Eletromagnetismo II

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 1° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 10

Nas duas aulas passadas nós derivamos as expressões para os potenciais escalar e vetor devido a fontes variáveis no tempo, utilizando o método das funções de Green,

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,', t - |\vec{r}-\vec{r}\,'/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d\tau'$$

e

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t - |\vec{r}-\vec{r}\,'/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d\tau'$$

onde a integral deve ser feita sobre o volume da fonte. Vimos também que estas expressões são compatíveis com o modelo físico da "esfera coletora de dados" de Panofsky e Phillips, ou seja, os potenciais no ponto $\vec{r}$ e no instante t são produzidos pelos valores das fontes que uma esfera coletora de dados, se propagando com velocidade c, mediu ao passar por elas no instante retardado

$$t' = t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$$

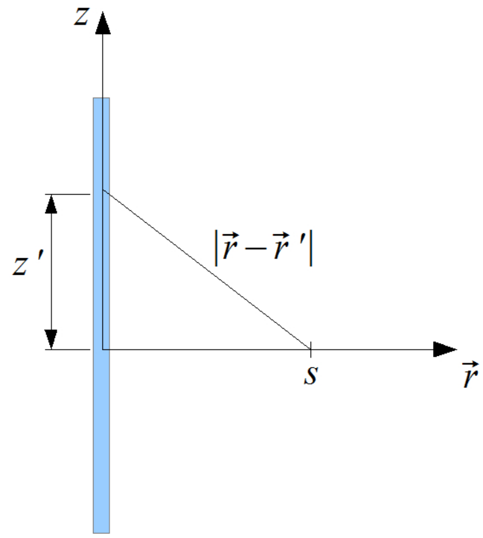
A fim de simplificar a notação, é comum utilizar colchetes para representar os valores das fontes no instante retardado,

$$\rho(\vec{r}\,', t - |\vec{r}-\vec{r}\,'/c) = [\rho(\vec{r}\,')]_{tr};$$

$$\vec{A}(\vec{r}\,', t - |\vec{r}-\vec{r}\,'/c) = [\vec{A}(\vec{r}\,')]_{tr}$$

A introdução do tempo retardado faz com que, nas integrais para calcular os potenciais, a dependência espacial apareça de forma intrínseca na dependência temporal das fontes, tornando o cálculo dessas integrais bem mais complexo que no caso estático. Este ponto é muito bem discutido no exemplo 10.2 e problemas 10.9 e 10.10 do livro texto, que vamos analisar a seguir.

Exemplo 10.2:



Um fio infinito transporta a corrente

$$I(t) = \begin{cases} 0; & t \leq 0 \\ I_0; & t > 0 \end{cases}$$

determine os campos elétrico e magnético produzidos.

Antes de resolver o problema, é interessante analisar porquê o campo elétrico é solicitado, já que não há fontes de carga, somente a corrente no fio. Acontece que o campo magnético produzido pela corrente deverá variar com o tempo, pois a corrente varia com o tempo. Esta variação temporal do campo magnético é que dá origem ao campo elétrico.

Vamos então utilizar a expressão do potencial vetor retardado para obter os campos. Sabemos que a corrente total que fluí pelo fio é dado por

$$I = \int \vec{j} \cdot \hat{n}\, dA$$

ou, usando coordenadas cilíndricas ($d\vec{A} = r\, dr d\theta \hat{e}_z$)

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int dr\, r\, j_z$$

Portanto, a expressão da densidade de corrente que produz a corrente I no fio é

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi r} \delta(r) \hat{e}_z$$

Então a expressão para o potencial vetor será

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\theta' \int \frac{\delta(r')\,r'}{2\pi r'}\,dr' \int dz'\,\frac{I\left(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\hat{e}_z$$

$$\therefore \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{e}_z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I\left(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dz' \qquad \left(\begin{array}{c}\text{o livro escreve esta fórmula sem}\\ \text{a justificar devidamente!}\end{array}\right)$$

Denotando o ponto onde queremos definir o campo por $\vec{r} = s\hat{e}_r$ e o ponto sobre a fonte por $\vec{r}\,' = z'\hat{e}_z$, temos

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| \;=\; \sqrt{s^2+z^2}$$

$$\therefore \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{e}_z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I\left(t-\sqrt{s^2+z^2}/c\right)}{\sqrt{s^2+z^2}}\,dz' \;=\; 2\frac{\mu_0}{4\pi}\hat{e}_z\int_0^{\infty}\frac{I\left(t-\sqrt{s^2+z^2}/c\right)}{\sqrt{s^2+z^2}}\,dz'$$

Mas

$$I\left(t-\sqrt{s^2+z^2}/c\right) = I(t) = \begin{cases} 0; & t-\dfrac{\sqrt{s^2+z^2}}{c} \le 0 \\ \\ I_0; & t-\dfrac{\sqrt{s^2+z^2}}{c} > 0 \end{cases}$$

Portanto a integral só deve se estender até o ponto z' tal que

$$t-\sqrt{s^2+z^2}/c > 0 \quad \therefore \quad c^2t^2 > s^2+z'^2 \quad \therefore \quad z'^2 < c^2t^2 - s^2$$

Então

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = 2\frac{\mu_0 I_0\hat{e}_z}{4\pi}\int_0^{\sqrt{c^2t^2-s^2}}\frac{dz'}{\sqrt{z'^2+s^2}} = \frac{\mu_0 I_0\hat{e}_z}{2\pi}\,ln\left[\frac{ct+\sqrt{c^2t^2-s^2}}{s}\right]}$$

Como não há potencial escalar ($\rho = 0$), temos

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 \hat{e}_z}{2\pi}\hat{e}_z \left[\frac{t + \dfrac{c^2 t}{\sqrt{c^2t^2 - s^2}}}{ct + \sqrt{c^2t^2 - s^2}} \right]$$

$$\therefore \qquad \boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi\sqrt{c^2t^2 - s^2}}\hat{e}_z; \qquad \underline{\underline{ct > s}}}$$

Vemos que $\vec{E} \to 0$ quando $t \to \infty$.

Sugerimos aos alunos completar o problema calculando a expressão para o campo magnético.

10.9 Neste problema, ao invés da corrente ser ligada instantaneamente, supõe-se que ela cresça linearmente com o tempo (item (a)),

$$I(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ \\ kt; & t > 0 \end{cases}$$

A integral é a mesma que a do problema anterior, ou seja,

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{2\pi}\hat{e}_z \int_0^\infty \frac{I\left(t - \sqrt{s^2+z^2}/c\right)}{\sqrt{s^2+z^2}}\,dz'$$

Outra vez, como $I(t') \neq 0$ somente para $t' > 0$, temos que impor $t - \sqrt{s^2+z^2}/c > 0$, ou seja, novamente a integral se estende até $z' = \sqrt{c^2t^2 - s^2}$,

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 k}{2\pi}\hat{e}_z \int_0^{\sqrt{c^2t^2-s^2}} \frac{t - \sqrt{s^2+z^2}/c}{\sqrt{s^2+z^2}}\,dz'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 k}{2\pi}\hat{e}_z \left[\underbrace{t\int_0^{\sqrt{c^2t^2-s^2}} \frac{dz'}{\sqrt{s^2+z^2}}}_{\text{mesma integral que no problema anterior}} - \frac{1}{c}\int_0^{\sqrt{c^2t^2-s^2}} dz' \right]$$

Portanto

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 k}{2\pi}\hat{e}_z \left[t\ln\left(\frac{ct + \sqrt{c^2t^2 - s^2}}{r}\right) - \frac{1}{c}\sqrt{c^2t^2 - s^2} \right]$$

Sugerimos aos alunos completarem o problema calculando as expressões para os campos

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0 k}{2\pi} ln\left[\frac{ct+\sqrt{c^2t^2-s^2}}{s}\right]\hat{e}_z \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 k}{2\pi sc}\sqrt{c^2t^2-s^2}\,\hat{e}_\phi; \qquad ct > s.$$

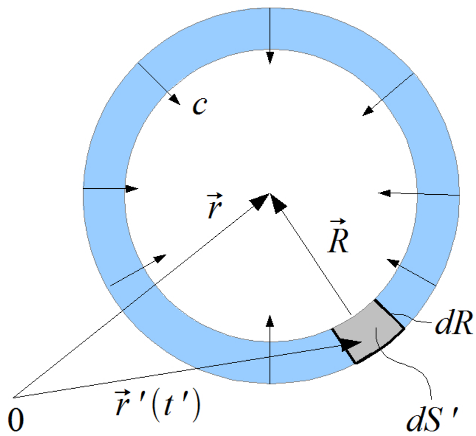
Recomendamos também que os alunos façam o item b) do mesmo problema e o problema 10.10.

No livro texto, as expressões para os potenciais retardados são utilizadas no cap. 11 para calcular os campos de radiação devido a fontes fixas. Isto foi feito para radiação de dipolo no curso Eletromagnetismo I e não será repedido neste curso. Os alunos interessados poderão ver este tópico diretamente na seção 11.1.2 do livro texto.

Neste caso, nosso interesse é obter as expressões para o campo produzido por cargas em movimento. Este tópico é discutido na seção 10.3 do livro texto mas utilizando um modelo não satisfatório para evitar cálculos mais difíceis. Nós vamos derivar os potenciais retardados para cargas em movimento utilizando um modelo físico mais apropriado, usado também por Richard Feyman [The Feyman Lectures on Physics, Vol II, seção 21.5].

Os Potenciais de Lienard-Wiechert

Para calcular o campo produzido por cargas em movimento utilizamos novamente os potenciais retardados. Neste caso, no entanto, o problema é muito mais complicado que para antenas (ou fontes) fixas. O problema é que $\int [\rho] d\tau'$ em geral não irá ser igual à carga total do sistema.



A razão é que as várias contribuições para a integral são calculadas em instantes distintos. Para entender melhor o problema, consideremos a "esfera coletora de dados", centrada no observados, que vimos anteriormente. A esfera converge para o ponto de observação $\vec{r}$ com velocidade c. Se as cargas do sistema estiverem em movimento com uma componente média da velocidade na mesma direção do movimento da esfera, a integral de volume da densidade de carga retardada dará um valor aparente maior que a carga total do sistema. Se a componente média da velocidade de cargas for oposto ao movimento da esfera que contrai, a integral de volume da densidade de carga retardada dará um valor menor que a carga total do sistema.

Um outro problema surge com as cargas em movimento. Em geral, a equação do movimento para cargas puntiformes q é dada numa forma paramétrica,

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_q(t_r),$$

ou seja, a posição da carga é conhecida no instante retardado t_r. A relação entre o instante atual, t, quando se determina os potenciais $\phi(\vec{r},t)$ e $\vec{A}(\vec{r},t)$, e o instante retardado é uma relação implícita, geralmente não linear,

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|}{c} = t - \frac{R}{c}; \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q$$

Nem sempre é possível inverter esta relação e, por isso, procuramos expressar os potenciais produzidos por uma carga em movimento em termos de sua posição retardada e não se sua posição atual. Para isto, vamos tentar obter a expressão correta para $[\rho]d\tau'$ para substituir na integral.

Vamos considerar o campo produzido por uma carga em movimento com velocidade que pode até mesmo ser comparável a c, a velocidade da luz. Suponhamos que esta carga seja um sistema de

i) carga total q

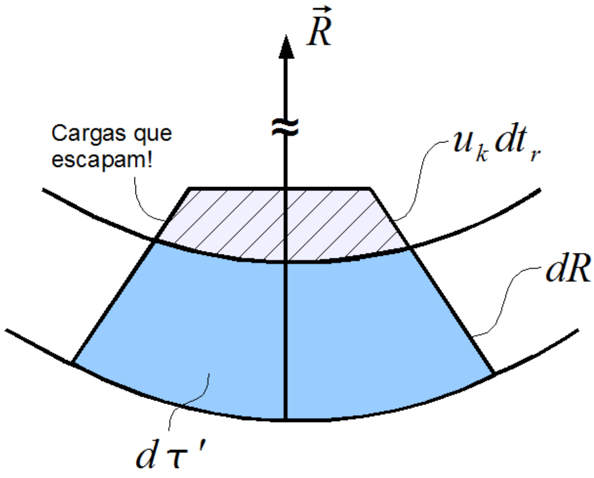
ii) com volume não especificado, mas pequeno o suficiente para supor que todas as suas partes se deslocam com a mesma velocidade $\vec{u} = \frac{d\vec{r}_q}{dt_r}$

A posição da carga é dada no instante retardado $t_r = t - R/c$, onde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q(t_r)$, quando a "esfera coletora de informação" passa. Existem duas contribuições à carga "medida" pela esfera:

a) Se a carga estiver em repouso, a quantidade de carga que a esfera irá amostrar quando encolhe de dR é dada por

$$[\rho]ds'dR$$

b) Por outro lado, se $\vec{u}$ for diferente de zero, a esfera deixará de detectar uma quantidade de carga devido ao deslocamento radial das cargas para fora do volume τ'; esta quantidade é dada por



$$[\rho] ds' \frac{\vec{u}\cdot\vec{R}}{R} dt_r$$

Mas

$$dt_r = \frac{dR}{c},$$

já que $\vec{r}$ é fixo e $R = |\vec{r} - \vec{r}_q| = |\vec{r}_q - \vec{r}|$. Portanto a quantidade de carga medida pela esfera condutora dentro do volume $d\tau'$ é

$$dq = [\rho] ds' dR - [\rho]\frac{\vec{u}\cdot\vec{R}}{R} ds' \frac{dR}{c}$$

Mas $ds' dR = d\tau'$; então

$$dq = \left[1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{R}}{Rc}\right][\rho] d\tau' \qquad \therefore \qquad [\rho] d\tau' = \frac{dq}{1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{R}}{Rc}}$$

Esta é a expressão que buscávamos para substituir no integrando do potencial retardado

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - |\vec{r} - \vec{r}\,'|/c\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{[\rho]}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{[\rho]}{R} d\tau'$$

Portanto

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{dq}{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}$$

onde definimos

$$\vec{\beta} = \frac{u}{c}.$$

Como a densidade de corrente é simplesmente a densidade de carga multiplicado pela velocidade $\vec{u}$ da carga, uma expressão análoga é obtida para $\vec{A}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{u}\,dq}{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}$$

É bom realçar que $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r_q}$ e $\vec{u} = [d\vec{r}/dt]_{tr}$, ou seja, todas as grandezas são dadas no instante retardado, que ainda é conhecido somente de forma implícita. No limite de carga pontual, podemos então considerar que $\vec{R}$ e $\vec{u}$ sejam uniformes sobre toda a extensão da carga e obtemos finalmente

$$\boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{[R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}]}; \qquad \vec{A}(\vec{r},t)\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{u}]}{[R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}]},}$$

onde os colchetes indicam que a grandeza tem que ser calculada no instante retardado

$$t_r = t - \frac{R}{c} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)}{c}$$

Estas expressões recebem o nome de potenciais de Lienard-Wiechert, que as obtiveram antes da teoria da relatividade (1890 e 1900, respectivamente). Do ponto de vista clássico, $\vec{u}$ é a velocidade da carga no referencial absoluto no qual as equações de Maxwell são válidas. Com o surgimento da teoria da relatividade, o cálculo relativístico correto do campo produzido por uma carga em movimento foi feito, obtendo-se o mesmo resultado! Nesse caso, $\vec{u}$ possa ser a velocidade relativa entre o observador e a carga no instante em que o sinal foi emitido.

Nota: A derivação dos potenciais de Lienard-Wiechert pode ser feita de forma direta, representando a carga por uma função δ, sem apelar para o artifício da “esfera coletora de dados”. A derivação é, no entanto, mais complicada e menos instrutiva, fisicamente (veja J.B. Marion, seção 7.3). A derivação que apresentamos é discutida mais detalhadamente em Feyman Vol. II, seção 21.5.

Para firmar a interpretação dos potenciais de Lienard-Wiechert, é importante agora fazer o exemplo 10.3 do livro texto.