Leis de conservação em forma integral

J. L. Baliño

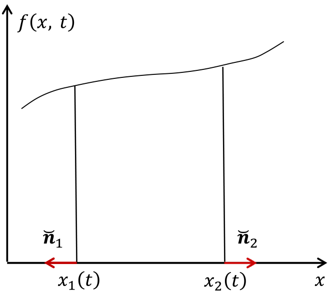
Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula
Rev. 10/08/2017

Sumário

Regra de Leibniz 1-D

Cálculo da derivada de uma integral que é função do parâmetro t, quando os limites de integração são funções arbitrárias do parâmetro. Para 1-D, se $F = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(x,\, t)\; dx$, como calcular $\frac{dF}{dt}$?



$$\frac{dF}{dt} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left[f(x,\, t)\right] dx$$

$$+ f(x_2,\, t)\, \frac{dx_2}{dt} - f(x_1,\, t)\, \frac{dx_1}{dt}$$

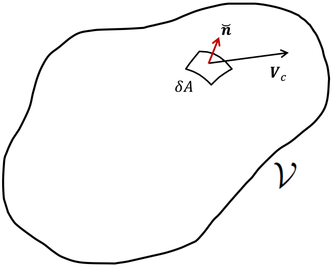
$$\boldsymbol{V}_{c1} = \frac{dx_1}{dt}\, \breve{\boldsymbol{\imath}} \quad , \quad \boldsymbol{V}_{c2} = \frac{dx_2}{dt}\, \breve{\boldsymbol{\imath}}$$

$$\breve{\boldsymbol{n}}_1 = -\breve{\boldsymbol{\imath}} \quad , \quad \breve{\boldsymbol{n}}_2 = \breve{\boldsymbol{\imath}}$$

$$\frac{dF}{dt} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial}{\partial t}\left[f(x,\, t)\right] dx + f_2\, \boldsymbol{V}_{c2} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}_2 + f_1\, \boldsymbol{V}_{c1} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}_1$$

Regra de Leibniz 3-D

Podemos introduzir a derivação dentro da integral, mas devemos acrescentar o fluxo de $f\,(x,\ t)\ \boldsymbol{V}_c$ na fronteira do recinto. Generalizando a 3-D:



$$F\,(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} f\,(\boldsymbol{r},\ t)\, d\mathcal{V}$$

$$\frac{dF}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial}{\partial t}\,[f\,(\boldsymbol{r},\ t)]\, d\mathcal{V} + \int_{A(t)} f\,(\boldsymbol{r}_c,\ t)\,(\boldsymbol{V}_c \cdot \breve{\boldsymbol{n}})\, dA$$

Notar que F é uma quantidade *extensiva*, enquanto $f\,(\boldsymbol{r},\ t)$ é uma quantidade *intensiva* (por unidade de volume) expressa em forma de *campo*. A variação do volume, caracterizada por $\boldsymbol{V}_c$, é *arbitrária*.

Teorema de transporte de Reynolds (TTR)

O volume $\mathcal{V}$ e a forma em que varia no tempo definem o *volume de controle* (CV) e a superfície de controle (CS). Consideremos um sistema de partículas, que chamaremos *sistema*. Vamos fazer as seguintes suposições adicionais:

- O sistema coincide com o volume de controle no tempo t.
- A velocidade na fronteira é igual à velocidade das partículas na fronteira, isto é $\boldsymbol{V}_c \equiv \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_c, t)$.

Nestas condições particulares, a expressão anterior representa a variação no tempo da magnitude extensiva F *acompanhando o sistema de partículas*, ou *derivada material* (ou substancial) $\frac{DF}{Dt}$, e é conhecida como *teorema de transporte de Reynolds* (TTR):

$$\frac{DF}{Dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}[f(\boldsymbol{r}, t)]\, d\mathcal{V} + \int_{CS} f(\boldsymbol{r}_c, t)(\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}})\, dA$$

TTR, volume de controle deformável

O TTR permite calcular a derivada temporal lagrangeana de uma quantidade extensiva F (acompanhando as partículas) por meio de operações realizadas no campos f e $\boldsymbol{V}$. Eliminando a integral de volume, podemos chegar a uma expressão equivalente para um volume de controle deformável com velocidade $\boldsymbol{V}_c$:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} f\left(\boldsymbol{r},\, t\right) d\mathcal{V} + \int_{CS} f\left(\boldsymbol{r}_c,\, t\right)\left(\boldsymbol{V}_r \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\right) dA$$

onde $\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_c$ é a velocidade das partículas na fronteira relativa à velocidade de variação da fronteira. Notar que, embora o resultado é o mesmo, as instruções para as operações em cada um dos termos é diferente.

Conservação da massa

Massa de uma partícula: $\delta M = \rho \, d\mathcal{V}$.
Massa M de um sistema de partículas:

$$M(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V}$$

Lei de conservação da massa: a derivada material da massa de um sistema de partículas é zero.

$$\frac{DM}{Dt} = 0$$

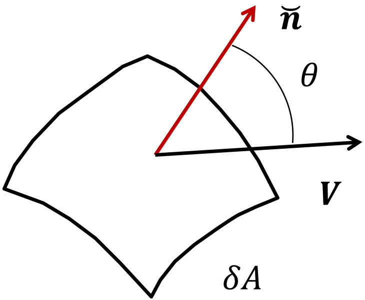
Por inspeção, resulta $F \equiv M$ e $f \equiv \rho$. Assim, resultam:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho \left(\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}} \right) dA = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho \, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho \left(\boldsymbol{V}_r \cdot \breve{\boldsymbol{n}} \right) dA = 0 \quad (CV \text{ deformável})$$

Vazões mássica e volumétrica

Vazão mássica $\dot{m}$ (volumétrica Q): quantidade de massa (volume) que atravessa a superfície A por unidade de tempo.



$$\delta\mathcal{V} = V\,\cos\theta\,dA\,dt = V_n\,dA\,dt$$
$$= \boldsymbol{V}\cdot\breve{\boldsymbol{n}}\,dA\,dt$$

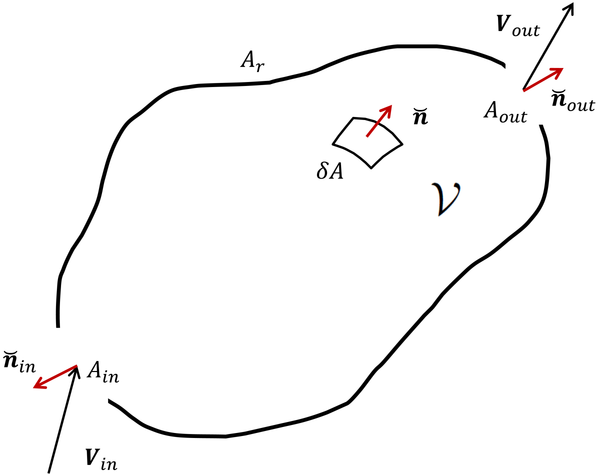
$$Q = \int_A (\boldsymbol{V}\cdot\breve{\boldsymbol{n}})\,dA$$

$$\dot{m} = \int_A \rho\,(\boldsymbol{V}\cdot\breve{\boldsymbol{n}})\,dA$$

Para escoamento incompressível:

$$\dot{m} = \rho\,Q$$

CV com entradas e saídas



CV com entradas e saídas uniformes

Se consideramos um volume de controle com paredes rígidas e um número finito de entradas e saídas com propriedades uniformes, resulta $\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}} = 0$ nas paredes (impermeáveis), $\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}} = V_{n\,out} > 0$ nas saídas e $\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}} = -V_{n\,in} < 0$ nas entradas. Supondo propriedades uniformes nas entradas e saídas, resulta:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\mathcal{V} + \sum_i \left(\rho_i\, V_{n\,i}\, A_i\right)_{out} - \sum_i \left(\rho_i\, V_{n\,i}\, A_i\right)_{in} = 0$$

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\mathcal{V} + \sum_i \left(\dot{m}_i\right)_{out} - \sum_i \left(\dot{m}_i\right)_{in} = 0$$

Para escoamento permanente ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) resulta:

$$\sum_i \left(\dot{m}_i\right)_{out} = \sum_i \left(\dot{m}_i\right)_{in}$$

CV com entradas e saídas uniformes

Para escoamento incompressível ($\rho = cte$):

$$\sum_i (V_{n\,i} A_i)_{out} = \sum_i (V_{n\,i} A_i)_{in}$$

$$\sum_i (Q_i)_{out} = \sum_i (Q_i)_{in}$$

Para uma entrada e uma saída, temos que:

$$Q_{out} = Q_{in} = Q\,(t)$$

constante na posição. Esta relação é conhecida como *equação de continuidade*.

CV deformável com entradas e saídas uniformes

Considerando um *CV deformável*:

$$\frac{d}{dt}\int_{CV}\rho\, d\mathcal{V} + \sum_i \left(\rho_i\, V_{rn\,i}\, A_i\right)_{out} - \sum_i \left(\rho_i\, V_{rn\,i}\, A_i\right)_{in} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_{CV}\rho\, d\mathcal{V} + \sum_i \left(\dot{m}_{r\,i}\right)_{out} - \sum_i \left(\dot{m}_{r\,i}\right)_{in} = 0$$

Notar que as vazões mássicas são calculadas com a *velocidade relativa* na fronteira.

Para escoamento incompressível ($\rho = cte$):

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} + \sum_i \left(V_{rn\,i}\, A_i\right)_{out} - \sum_i \left(V_{rn\,i}\, A_i\right)_{in} = 0$$

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} + \sum_i \left(Q_{r\,i}\right)_{out} - \sum_i \left(Q_{r\,i}\right)_{in} = 0$$

Conservação do momento linear

Momento linear de uma partícula: $\delta \boldsymbol{P} = \delta M \, \boldsymbol{V} = \rho \, \boldsymbol{V} \, \delta \mathcal{V}$.
Momento linear $\boldsymbol{P}$ de um sistema de partículas:

$$\boldsymbol{P}(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho \, \boldsymbol{V} \, d\mathcal{V}$$

Lei de conservação do momento linear: a derivada material do momento linear de um sistema de partículas é igual à soma das forças exteriores.

$$\frac{D\boldsymbol{P}}{Dt} = \sum \boldsymbol{F}_{ext}$$

Por inspeção, resulta $\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{f} \equiv \rho \, \boldsymbol{V}$. Assim, resultam:

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \, \boldsymbol{V} \right) \, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho \, \boldsymbol{V} \left(\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}} \right) dA$$

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho \, \boldsymbol{V} \, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho \, \boldsymbol{V} \left(\boldsymbol{V}_r \cdot \breve{\boldsymbol{n}} \right) dA \quad (CV \text{ deformável})$$

CV com entradas e saídas uniformes

Para um CV com um número finito de entradas e saídas uniformes:

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \boldsymbol{V})\, d\mathcal{V} + \sum_i (\dot{m}_i \boldsymbol{V}_i)_{out} - \sum_i (\dot{m}_i \boldsymbol{V}_i)_{in}$$

Para escoamento permanente ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) resulta:

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \sum_i (\dot{m}_i \boldsymbol{V}_i)_{out} - \sum_i (\dot{m}_i \boldsymbol{V}_i)_{in}$$

Para escoamento permanente com uma entrada e uma saída, $\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} = \dot{m}$:

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \dot{m} (\boldsymbol{V}_{out} - \boldsymbol{V}_{in})$$

Para escoamento incompressível ($\rho = cte$) resulta:

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \rho \left[\int_{CV} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} d\mathcal{V} + \sum_i (Q_i \boldsymbol{V}_i)_{out} - \sum_i (Q_i \boldsymbol{V}_i)_{in} \right]$$

CV deformável com entradas e saídas uniformes

Para um CV deformável com um número finito de entradas e saídas uniformes:

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho\, \boldsymbol{V}\, d\mathcal{V} + \sum_i \left(\dot{m}_{r\,i}\, \boldsymbol{V}_i\right)_{out} - \sum_i \left(\dot{m}_{r\,i}\, \boldsymbol{V}_i\right)_{in}$$

Para uma entrada e uma saída, resulta:

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho\, \boldsymbol{V}\, d\mathcal{V} + \dot{m}_{r\,out}\, \boldsymbol{V}_{out} - \dot{m}_{r\,in}\, \boldsymbol{V}_{in}$$

Para escoamento incompressível ($\rho = cte$):

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \rho \left[\frac{d}{dt}\int_{CV} \boldsymbol{V}\, d\mathcal{V} + \sum_i \left(Q_{r\,out}\, \boldsymbol{V}_{out}\right) - \sum_i \left(Q_{r\,in}\, \boldsymbol{V}_{in}\right)\right]$$

Considerações particulares

- Equação de conservação *vectorial* (três equações escalares):

$$\sum (\boldsymbol{F}_{ext})_x = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\, u)\; d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho\, u\, (\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}})\, dA$$

$$\sum (\boldsymbol{F}_{ext})_x = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho\, u\, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho\, u\, (\boldsymbol{V}_r \cdot \breve{\boldsymbol{n}})\, dA \quad (CV \text{ deformável})$$

- É necessário calcular $\boldsymbol{F}_{ext}$. Para isto, existem diferentes tipos de forças: volumétricas, superficiais é de interfase (não consideradas, por enquanto):

$$\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_T$$

- No caso em que a posição $\boldsymbol{r}$ e a velocidade $\boldsymbol{V}$ sejam medido em um sistema de referência *não inercial*, é necessário acrescentar as *forças não inerciais*.

Forças volumétricas

Proporcionais ao volume ($\sim L^3$). Se $\boldsymbol{G}$ é o campo de força por unidade de massa, a força volumétrica $\boldsymbol{F}_G$ resulta:

$$\boldsymbol{F}_G = \int_{CV} \rho \, \boldsymbol{G} \, d\mathcal{V}$$

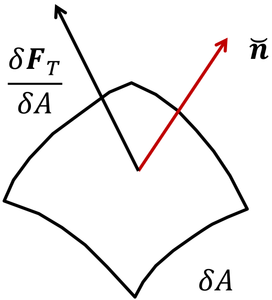
O exemplo típico de força volumétrica é o campo gravitacional; neste caso $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{g}$ constante e $\boldsymbol{F}_G$ é o *peso* do sistema de partículas:

$$\boldsymbol{F}_g = \boldsymbol{g} \int_{CV} \rho \, d\mathcal{V} = M \, \boldsymbol{g}$$

O campo gravitacional é *conservativo*, pois $\boldsymbol{g} = -\nabla \mathcal{U}$, onde $\mathcal{U}$ é a energia potencial gravitacional. Se $\boldsymbol{g} = -g \, \breve{\boldsymbol{k}}$, $\mathcal{U} = g \, z + cte$.

Forças superficiais

Proporcionais à superfície ($\sim L^2$). Seja $\boldsymbol{f}_T = \frac{\delta \boldsymbol{F}_T}{\delta A}$ a força por unidade de área (tensão) resultante de retirar o meio externo ao elemento de área δA com normal $\breve{\boldsymbol{n}}$. A relação funcional (transformação linear) entre tensão e versor normal define o *tensor de tensões* $\underline{\boldsymbol{T}}$.



$$\boldsymbol{f}_T = \frac{\delta \boldsymbol{F}_T}{\delta A} = \underline{\boldsymbol{T}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}$$

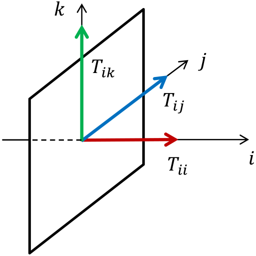
$$\boldsymbol{F}_T = \int_{SC} \underline{\boldsymbol{T}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}} \, dA$$

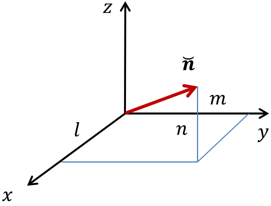
Matriz associada (simétrica):

$$\{T_{ij}\} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

Matriz associada $\{T_{ij}\}$

No elemento T_{ij}, o subscrito i indica a direção normal ao elemento de área considerado, enquanto j indica a direção da tensão; assim, se $i = j$ a tensão é *normal*, enquanto se $i \neq j$ a tensão é de *cisalhamento*. Para um versor normal de cosenos diretores l, m e n (cosenos dos ângulos formados respectivamente com os eixos x, y e z) resulta:





$$\begin{pmatrix} f_{T\,x} \\ f_{T\,y} \\ f_{T\,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\,T_{xx} + m\,T_{xy} + n\,T_{zx} \\ l\,T_{xy} + m\,T_{yy} + n\,T_{yz} \\ l\,T_{zx} + m\,T_{yz} + n\,T_{zz} \end{pmatrix}$$

Pressão e tensão viscosa

$$\underline{\boldsymbol{T}} = -p\,\underline{\boldsymbol{I}} + \underline{\boldsymbol{\tau}}$$

onde p é a *pressão*, $\underline{\boldsymbol{I}}$ é o *tensor identidade* e $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ é o *tensor de tensões viscosas*. A pressão depende do *estado termodinâmico* do fluido, enquanto o tensor viscoso depende da *viscosidade* e da existencia de *taxa de deformação* do fluido.

Como $\{I_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resulta $-p\,\underline{\boldsymbol{I}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}} = -p\,\breve{\boldsymbol{n}}$, isto é, a pressão age sempre na direção contrária ao versor normal, com um módulo independente da direção (princípio de Pascal).

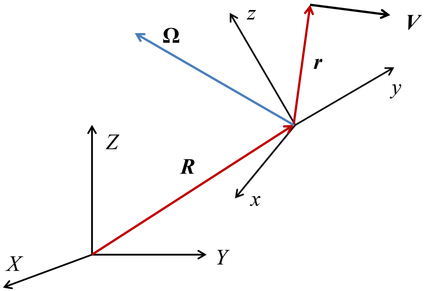
$$\boldsymbol{F}_T = \boldsymbol{F}_p + \boldsymbol{F}_v$$

$$\boldsymbol{F}_p = \int_{CS} (-p)\,\breve{\boldsymbol{n}}\,dA \quad \text{(força de pressão)}$$

$$\boldsymbol{F}_v = \int_{CS} \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\,dA \quad \text{(força viscosa)}$$

Forças não inerciais

Aparecem quando a posição $\boldsymbol{r}$ e a velocidade $\boldsymbol{V}$ são medidas em um sistema de referência não inercial, para satisfazer a equação de conservação do momento linear; elas não satisfazem o princípio de ação e reação. O sistema não inercial xyz rota com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ e se desloca com posição $\boldsymbol{R}$ em relação ao sistema absoluto XYZ.



Forças não inerciais

É necessário acrescentar a força não inercial $\boldsymbol{F}_{NI}$:

$$\boldsymbol{F}_{NI} = \int_{CV} \rho\, \boldsymbol{a}_{NI}\, d\mathcal{V}$$

$$\boldsymbol{a}_{NI} = -\left[\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + 2\,\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})\right]$$

onde identificamos respectivamente as acelerações da origem do sistema não inercial, angular, de Coriolis e centrífuga.

Conservação do momento angular

Momento angular de uma partícula ao redor da origem de coordenadas 0: $\delta \boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{r} \times (\delta M\, \boldsymbol{V}) = \rho\, (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V})\, \delta \mathcal{V}$.

Momento angular $\boldsymbol{P}$ de um sistema de partículas:

$$\boldsymbol{H}_0\,(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V})\, d\mathcal{V}$$

Lei de conservação do momento angular: a derivada material do momento angular de um sistema de partículas é igual à soma dos momentos das forças exteriores.

$$\frac{D\boldsymbol{H}_0}{Dt} = \sum \boldsymbol{M}_{ext\,0}$$

Por inspeção, resulta $\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{H}_0$ e $\boldsymbol{f} \equiv \rho\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}$. Assim, resultam:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext\,0} = \int_{CV} \boldsymbol{r} \times \frac{\partial}{\partial t}\,(\rho\, \boldsymbol{V})\; d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V})\,(\boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}})\, dA$$

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext\,0} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V})\, d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V})\,(\boldsymbol{V}_r \cdot \breve{\boldsymbol{n}})\, dA \quad (CV \text{ deformável})$$

CV com entradas e saídas uniformes

Para um CV com um número finito de entradas e saídas uniformes:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext\,0} = \int_{CV} \boldsymbol{r} \times \frac{\partial}{\partial t} (\rho\, \boldsymbol{V})\, d\mathcal{V}$$
$$+ \sum_i (\dot{m}_i\, \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{V}_i)_{out} - \sum_i (\dot{m}_i\, \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{V}_i)_{in}$$

Para escoamento permanente ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) resulta:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext\,0} = \sum_i (\dot{m}_i\, \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{V}_i)_{out} - \sum_i (\dot{m}_i\, \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{V}_i)_{in}$$

Para escoamento permanente com uma entrada e uma saída, $\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} = \dot{m}$:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext\,0} = \dot{m}\, (\boldsymbol{r}_{out} \times \boldsymbol{V}_{out} - \boldsymbol{r}_{in} \times \boldsymbol{V}_i)$$

CV deformável com entradas e saídas uniformes

Para um *CV* deformável com um número finito de entradas e saídas uniformes:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext\,0} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V})\,d\mathcal{V}$$
$$+\sum_i \left(\dot{m}_{r\,i}\,\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{V}_i\right)_{out} - \sum_i \left(\dot{m}_{r\,i}\,\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{V}_i\right)_{in}$$

Para uma entrada e uma saída:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext\,0} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \rho\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V})\,d\mathcal{V}$$
$$+\dot{m}_{r\,out}\,\boldsymbol{r}_{out}\times\boldsymbol{V}_{out} - \dot{m}_{r\,in}\,\boldsymbol{r}_{in}\times\boldsymbol{V}_{in}$$

Momento das forças exteriores

Consideramos o momento das forças volumétricas, de pressão, viscosas e não inerciais:

$$\sum \boldsymbol{M}_{ext\,0} = \boldsymbol{M}_{G\,0} + \boldsymbol{M}_{p\,0} + \boldsymbol{M}_{v\,0} + \boldsymbol{M}_{NI\,0}$$

$$\boldsymbol{M}_{G\,0} = \int_{CV} \rho\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G}\,d\mathcal{V}$$

$$\boldsymbol{M}_{p\,0} = \int_{CS} (-p)\,\boldsymbol{r} \times \breve{\boldsymbol{n}}\,dA$$

$$\boldsymbol{M}_{v\,0} = \int_{CS} \boldsymbol{r} \times \left(\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\right)\,dA$$

$$\boldsymbol{M}_{NI\,0} = \int_{CV} \rho\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_{NI}\,d\mathcal{V}$$