1) Calcule o momento de inércia através de integração direta dos seguintes corpos:

a) Aro de massa **m** e raio **R** em relação ao eixo que passa por seu centro. **(0.8 pontos)**

b) Disco de massa **m** e raio **R** em relação ao eixo que passa por seu centro. **(0.8 pontos)**

c) Cone maciço de massa **m,** base com raio **R** e altura **h** em relação ao eixo que passa por seu centro. **(0.9 pontos)** Dica: Use o resultado do disco para calcular o do cone.

a) $I = \int dm\, R^2$

no caso do aro

$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$ $\quad dm = R d\theta \cdot \lambda = R d\theta \frac{M}{2\pi R} = \frac{M d\theta}{2\pi}$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{M d\theta}{2\pi} R^2 = M R^2$$

b) Usando o [redacted]

$\sigma = M / \pi R^2$

$$dm = 2\pi r\, dr\, \sigma = 2\pi r \frac{M}{\pi R^2} dr = \frac{2M}{R^2} dr\, r$$

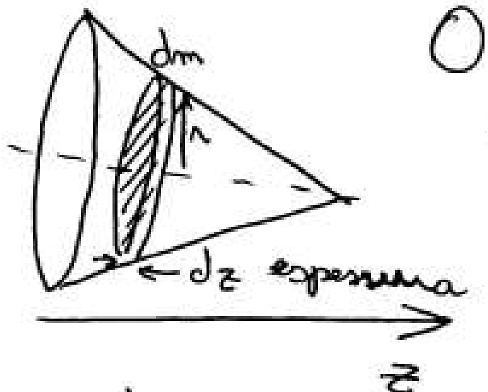
$$I = \int dm\, r^2 = \int_0^R \frac{2M}{R^2} r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$$

$$I = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

c) Usando o resultado do disco para calcular o cone, temos que

Volume do cone $= \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{3M}{\pi R^2 h}$$



O dI do disco infinitesimal é

$$dI = \frac{dm\, r^2}{2}$$

$$dm = \pi r^2 dz\, \rho = \cancel{\pi} r^2 dz \frac{3M}{\cancel{\pi} R^2 h}$$

$$dm = \frac{3M r^2 dz}{R^2 h}$$

$$dI = \frac{1}{2} \frac{3M r^2}{R^2 h} dz\, r^2$$

$$dI = \frac{3}{2} \frac{M}{R^2 h} r^4 dz$$

Mas no cone

$$r = R - \frac{R}{h} z$$

$$dI = \frac{3}{2} \frac{M}{R^2 h} \left(R - \frac{Rz}{h}\right)^4 dz$$

integrando

$$I = \frac{3}{2} \frac{M R^4}{R^2 h} \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^4 dz$$

fazendo $y = 1 - \dfrac{z}{h}$

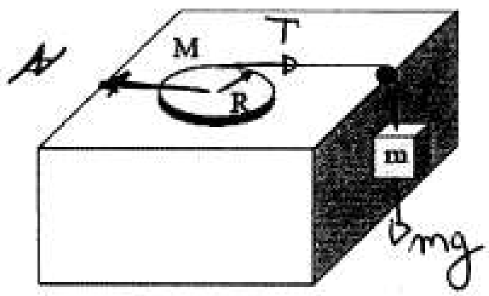
$$dy = -\frac{dz}{h}$$

$$I = \frac{3}{2}\frac{MR^2}{h}\int_1^0 (-h)\, y^4\, dy = \frac{3}{2} MR^2 \int_0^1 y^4\, dy$$

$$I = \frac{3}{2} MR^2 \left. \frac{y^5}{5} \right|_0^1 = \frac{3}{2}\frac{1}{5} MR^2$$

2 Na figura abaixo mostramos um disco de massa **M** e raio **R**, que está preso pelo seu eixo sobre uma massa sem atrito. De forma que possa rodar sem se mover. Ele é puxado por um corpo de massa **m** através de um fio enrolado ao seu redor. Se o sistema é solto a partir do repouso, calcule:

a) A velocidade angular do disco. **(0.8 pontos)**
b) A velocidade da massa **m**. **(0.8 pontos)**
c) A tensão na corda. **(0.9 pontos)**



na roldana

$$\sum F_i = 0$$

$$T = N$$

$$\sum \tau_i = I\alpha$$

$$TR = \frac{MR^2}{2}\alpha$$

$$T = \frac{MR}{2}\alpha \quad (I)$$

no corpo $\underline{m}$

$$mg - T = ma$$

mas $a = R\alpha$

$$T = mg - ma$$

$$T = mg - mR\alpha \quad (II)$$

igualando (I) e (II)

$$\frac{M \cdot R}{2}\alpha = mg - mR\alpha$$

$$\left(\frac{MR}{2} + mR\right)\alpha = mg$$

$$\alpha = \frac{mg}{\left(\frac{MR}{2} + mR\right)}$$

a) Assim $\omega = \dfrac{mg}{\left(\frac{MR}{2} + mR\right)} t$

b) $V = R\omega \Rightarrow V = \dfrac{mg}{(M/2 + m)} t$

c)

$$T = \frac{MR}{2} \frac{mg}{\left(\frac{MR}{2} + mR\right)}$$

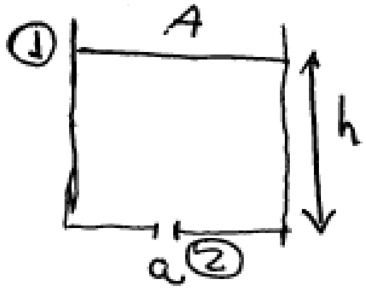
$$T = \frac{mg}{\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$$

3 Numa lata cilíndrica de área **A** coloca-se água até uma altura **h**. Pede-se:

a) Determine a velocidade **v** com que a água sai por um orifício de área **a** localizado no fundo. **(0.5 pontos)**

b) Que quantidade de água deve ser adicionada à lata por unidade de tempo para que o nível seja mantido constante? **(0.5 pontos)**

c) Caso não se adicione água na lata, a altura vai variar, calcule a vazão em função do tempo. **(1.5 pontos)**



a) Aplicando Bernoulli

$$P_1 + \rho g h + \frac{\rho}{2} V_1^2 = P_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2$$

Mas como o fluxo se conserva

$$A V_1 = a V_2$$

$$V_1 = \frac{a}{A} V_2$$

e $P_1 = P_{atm}$ e $P_2 = P_{atm}$

$$\cancel{P_{atm}} + \rho g h + \frac{\rho}{2}\left(\frac{a}{A}\right)^2 V_2^2 = \cancel{P_{atm}} + \frac{\rho}{2} V_2^2$$

$$\frac{\cancel{\rho}}{2} V_2^2 \left[1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2\right] = \cancel{\rho} g h$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{(1-(a/A)^2)}}$$

b) O fluxo de água saindo pela base é

$$\Phi = a V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{(1-(a/A)^2)}}\, a \left(\frac{m^3}{s}\right)$$

Assim temos que adicionar este fluxo p/ que o nível seja mantido constante!

c) O volume no instante de tempo t é $A h(t)$

O Volume no intante de tempo $t+\Delta t$ é $A h(t+\Delta t) = A(h-\Delta h)$

Assim $\Delta V = A(h(t+\Delta t) - h(t)) = \Delta t\, \Phi$

$$-A \Delta h = \sqrt{\frac{2gh}{(1-(a/A)^2}}\, a\, \Delta t$$

Se $\Delta t \to 0$

$$-A\,dh = \sqrt{\frac{2g}{(1-(a/A)^2}}\;a\,h^{1/2}dt$$

$$dh = -C\,h^{1/2}dt \quad \text{onde} \quad C = \sqrt{\frac{2g}{(1-(a/A)^2)}}\;\frac{a}{A}$$

$$\frac{dh}{h^{1/2}} = -C\,dt$$

$$\int_{h_0}^{h}\frac{dh}{h^{1/2}} = -C\int_0^t dt$$

$$2h^{1/2}\Big|_{h_0}^{h} = -Ct$$

$$h^{1/2}-h_0^{1/2} = -\frac{C}{2}t \Rightarrow h^{1/2} = h_0^{1/2}-\frac{C}{2}t$$

$$h = \left(h_0^{1/2}-\frac{C}{2}t\right)^2$$

Assim o vazão (fluxo) em função do tempo

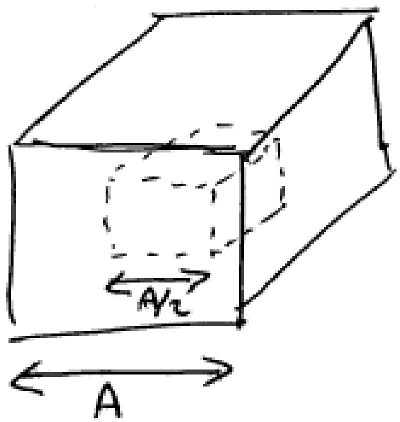
$$\Phi = \sqrt{\frac{2g}{(1-(a/A)^2}}\;a\left[h_0^{1/2}-\frac{C}{2}t\right]$$

4 Um cubo oco tem aresta externa **A** e aresta interna **A/2** e sua densidade é ρ_0. Este cubo esta flutuando em um líquido de densidade 2 ρ_0. Pede-se:

a) Qual é o valor do empuxo? **(0.5 pontos)**

b) Calcule a fração do volume do cubo que esta fora do líquido quando este flutua. **(1.0 ponto)**

b) Na sequência, o interior do cubo é preenchido com um líquido de densidade ρ. Qual deve ser esta densidade ρ para que o cubo flutue completamente imerso? **(1.0 ponto)**



a) A massa do cubo

$$M = \rho_0 \left[A^3 - \frac{A^3}{8} \right]$$

$$M = \frac{7\rho_0 A^3}{8}$$

Como o cubo esta flutuando, o empuxo é igual ao peso do corpo

$$E = P = Mg = \frac{7\rho_0}{8} A^3 g$$

b) Como $P_c = E$

$$Mg = 2\rho_0 V_{sub} g$$

$$\frac{7}{8} \cancel{\rho_0} A^3 \cancel{g} = 2 \cancel{\rho_0} V_{sub} \cancel{g}$$

$$V_{sub} = \frac{7}{16} A^3$$

a fração fora do líquido é $\frac{9}{16} A^3$

c) Novamente temos

$$P_c' = E$$

$$\frac{7\rho_0}{8} \cancel{A^3} \cancel{g} + \rho \frac{\cancel{A^3}}{8} \cancel{g} = 2\rho_0 \cancel{A^3} \cancel{g}$$

$$\frac{\rho}{8} = 2\rho_0 - \frac{7\rho_0}{8} \qquad \rho = (16-7)\rho_0 \Rightarrow \rho = 9\rho_0$$