Pressão e manometria

J. L. Baliño

Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula

Sumário

Estado hidrostático de tensão

Movimento geral de uma partícula de fluido: superposição de velocidade de translação do centro de massa, rotação ao redor do centro de massa e taxa de deformação (tanto longitudinal quanto de cisalhamento). Vimos que:

$$\underline{\boldsymbol{T}} = -p\,\underline{\boldsymbol{I}} + \underline{\boldsymbol{\tau}}$$

onde $\underline{\boldsymbol{\tau}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ quando existe viscosidade e taxa de deformação (variação no tempo da distância entre as partículas). Em consequência, se em algum sistema de referência o fluido está em repouso (não existe taxa de deformação), então $\underline{\boldsymbol{\tau}} \equiv \underline{\mathbf{0}}$; neste caso, $\underline{\boldsymbol{T}} = -p\,\underline{\boldsymbol{I}}$ e estamos em presença de um *estado hidrostático de tensão*.

Três casos possiveis: aceleração zero, aceleraçao constante ou rotação do sólido rígido.

Força de pressão

Vimos que a força de pressão resulta:

$$\boldsymbol{F}_p = \int_{CS} -p\,\underline{\boldsymbol{I}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\, dA = \int_{CV} \nabla \cdot (-p\,\underline{\boldsymbol{I}})\, d\mathcal{V}$$

onde transformamos a integral através do *teorema do divergente*. Temos que:

$$\nabla \cdot (-p\,\underline{\boldsymbol{I}}) = -p\,\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{I}} - \underline{\boldsymbol{I}} \cdot \nabla p = -\nabla p$$

pois $\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{I}} = \underline{\boldsymbol{0}}$ e $\underline{\boldsymbol{I}} \cdot \nabla p = \nabla p$. Substituindo, resulta:

$$\boldsymbol{F}_p = \int_{CV} -\nabla p\, d\mathcal{V}$$

A quantidade $-\nabla p$ é a força resultante de pressão por unidade de volume.

Equilíbrio hidrostático

Fazendo um balanço de forças em uma condição de equilíbrio hidrostático, considerando forças de peso, pressão e de aceleração não inercial $\boldsymbol{a}_{NI}$ *conhecida* (para os casos de aceleração constante ou rotação do sólido rígido), resulta:

$$\int_{CV} \left(\rho\,\boldsymbol{g} - \nabla p + \rho\,\boldsymbol{a}_{NI}\right) d\mathcal{V} = \mathbf{0}$$

Como a relação anterior é válida para *qualquer volume de controle*, o integrando deve ser zero para qualquer ponto, resultando:

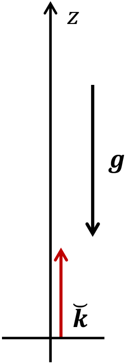
$$\nabla p = \rho\left(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{a}_{NI}\right)$$

Lei de Stevin

Para $\boldsymbol{a}_{NI} = \mathbf{0}$, resulta:

$$\nabla p = \rho \, \boldsymbol{g}$$

Supondo $\boldsymbol{g} = -g \, \breve{\boldsymbol{k}}$ e $\rho = cte$ podemos integrar:



$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \, g \end{array}\right\} \Longrightarrow p\,(z) = -\rho \, g \, z + cte$$

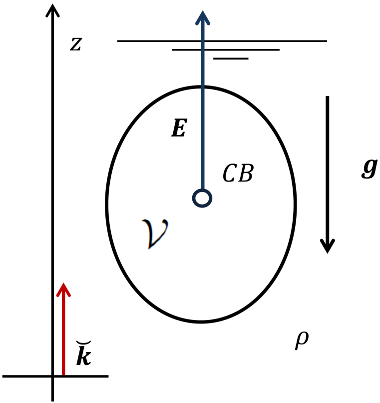
$$p\,(z) + \rho \, g \, z = cte$$

A pressão varia aumenta linearmente com a profundidade (Lei de Stevin).

Peso específico: $\gamma = \rho \, g$.

Empuxo

Para uma distribuição hidrostática de pressão e $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, a força em um corpo completamente submerso (empuxo) vale:



$$\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{E} = \int_{CV} -\nabla p \, d\mathcal{V}$$

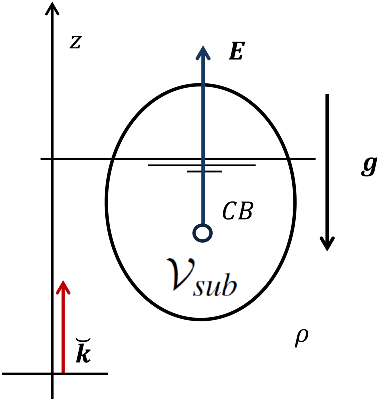
$$\int_{CV} -\rho \, \boldsymbol{g} \, d\mathcal{V} = \rho \, g \, \mathcal{V} \, \breve{\boldsymbol{k}}$$

Empuxo aplicado no centro de volume CB.

Empuxo

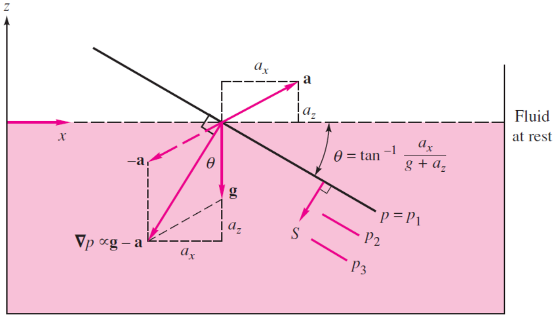
Para um corpo parcialmente submerso, o empuxo vale:

$$\boldsymbol{E} = \rho\, g\, \mathcal{V}_{sub}\, \breve{\boldsymbol{k}}$$



Empuxo aplicado no centro de volume CB do volume submerso.
Leis de empuxo (Arquimedes):
Um corpo imerso em um fluido está sujeito a uma força de empuxo vertical igual ao peso do fluido que ele desloca.
Um corpo flutuante desloca seu próprio peso no fluido em que flutua.

Aceleração constante



$$\boldsymbol{a}_{NI} = -\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = -a_x\,\breve{\boldsymbol{\imath}} - a_z\,\breve{\boldsymbol{k}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\, a_x$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\,(g + a_z)$$

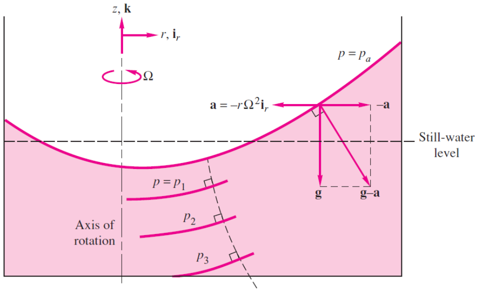
$$p + \rho\, a_x\, x + \rho\,(g + a_z)\, z = cte$$

Superfície de pressão constante: plano com $\mathrm{tg}\theta = -\left(\frac{dz}{dx}\right)_p = \frac{a_x}{g+a_z}$.

Gradiente de pressão na direção s $(\theta + \pi/2)$:

$$\frac{dp}{ds} = \rho\left[a_x^2 + (g + a_z)^2\right]^{1/2}.$$

Rotação de sólido rígido



$$\boldsymbol{a}_{NI} = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) = \Omega^2\, r\, \breve{\boldsymbol{r}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\, \Omega^2\, r$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$p - \frac{1}{2}\rho\, \Omega^2\, r^2 + \rho\, g\, z = cte$$

Superfície de pressão constante: paraboloide de revolução com $\mathrm{tg}\theta = \left(\frac{dz}{dr}\right)_p = \frac{\Omega^2\, r}{g}$. Gradiente de pressão na direção s ($\theta - \pi/2$):

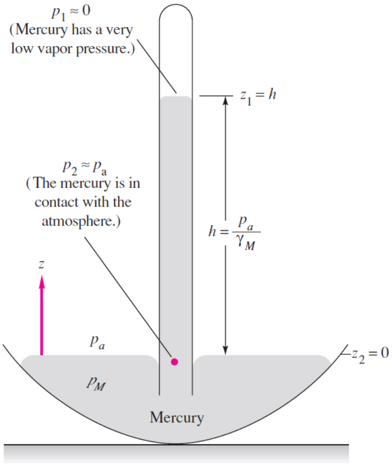
$$\frac{dp}{ds} = \rho \left[g^2 + \left(\Omega^2\, r\right)^2\right]^{1/2}.$$

Pressões relativas

Muitos instrumentos são do tipo *diferencial*, medem a diferença entre a pressão do fluido e a pressão atmosférica (variável).

- Se $p > p_{atm}$, então $p_{man} = p - p_{atm}$ (pressão *manométrica*).
- Se $p < p_{atm}$, então $p_{vac} = p_{atm} - p$ (pressão *de vácuo*).

Barômetro de mercúrio



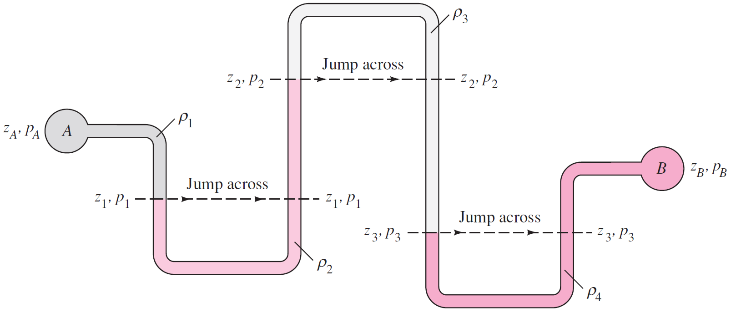
Experimento de E. Torricelli (1643) (discípulo de Galileo Galilei):

$$p_1 + \rho\, g\, h = p_a$$

$$p_1 \cong 0 \Rightarrow p_a = \rho\, g\, h = \gamma\, h$$

Ao nível do mar, na atmosfera padrão, $p_a = 1,0135 \times 10^5\, Pa$; $\gamma_M = 1,331 \times 10^5\, N/m^3$, de maneira que $h = 0,761\, m$. No caso da água, $h \cong 10\, m$.

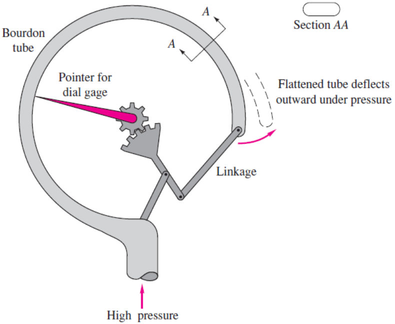
Manômetro de coluna



$$p_A + g\left[\rho_1\left(z_A - z_1\right) - \rho_2\left(z_2 - z_1\right) + \rho_3\left(z_2 - z_3\right) - \rho_4\left(z_B - z_3\right)\right] = p_B$$

Outros projetos: de tubo inclinado ($\Delta z = L\,\mathrm{sen}\theta$).

Manômetro de Bourdon



Baseado na deflexão para fora de um tubo curvado com seção transversal achatada, medida por meio de uma articulação ligada a um ponteiro de um mostrador calibrado.