Introdução à análise de sinais

PEF 6000 - Tópicos especiais em dinâmica de estruturas

Prof. Dr. Guilherme R. Franzini

Resumo

1. Objetivos
2. Série de Fourier
3. Transformada de Fourier
4. Aspectos práticos de análise de sinais utilizando o MATLAB®
5. Aplicações

Resumo

1. Objetivos
2. Série de Fourier
3. Transformada de Fourier
4. Aspectos práticos de análise de sinais utilizando o MATLAB®
5. Aplicações

- Apresentar aspectos relacionados à Série de Fourier e à Transformada de Fourier;
- Introduzir aspectos práticos de análise de sinais em ambiente MATLAB®, indicando suas aplicações em Engenharia de Estruturas.

Resumo

1. Objetivos
2. Série de Fourier
3. Transformada de Fourier
4. Aspectos práticos de análise de sinais utilizando o MATLAB®
5. Aplicações

Definições

- Uma função $x(t)$ é periódica de período T se $x(t) = x(t + T), \forall t$;
- Seja $x(t)$ um sinal periódico de período $T = 2\pi/\omega$. A Série de Fourier deste sinal consiste na projeção deste sinal em um conjunto de funções harmônicas da forma $[\cos n\omega t, \sin n\omega t], n = 1, 2, 3 \ldots, \infty$;
- Considerando o seguinte produto interno $< f, g >= \int_0^T f(t)g(t)dt$ é trivial notar que as funções trigonométricas formam o conjunto ortogonal;

- Logo $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$;
- $a_n = \frac{\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt}{\int_0^T \cos^2(n\omega t)dt} = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt, n = 1, 2, \ldots;$
- $b_n = \frac{\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt}{\int_0^T \sin^2(n\omega t)dt} = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt, n = 1, 2, \ldots;$
- $a_0 = \frac{\int_0^T x(t)\cos(0\omega t)dt}{\int_0^T \cos^2(0\omega t)dt} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$; **Média do sinal**

- A Série de Fourier pode ser escrita tanto na forma trigonométrica quanto na forma de uma exponencial complexa. Para tanto, basta lembrar da fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.
- Logo, a forma complexa da Série de Fourier é $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$, com $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-in\omega t} dt$

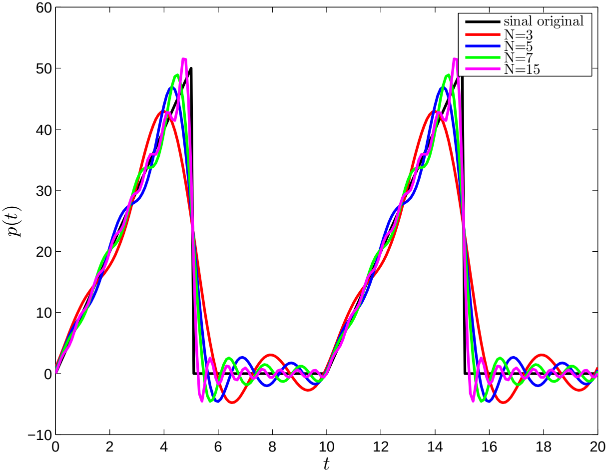
Expansão, em Série de Fourier, de uma função dente-de-serra, dada em um período T_p por:

$$p(t) = p_0 t, T_p k < t < T_p(2k+1)/2, k = 0, 1, 2 \ldots \tag{1}$$

$$p(t) = 0, T_p(2k+1)/2 < t < T_p(k+1), k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

- Frequência fundamental $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T_p}$
- Série truncada em N termos
- $p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\bar{\omega}t) + b_n \sin(n\bar{\omega}t)$
- $a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos(n\bar{\omega}t)$
- $b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin(n\bar{\omega}t)$

Considerando $p_0 = 10$ e $T_p = 10$, temos:



Resumo

1. Objetivos
2. Série de Fourier
3. Transformada de Fourier
4. Aspectos práticos de análise de sinais utilizando o MATLAB®
5. Aplicações

- A Série de Fourier é apropriada para o tratamento de sinais periódicos. Como proceder quando o sinal é aperiódico?
- Lançamos mão do seguinte artifício matemático. Um sinal aperiódico é um sinal periódico com período $T \to \infty$

- Na Série de Fourier na forma complexa,o intervalo entre as frequências é ω. Aqui, este intervalo será definido como $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$
- Logo:

$$x(t) = \lim_{t \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T x(t) e^{-in\omega t} dt \right) e^{in\omega t}$$

.

- Quando $t \to \infty$, o intervalo entre as frequências tende a $d\omega$. Já o produto $n\Delta\omega$ tende a ω $n \to \infty$. Assim:
-

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) d\omega$$

Definimos:

- Transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

- Transformada de Fourier inversa:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Resumo

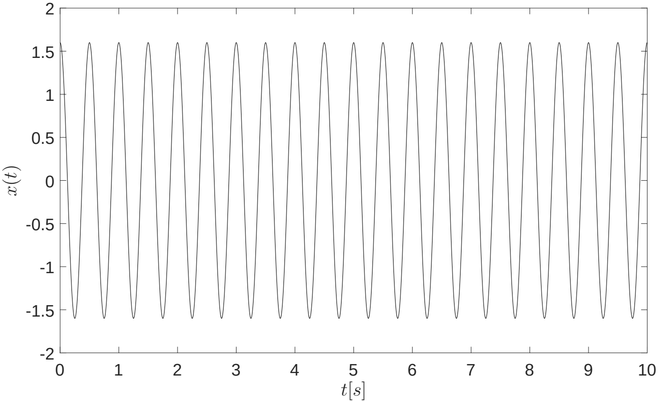
- Na prática, quando vamos analisar sinais obtidos tanto por meio de experimentos quanto por meio de simulações numéricas, o tempo não é uma grandeza contínua;
- Foco desta apresentação: Condições onde o tempo é dado por um conjunto de N pontos (tamanho da amostra), amostrados com frequência constante e igual a f_s (frequência de amostragem). O período de amostragem é $T_s = 1/f_s$.
- Faz-se necessário, então, o uso da Transformada de Fourier Discreta. Um algoritmo bastante eficiente para este cálculo é denominado *Fast Fourier Transform - FFT.*

Veremos como obter, a partir de um sinal $x(t)$, o espectro de amplitude $U(f)$ no MATLAB®. Fisicamente $U(f)$ ilustra a amplitude de cada componente de frequência do sinal.

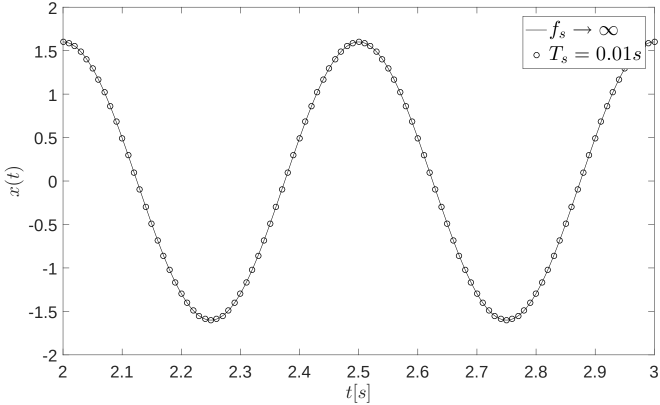
Como o tempo passa a ser descrito de maneira discreta, o vetor com as frequências a serem obtidas também será dada de forma discreta.

Considere o sinal de tempo contínuo dado por $x(t) = A\cos(\omega t)$, com $A = 1.6$ e $\omega = 4\pi \mathrm{rad/s}$

Sinal de tempo contínuo



Considere o sinal de tempo discreto x_d obtido a partir de experimentos com período de amostragem $T_s = 0{,}01\mathrm{s}$.



Passo 1

Em um primeiro momento, obtemos as componentes complexas de frequência a partir da Transformada Discreta de Fourier. Em seguida, construiremos o vetor correspondente às frequências obtidas.

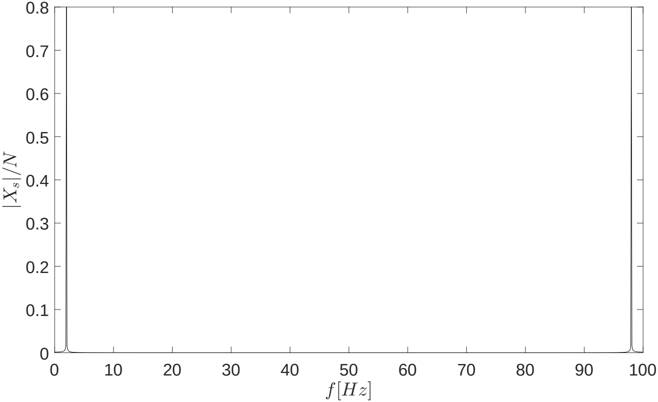
- Comando 1: $Xs = fft(x)$;
- Comando 2: $N = size(x)$;
- Comando 3: $freq = [0 : 1 : N - 1] * fs/N$;

Passo 2

Agora, obteremos a amplitude de cada componente de frequência. Isto é feito por meio do módulo dos números complexos obtidos a partir da Transformada de Fourier. A divisão pelo tamanho da amostra é devida ao algoritmo FFT.

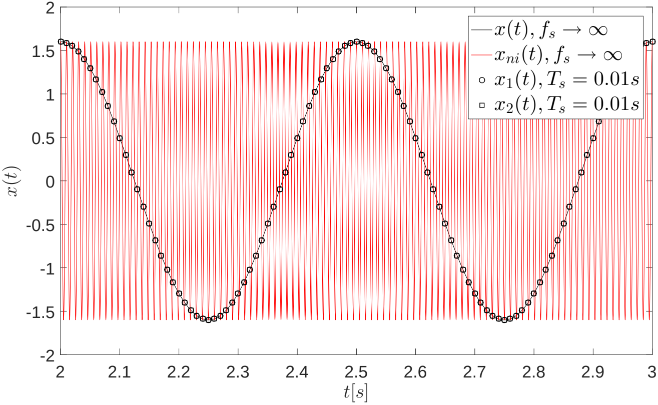
- Comando 4: $absXs = abs(Xs)/N;$

Resultado ao final do Passo 2

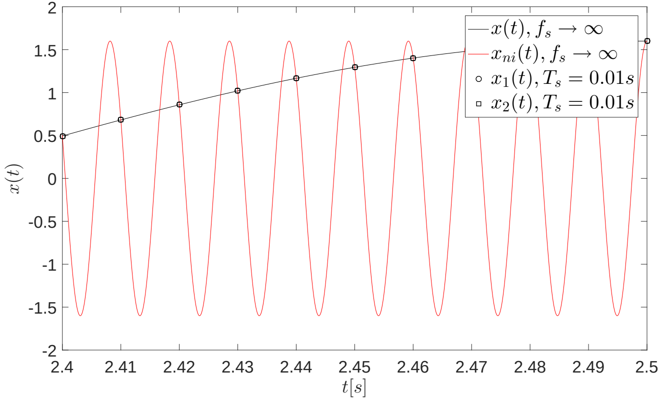


Passo 3

A análise espectral em tempo discreto identificou duas frequências ($2\mathrm{Hz}$ e $98\mathrm{Hz}$), com amplitudes iguais à metade do sinal de tempo contínuo. Note a simetria com relação à $f_s/2$. Vejamos qualitativamente.



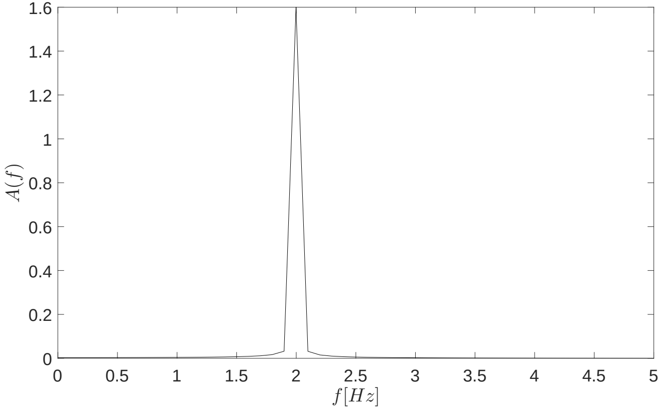
$x(t), f_s \to \infty$
$x_{ni}(t), f_s \to \infty$
$x_1(t), T_s = 0.01s$
$x_2(t), T_s = 0.01s$
$x(t)$
$t[s]$
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
2.1
2.2
2.3
2.4
2.5
2.6
2.7
2.8
2.9
3


$x(t), f_s \to \infty$
$x_{ni}(t), f_s \to \infty$
$x_1(t), T_s = 0.01s$
$x_2(t), T_s = 0.01s$
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
$x(t)$
2.4
2.41
2.42
2.43
2.44
2.45
2.46
2.47
2.48
2.49
2.5
$t[s]$

Espectro de amplitude

- Vimos que a análise espectral em tempo discreto fornece duas frequências, a frequência de interesse e uma alta frequência sem interesse (*aliasing*). A cada frequência, está associada uma amplitude igual à metade do sinal original.
- A obtenção de um espectro de amplitude representativo deve considerar apenas as frequências inferiores a $f_s/2$ e a amplitude do espectro deve ser multiplicada por 2.
- Logo, a maior frequência de interesse de um sinal amostrado com f_s deve ser inferior a $f_s/2$ (Teorema da Amostragem ou Teorema de Nyquist).

Espectro de amplitude $A(f)$



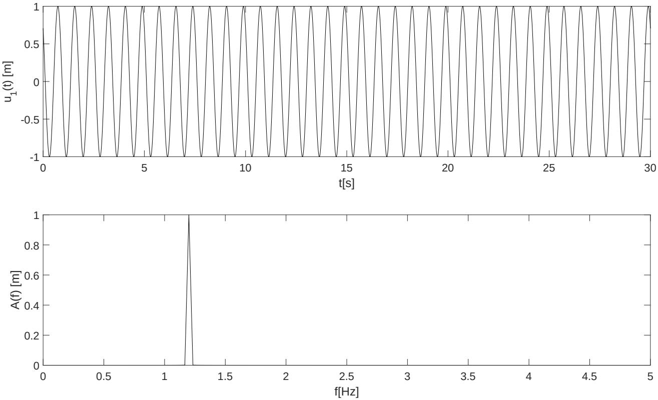
```
function [freq,Amp,fd,Ad]=EspectroAmplitude(t,sinal)

%% Calcula o espectro de amplitude do sinal
%[freq,Amp,fd,Ad]=EspectroAmplitude(t,sinal)
% Entradas - t -> vetor de tempo
%            sinal
% saida    - freq -> vetor de frequencias
%          - Amp  -> vetor de amplitudes
%          - fd   -> frequencia dominante
%          - Ad   -> amplitude na frequencia dominante
%%
N=length(t);
deltat=t(2)-t(1);
deltaf=1/deltat;
freq=[0:N-1]*deltaf/N;
Xs=fft(sinal);
Amp=abs(Xs)/N;
Amp=2*Amp(1:fix(N/2));
freq=freq(1:fix(N/2));
[Ad,indice]=max(Amp);
fd=freq(indice);
```

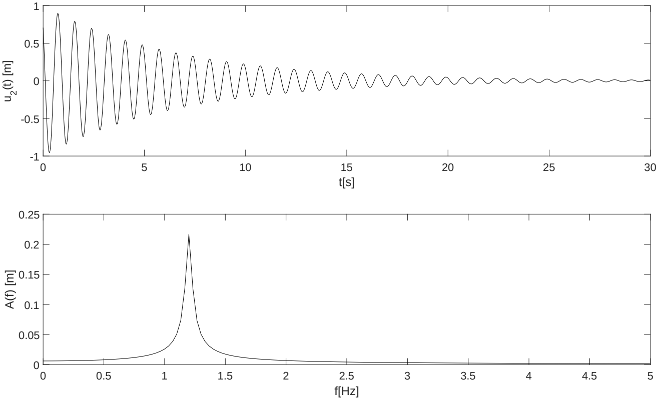
Resumo

1. Objetivos
2. Série de Fourier
3. Transformada de Fourier
4. Aspectos práticos de análise de sinais utilizando o MATLAB®
5. Aplicações

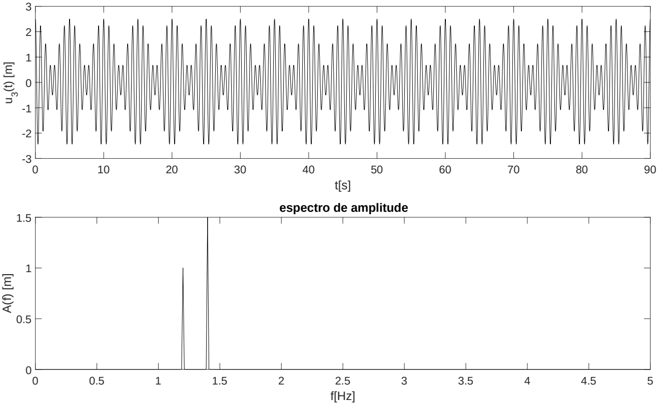
$$\rho = 1\mathrm{m}; f = 1{,}2\mathrm{Hz}; \theta = \pi/4$$



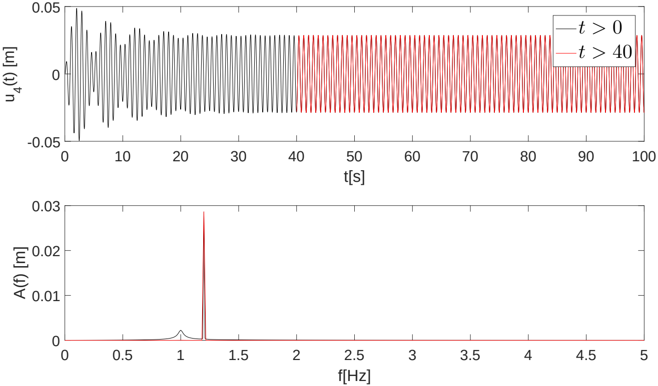
$$\rho = 1\mathrm{m}; f = 1{,}2\mathrm{Hz}; \zeta = 0.02; \theta = \pi/4$$



$$\rho_1 = 1\mathrm{m};\ f_1 = 1{,}2\mathrm{Hz};\ \rho_2 = 1.5\mathrm{m};\ f_2 = 1{,}4\mathrm{Hz}$$



$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = p_0/m\cos(\bar{\omega}t)$$
$$u(0) = 0\mathrm{m};\ \dot{u}(0) = 0\mathrm{m/s};\ m = 1\mathrm{kg};\ k = 4\pi^2\mathrm{N/m};\ \bar{\omega} = 1.2\omega;\ \zeta = 2\%$$



$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = p_0/m\cos(\bar{\omega}t)$$
$$u(0) = 0\mathrm{m};\, \dot{u}(0) = 0\mathrm{m/s};\, m = 1\mathrm{kg};\, k = 4\pi^2\mathrm{N/m};\, \bar{\omega} = 1.2\omega;\, \zeta = 0$$