Conservação da energia em forma integral

J. L. Baliño

Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula

Sumário

Energia total

Consideraremos as seguintes formas de energia total $\hat{e}$ por unidade de massa:

- Energia interna $\hat{u}$, devida ao estado termodinâmico da partícula (propriedade termodinâmica, $\hat{u} = \hat{u}\,(p,\, T)$).
- Energia cinética $\frac{1}{2}\,V^2$.
- Energia potencial gravitacional $\mathcal{U} = g\,z$.

$$\hat{e} = \hat{u} + \frac{1}{2}\,V^2 + g\,z$$

Outras formas de energia podem ser consideradas se elas variam no processo (por exemplo, reações químicas). A energia total E resulta:

$$E = \int_{CV} \rho\,\hat{e}\,d\mathcal{V}$$

Lei de conservação da energia

Lei de conservação da energia: a derivada material da energia total de um sistema de partículas é igual à soma da potência das forças exteriores W_{ext} e a potência calórica absorbida pelo sistema $\dot{Q}$:

$$\frac{DE}{Dt} = W_{ext} + \dot{Q}$$

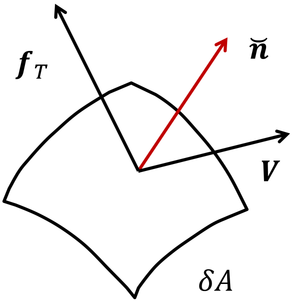
Por inspeção, resulta $F \equiv E$ e $f \equiv \rho\,\hat{e}$. Assim, resultam:

$$W_{ext} + \dot{Q} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\hat{e})\, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho\,\hat{e}\,(\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}})\, dA$$

$$W_{ext} + \dot{Q} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho\,\hat{e}\, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho\,\hat{e}\,(\boldsymbol{V}_r \cdot \breve{\boldsymbol{n}})\, dA \quad (CV \text{ deformável})$$

Potência das forças exteriores

A potência das forças de superfície pode ser calculada como:



$$\delta W_{ext} = \boldsymbol{f}_T \cdot \boldsymbol{V}\, \delta A = (\underline{\boldsymbol{T}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}) \cdot \boldsymbol{V}\, \delta A$$

$$W_{ext} = \int_{CS} (\underline{\boldsymbol{T}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}) \cdot \boldsymbol{V}\, dA$$

Potência da pressão e viscosa:

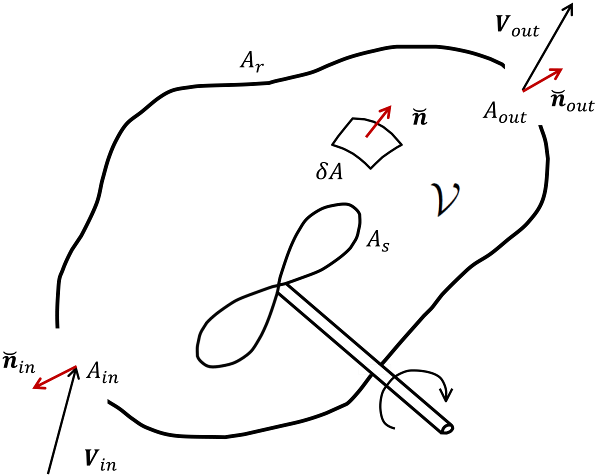
$$W_{ext} = W_p + W_v$$

$$W_p = \int_{CS} -p\ (\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}})\ dA$$

$$W_v = \int_{CS} (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}) \cdot \boldsymbol{V}\, dA$$

A potência da força gravitacional já está considerada no termo de energia potencial.

CV com entradas e saídas e máquina



CV com entradas e saídas e máquina

Consideramos um volume de controle com paredes rígidas (área A_r), um número finito de entradas e saídas (áreas A_{in} e A_{out}), e paredes móveis correspondentes a uma *máquina* ou *eixo* (área A_s). O volume de controle se deforma com a velocidade das paredes móveis. Resulta:

$$W_{ext} + \dot{Q} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho \, \hat{e} \, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho \, \hat{e} \, (\boldsymbol{V}_r \cdot \breve{\boldsymbol{n}}) \, dA$$

CS : $A_r \cup A_s \cup A_{in} \cup A_{out}$

O termo de fluxo é zero em A_r e A_s pois $\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{0}$:

$$\int_{CS} \rho \, \hat{e} \, (\boldsymbol{V}_r \cdot \breve{\boldsymbol{n}}) \, dA = \int_{A_{in} \cup A_{out}} \rho \, \hat{e} \, (\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}) \, dA$$

CV com entradas e saídas e máquina

A potência W_{ext} é zero em A_r pois $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$:

$$W_{ext} = W_s + W_{in\cup out}$$

$$W_s = \int_{A_s} (\underline{\boldsymbol{T}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}) \cdot \boldsymbol{V}\, dA \ \ \text{(potência no eixo)}$$

$$W_{in\cup out} = \int_{A_{in}\cup A_{out}} (\underline{\boldsymbol{T}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}) \cdot \boldsymbol{V}\, dA \ \ \text{(potência nas entradas e saídas)}$$

Separamos as contribuições de pressão e viscosa em $W_{in\cup out}$:

$$W_{in\cup out} = W_p + W_v$$

$$W_p = \int_{A_{in}\cup A_{out}} -p\,(\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}})\, dA \ \ \text{(potencia de pressão nas entradas e saídas)}$$

$$W_v = \int_{A_{in}\cup A_{out}} (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}) \cdot \boldsymbol{V}\, dA \ \ \text{(potência viscosa nas entradas e saídas)}$$

CV com entradas e saídas e máquina

Incorporando a potência W_p no termo de fluxo, resulta:

$$W_v + W_s + \dot{Q} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho\,\hat{e}\,d\mathcal{V} + \int_{A_{in}\cup A_{out}} \rho\left(\hat{e} + \frac{p}{\rho}\right)(\boldsymbol{V}\cdot\breve{\boldsymbol{n}})\,dA$$

Como $\hat{e} + \frac{p}{\rho} = \hat{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\,V^2 + g\,z = \hat{h} + \frac{1}{2}\,V^2 + g\,z$, onde $\hat{h} = \hat{u} + \frac{p}{\rho}$ é a entalpia específica, podemos escrever, finalmente:

$$W_v + W_s + \dot{Q} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho\,\hat{e}\,d\mathcal{V} + \int_{A_{in}\cup A_{out}} \rho\left(\hat{h} + \frac{1}{2}\,V^2 + g\,z\right)(\boldsymbol{V}\cdot\breve{\boldsymbol{n}})\,dA$$

Para entradas e saídas com propriedades uniformes, resulta:

$$W_v + W_s + \dot{Q} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho\,\hat{e}\,d\mathcal{V}$$

$$+\sum_i \left[\dot{m}_i\left(\hat{h}_i + \frac{1}{2}\,V_i^2 + g\,z_i\right)\right]_{out} - \sum_i \left[\dot{m}_i\left(\hat{h}_i + \frac{1}{2}\,V_i^2 + g\,z_i\right)\right]_{in}$$

CV com entradas e saídas e máquina

O termo de potência viscosa nas saídas (ou entradas) é da forma $W_v \cong (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}) \cdot \boldsymbol{V}\, A$. Como as velocidades são aproximadamente normais nas saídas ou entradas ($\boldsymbol{V}_{out} \cong V_n\, \breve{\boldsymbol{n}}$), resulta $W_{v\,out} = \tau_{nn}\, V_n\, A$; exceto problemas compressíveis, $\tau_{nn} \cong 0$, de maneira que $W_v \cong 0$ para escoamentos incompressíveis.

Para escoamento *permanente* ou *periódico*, o valor médio da derivada temporal é nulo.

Definimos a *altura piezométrica* H_P e a *altura de energía* H_E como:

$$H_P = \frac{p}{\rho\, g} + z$$

$$H_E = H_P + \frac{V^2}{2\, g} = \frac{p}{\rho\, g} + \frac{V^2}{2\, g} + z$$

CV com entradas e saídas e máquina

Considerando uma entrada e uma saída e escoamento permanente e incompressível, resulta:

$$W_s + \dot{Q} = \dot{m}\,(\hat{u}_{out} - \hat{u}_{in}) + \dot{m}\,g\,\left(H_{E\,out} - H_{E\,in}\right)$$

Definindo as seguintes alturas:

$$H_s = \frac{W_s}{\dot{m}\,g} \quad \text{(altura no eixo)}$$

$$H_l = -\frac{\dot{Q}}{\dot{m}\,g} + \frac{1}{g}\,(\hat{u}_{out} - \hat{u}_{in}) > 0 \quad \text{(altura de perdas)}$$

resulta:

$$H_s = H_{E\,out} - H_{E\,in} + H_l$$

A relação anterior indica que parte da altura introducida no eixo é transformada em altura de energia e parte é dissipada em calor transferido ao meio externo ou aumentando a temperatura do fluido (consequência dos efeitos viscosos).

Eficiência em bombas e turbinas

Como $H_l > 0$, deve ser $H_s > H_{E\,out} - H_{E\,in}$.
Para uma bomba, $H_s = H_B > 0$:

$$W_B = \dot{m}\, g\, H_B > \dot{m}\, g\, \left(H_{E\,out} - H_{E\,in}\right)$$

Eficiência da bomba: $\eta_B = \dfrac{\dot{m}\, g\, \left(H_{E\,out} - H_{E\,in}\right)}{W_B} < 1$

Para uma turbina, $H_s = -H_T < 0$:

$$W_T = \dot{m}\, g\, H_T < \dot{m}\, g\, \left(H_{E\,in} - H_{E\,out}\right)$$

Eficiência da turbina: $\eta_T = \dfrac{W_T}{\dot{m}\, g\, \left(H_{E\,in} - H_{E\,out}\right)} < 1$

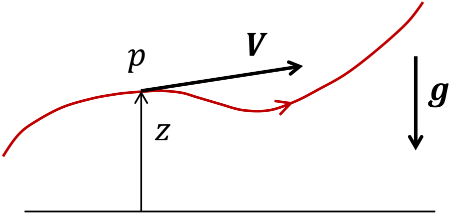
Para uma máquina de potência zero (dutos), $W_s = 0$ e resulta $H_{E\,in} > H_{E\,out}$ isto é, a partícula se desloca perdendo altura de energia.

Equação de Bernoulli

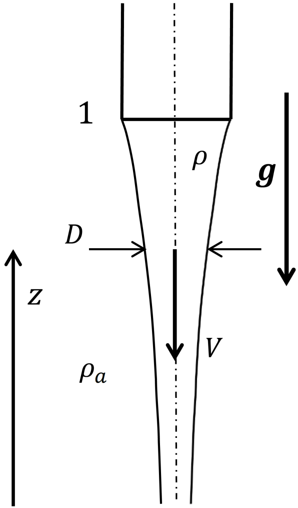
Finalmente, para escoamentos permanentes, incompressíveis, sem máquinas e sem efeitos de dissipação viscosa, resulta $H_{E\,out} = H_{E\,in}$:

$$H_E = \frac{p}{\rho\, g} + \frac{V^2}{2\, g} + z = cte \quad \text{(equação de Bernoulli)}$$

A equação de Bernoulli é válida para um *filamento* ou *linha de corrente*, já que $W_v = 0$ é zero nas paredes do filamento de corrente se desprezamos os efeitos viscosos.



Jatos livres



Descarga de uma torneira:

$$p + \frac{1}{2}\,\rho\,V^2 + \rho\,g\,z = p_1 + \frac{1}{2}\,\rho\,V_1^2 + \rho\,g\,z_1$$

Da relação hidrostática no ar:

$$p + \rho_a\,g\,z = p_1 + \rho_a\,g\,z_1$$

Eliminando $p - p_1$, resulta:

$$V^2 = V_1^2 + 2\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) g\,(z_1 - z)$$

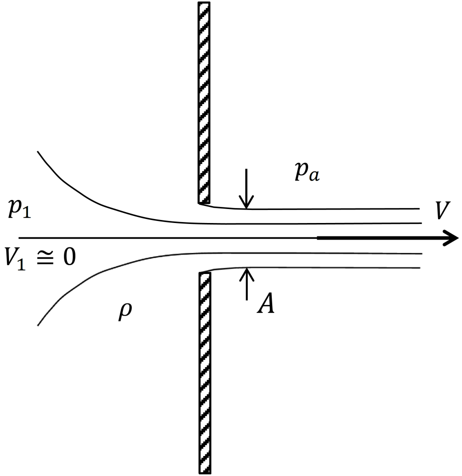
Desprezando $\frac{\rho_a}{\rho} \ll 1$ (equivalente a $p \cong cte$):

$$V^2 \cong V_1^2 + 2\,g\,(z_1 - z)$$

Diâmetro do jato:

$$V_1\,D_1^2 = V\,D^2 \Rightarrow D = D_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^{1/2}$$

Descarga de um orifício



$$p_1 + \frac{1}{2}\,\rho\,V_1^2 + \rho\,g\,z_1 = p_a + \frac{1}{2}\,\rho\,V^2 + \rho\,g\,z$$

Assumindo $z_1 = z$ e $V_1 \cong 0$:

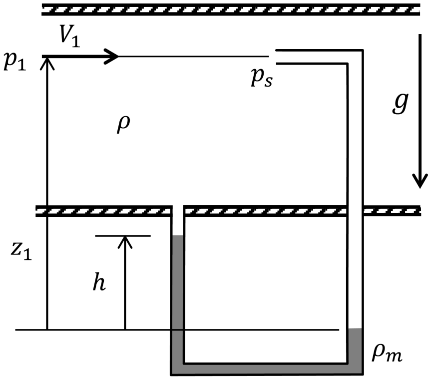
$$V^2 = \frac{2\,(p_1 - p_a)}{\rho}$$

As vazões no orifício resultam:

$$Q = V\,A = A\left[\frac{2\,(p_1 - p_a)}{\rho}\right]^{1/2}$$

$$\dot{m} = \rho\,Q = A\,\left[2\,\rho\,(p_1 - p_a)\right]^{1/2}$$

Tubo de Pitot



Medidor de velocidade local. Na linha de corrente que freia no nariz, onde $V_s = 0$ e $z_1 = z_s$:

$$p_1 + \frac{1}{2}\,\rho\,V_1^2 = p_s$$

$$\Rightarrow V_1 = \left[\frac{2\,(p_s - p_1)}{\rho}\right]^{1/2}$$

Das relações hidrostáticas:

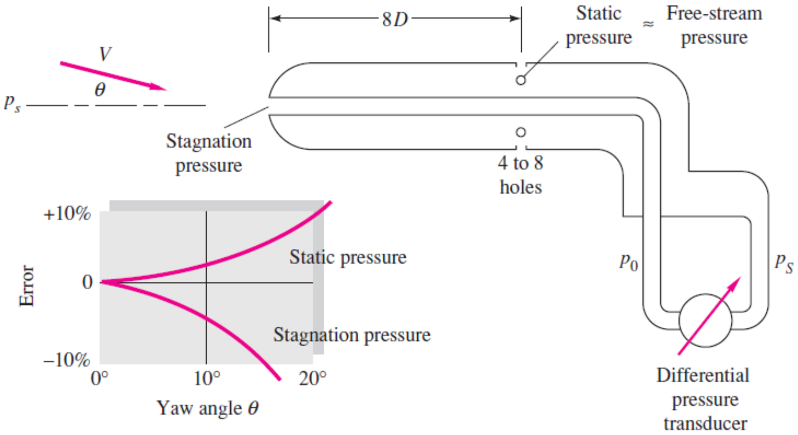
$$p_1 + \rho\,g\,(z_1 - h) + \rho_m\,g\,h = p_s + \rho g\,z_1$$

$$\Rightarrow p_s - p_1 = (\rho_m - \rho)\,g\,h$$

Substituindo, resulta finalmente

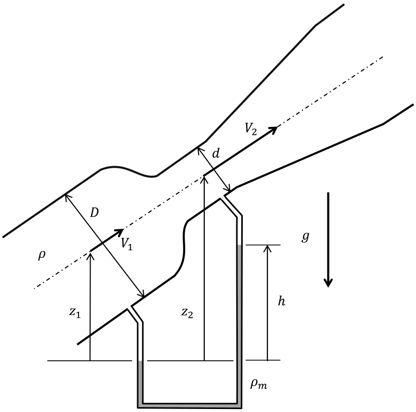
$$\Rightarrow V_1 = \left[2\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right)g\,h\right]^{1/2}$$

Tubo de Pitot



Medidores de vazão tipo obstrução de Bernoulli

Venturi



Na linha de corrente no duto:

$$p_1 + \frac{1}{2}\,\rho\,V_1^2 + \rho\,g\,z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\,\rho\,V_2^2 + \rho\,g\,z_2$$

$$p_1 - p_2 + \rho\,g\,(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}\,\rho\,V_2^2\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2\right]$$

Das relações hidrostáticas:

$$p_1 + \rho\,g\,z_1 = p_2 + \rho\,g\,(z_2 - h) + \rho_m\,g\,h$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 + \rho\,g\,(z_1 - z_2) = (\rho_m - \rho)\,g\,h$$

Da equação de continuidade: $V_1\,A_1 = V_2\,A_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \beta^2$, onde $\beta = \frac{d}{D}$. Resulta finalmente:

$$Q = V_2\,A_2 = A_2\left[\frac{2\left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1\right)g\,h}{1 - \beta^4}\right]^{1/2}$$

Outros exemplos: placa de orifício, bocal.

Medidores de vazão tipo obstrução de Bernoulli