesmo resultado anterior.

3. (4 pontos) Um tanque cilíndrico vertical de raio R e altura H está preenchido por um líquido de massa específica ρ até um nível αH ($0 < \alpha < 1$) e depois por outro líquido de massa específica $\rho' < \rho$ desde o nível anterior até o topo, como mostra a figura. Seguidamente o tanque é girado em torno do eixo central aumentando a velocidade angular gradualmente até chegar a uma velocidade angular Ω com uma condição de rotação de sólido rígido. Sabendo que todo o líquido de massa específica ρ' é derramado quando o nível mínimo da interfase (ponto P) chega ao fundo do tanque:

a) Desenhar um esquema desta situação e determinar os valores da fração α e da velocidade angular Ω nesta condição de referência.

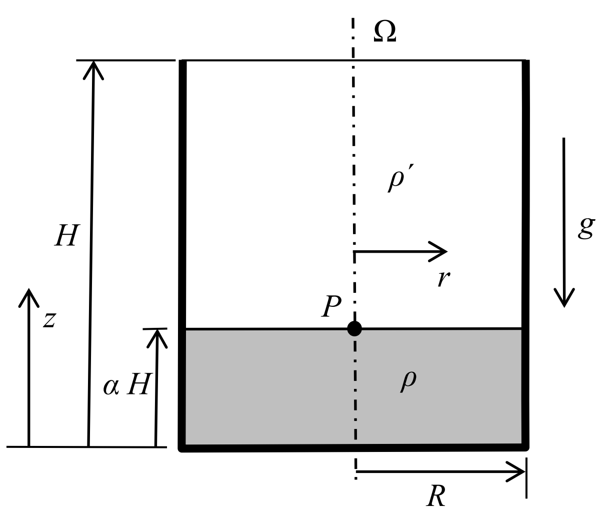
b) Mantendo fixo o valor de α da condição de referência, desenhar esquemas qualitativos para explicar o que acontece quando a velocidade angular é maior ou menor que o valor de referência. Em particular, explicar se os líquidos são derramados e o que acontece com a interfase e/ou a superfície livre.

c) Mantendo fixo o valor de Ω da condição de referência, desenhar esquemas qualitativos para explicar o que acontece quando a fração é maior ou menor que o valor de referência. Em particular, explicar se os líquidos são derramados e o que acontece com a interfase e/ou a superfície livre.

Dica: para a condição de referência, o volume de líquido de massa específica ρ permanece constante nas condições inicial e final.

Distribuição de pressão, rotação de sólido rígido: $p - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 + \rho g z = cte$

Volume υ do sólido de revolução da curva $z = z(r) \geq 0$ ao redor do eixo z, entre a e $b > a$: $\upsilon = 2\pi\int_a^b z(r) r\, dr$.



Solução:

a) Na condição em que todo o líquido da camada superior é derramado, a superfície do líquido de massa específica ρ trepa até a altura H na posição R e se encontra no fundo do tanque (altura zero) para $r = 0$. Para estes dois pontos com a mesma pressão, resulta:

$$p_i - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 R^2 + \rho g H = p_i \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{(2gH)^{1/2}}{R}$$

Para determinar α, sabemos que o volume de líquido da camada inferior permanece constante nas condições inicial e final. O volume na condição inicial vale $\upsilon = \pi R^2 \alpha H$, enquanto o volume na condição final pode ser calculado aplicando a distribuição de pressão na superfície entre o fundo do tanque e uma posição qualquer na superfície:

$$p_i = p_i - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 + \rho g z \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\Omega^2 r^2}{2g}$$

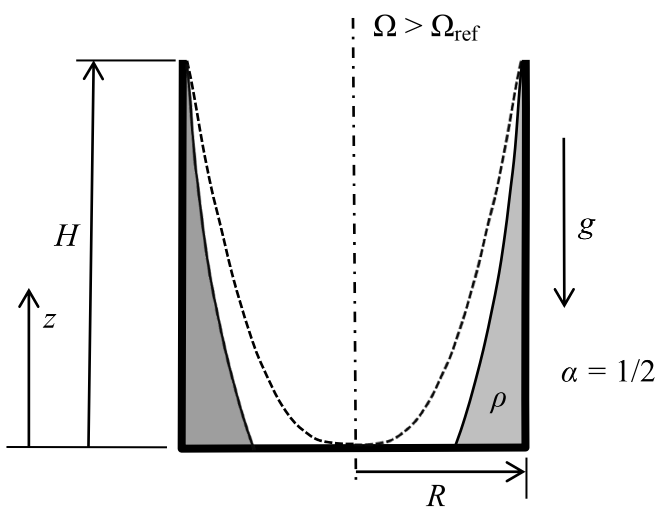
Substituindo Ω, obtemos $z = H\dfrac{r^2}{R^2}$. O volume no estado final resulta:

$$\upsilon = 2\pi\int_0^R z(r) r\, dr = 2\pi \frac{H}{R^2}\int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi}{2} H R^2$$

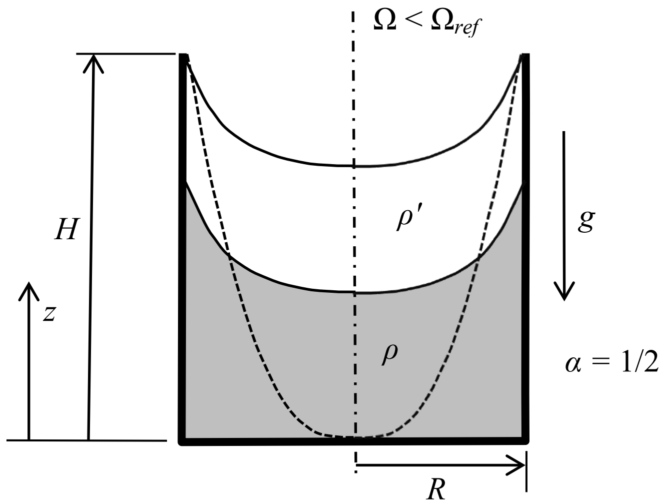
Igualando os volumes, resulta $\pi R^2 \alpha H = \dfrac{\pi}{2} R^2 H \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{1}{2}$.

b) Mantendo fixo o valor de α da condição de referência, variando a velocidade angular variamos a inclinação para a mesma posição radial:

- Se a velocidade angular estiver acima do valor de referência, será derramado todo o líquido da camada superior e parte do líquido da camada inferior. A superfície livre terá um raio de contato no fundo do tanque e o círculo dentro desse raio de contato no fundo do tanque estará seco (graficamos a condição de referência em linha pontilhada).

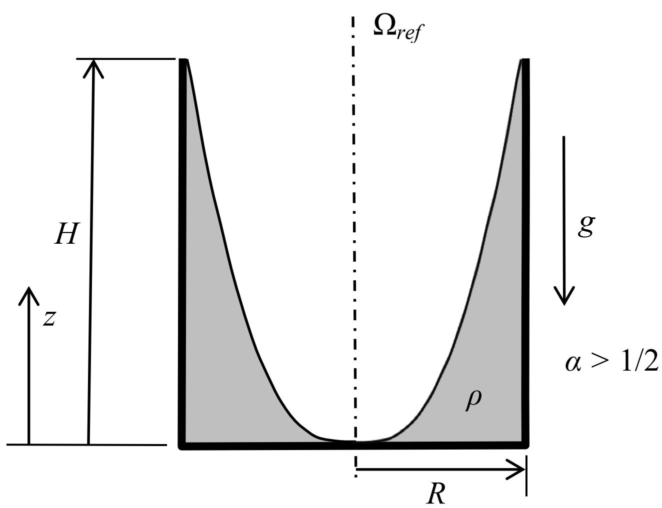


- Se a velocidade angular estiver abaixo do valor de referência, será derramado parte do líquido da camada superior e existirá uma camada dele; o líquido na camada inferior não será derramado e superfície da interfase estará acima do fundo do tanque.

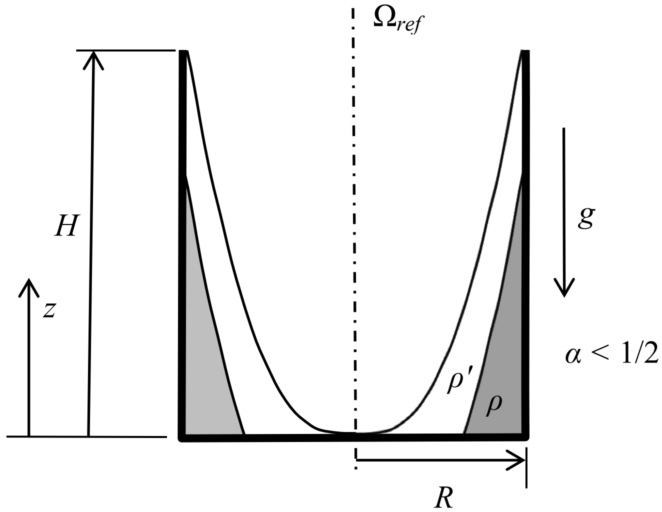


c) Mantendo fixo o valor de Ω da condição de referência, variando α deslocamos verticalmente a posição da interfase:

- Se α estiver acima do valor de referência, serão derramados todo o líquido na camada superior e parte do líquido da camada inferior, até chegar à condição de referência.



- Se α estiver abaixo do valor de referência, será derramado parte do líquido na camada superior e existirá uma camada dele; o líquido na camada inferior não será derramado. A interfase terá um raio de contato no fundo do tanque e o círculo dentro desse raio de contato no fundo do tanque estará molhado pelo líquido da camada superior. A superfície do líquido da camada superior chegará ao fundo do tanque.



Ω_{ref}
H
z
g
$\alpha < 1/2$
ρ'
ρ
R