4a Experiência : Pêndulo de Torção

4300254 - Laboratório de Mecânica - 1o Semestre/2015

1.Introdução

O propósito desta experiência é estudar oscilações de um pêndulo de torção. O pêndulo de torção da experiência consiste de um disco de massa M suspenso por um fio de aço, como mostrado na Figura 1. Além do disco, existe um pino central para fixação do fio e um tubo cilíndrico (caneca) na parte inferior. Girando o disco de um ângulo θ_0 em torno do fio e soltando, o disco passa a realizar oscilações angulares em relação à posição de equilíbrio.
Por "oscilações livres" entende-se o movimento do pêndulo realizado no ar, embora exista amortecimento pequeno devido ao atrito viscoso com o ar e à torção do fio. Uma caneca na parte inferior do pêndulo pode ser ser mergulhada num líquido e, neste caso, o movimento será bem mais amortecido.

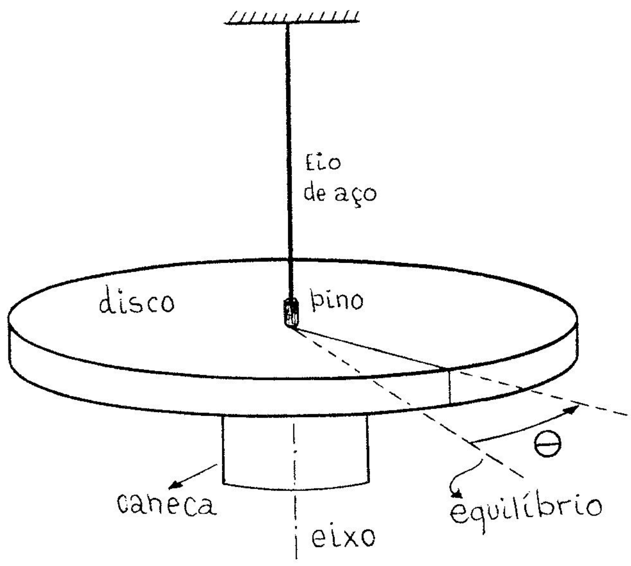

Figura 1. Arranjo experimental

1.1. Oscilações livres (Amortecimento pequeno)

Considerando rotação do disco em torno de eixo fixo, a equação para o ângulo $\theta(t)$ é dada por[1]

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau \tag{1}$$

onde I é o momento de inércia e τ é o torque, ambos em relação ao eixo de rotação.

Se o disco é deslocado de um ângulo θ do equilíbrio, o fio (torcido) exerce um torque que tende a restaurar o equilíbrio. Para pequenos deslocamentos angulares, o torque restaurador é dado por

$$\tau_0 = -k\,\theta \tag{2}$$

onde k é uma constante que depende do material e dimensões do fio. Assim, o torque restaurador do equilíbrio é proporcional ao deslocamento angular θ, desde que esse deslocamento seja pequeno.

Para movimento no ar, o atrito se deve à viscosidade do ar e atrito interno do fio. Ignorando estes atritos pequenos, o torque total é dado pela Equação 2 e a solução da Equação 1 é dada por

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \qquad \text{onde} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}} \tag{3}$$

As constantes θ_0 e ϕ devem ser determinadas a partir das condições iniciais do movimento.

[1] Ver Exercícios 1 e 2.

Por exemplo, se o rotor é solto no instante $t = 0$, a velocidade angular[2] $\Omega = d\theta/dt = 0$ neste instante. Isto é,

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = -\theta_0\,\omega_0\,sin\,(\,\omega_0 t + \phi\,) = sin\,(\,\phi\,) = 0 \qquad \text{e resulta} \qquad \phi = 0 \tag{4}$$

Assim, a solução para $\theta(t)$ pode ser escrita como

$$\theta\,(t) = \theta_0 \cos\omega_0 t \qquad \text{onde} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}} \tag{5}$$

e θ_o é a amplitude inicial do movimento $(\,\theta(\,t=0\,) = \theta_0\,)$.

O período T_0 das oscilações livres é dado por

$$T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0} \qquad \text{onde} \qquad \omega_o = \text{frequência angular do movimento} \tag{6}$$

1.2. Oscilações amortecidas

Quando a caneca do pêndulo de torção é imersa em óleo, por exemplo, o atrito viscoso é bem maior. As forças de atrito viscoso para baixas velocidades são proporcionais às velocidades e opostas às mesmas. Assim, resulta que o torque devido ao atrito viscoso também é proporcional à velocidade angular de rotação e oposto à rotação:

$$\tau_{at} = -\,b\,\frac{d\theta}{dt} \qquad \text{onde} \qquad \Omega = \frac{d\theta}{dt} \ \text{ é a velocidade angular de rotação} \tag{7}$$

O torque total sobre o rotor é $\tau_{total} = \tau_o + \tau_{at}$, com τ_o dado pela Equação 2. Substituindo na Equação 1, obtém-se a seguinte equação diferencial

$$I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\,\frac{d\theta}{dt} + k\,\theta = 0 \tag{8}$$

A solução desta equação para amortecimento não muito grande é dada por[3]

$$\theta\,(t) = \theta_a\,e^{-\gamma t}\,\cos\,(\,\omega_a t + \phi_a\,) \tag{9}$$

onde $\qquad \gamma = \dfrac{b}{2\,I} \qquad$ e $\qquad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

As constantes θ_a e ϕ_a devem ser determinadas a partir das condições iniciais do movimento. Observar que $T_a = \frac{2\,\pi}{\omega_a}$ é o período das oscilações amortecidas, que é um pouco diferente de T_o.

Admitindo que o rotor é solto no instante $t = 0$ $(\Omega = 0$ em $t = 0\,)$ com amplitude inicial θ_o, pode ser mostrado que

$$tg\,\phi_a = -\,\frac{\gamma}{\omega_a} \qquad \text{e} \qquad \theta_a = \theta_0\sqrt{(\,\frac{\gamma}{\omega_a}\,)^2 + 1} = \frac{\theta_0}{cos\,\phi_a} \tag{10}$$

[2]A velocidade angular é convencionalmente indicada por ω, símbolo também convencionalmente usado para a frequência angular. Deve ser observado entretanto, que neste caso são grandezas relacionadas, mas diferentes. Por isso, a velocidade angular é aqui indicada por Ω.

[3]Por exemplo, ver K. R. Symon, *Mecânica*, Editora Campus Ltda, Rio de Janeiro (1982). Esta solução corresponde ao chamado amortecimento subcrítico. Conforme o amortecimento aumenta muito chega-se a uma condição chamada amortecimento crítico em que o rotor volta rapidamente para o equilíbrio, mas as oscilações desaparecem. Aumentando ainda mais o amortecimento, a condição é chamada amortecimento supercrítico.

A velocidade angular é dada por

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = -\theta_a e^{-\gamma t} \left(\gamma \cos(\omega_a t + \phi_a) + \omega_a \, sen(\omega_a t + \phi_a) \right) \tag{11}$$

Os **pontos de retorno** do movimento (à direita e à esquerda) podem ser determinados pela condição $\Omega = 0$. Como pode ser mostrado a partir da Equação 11, os pontos de retorno ocorrem nos instantes t_m tais que:

$$\omega_a t_m = m\pi \qquad \text{onde} \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots \tag{12}$$

Substituindo esta condição na Equação 9, obtém-se para os pontos de retorno

$$\theta(t_m) = \theta_a e^{-\gamma t_m} \cos(m\pi + \phi_a) \qquad \text{ou} \qquad \theta(t_m) = \pm\theta_a e^{-\gamma t_m} \cos\phi_a \tag{13}$$

Utilizando a relação $\theta_0 = \theta_a \cos\phi_a$ (Equação 10), resultam as amplitudes nos pontos de retorno:

$$\theta_m = \pm\theta_0 e^{-\gamma t_m} \qquad \text{onde} \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{14}$$

onde os sinais $\pm$ se referem a pontos de retorno à direita e à esquerda. Deve ser observado que

$$\omega_a t_m = m\pi \qquad \text{ou} \qquad \frac{2\pi}{T_a} t_m = m\pi \qquad \text{ou ainda} \qquad t_m = \frac{m}{2} T_a \tag{15}$$

Em módulo, as amplitudes máximas de oscilação (θ_m) ocorrem nos pontos de retorno e são dadas por

$$\theta_m = \theta_0 e^{-\gamma t_m} \qquad \text{onde} \qquad t_m = \frac{m}{2} T_a \qquad \text{e} \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{16}$$

O índice m não é muito conveniente porque parte de zero. Em análise de dados[4], pontos experimentais são geralmente indexados a partir de 1. Por isso, é mais conveniente usar um índice $i = m + 1$. Assim, a Equação 16 pode ser reescrita como

$$\theta_i = \theta_1 e^{-\gamma t_i} \qquad \text{onde} \qquad t_i = \frac{T_a}{2} i \qquad \text{e} \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{17}$$

Observar que na troca de índices $m \rightarrow i$, θ_0 muda para θ_1.

Calculando o logaritmo dos dois lados da equação acima, obtém-se

$$\log\theta_i = \log\theta_1 - \frac{\gamma}{\ln 10} t_i \tag{18}$$

Experimentalmente, o ângulo θ_i pode ser obtido medindo o deslocamento z_i ao longo da borda do disco que é diretamente proporcional ao ângulo θ_i. Se R é o raio do disco,

$$z_i = R\,\theta_i \qquad (\text{onde } \theta_i \text{ deve ser dado em radianos}) \tag{19}$$

Substituindo $t_i = (T_a/2)\,i$ e $\theta_i = z_i/R$ na Equação 18 obtém-se

$$\log z_i = \log(R\,\theta_1) - \left(\frac{\gamma}{\ln 10} \frac{T_a}{2}\right) i \qquad \text{ou} \qquad y = A x + B \tag{20}$$

onde

$$y_i = \log z_i, \qquad x_i \equiv i, \qquad B = \log R\,\theta_1 \qquad \text{e} \qquad A = -\frac{\gamma T_a}{2 \ln 10}. \tag{21}$$

Assim, espera-se que o gráfico de $y_i \times x_i$ seja uma reta, com os coeficientes A e B acima.

[4]Por exemplo, ver fórmulas para cálculo de média, desvio padrão, ajuste de reta, etc.

2. Procedimento e cálculos

2.1. Oscilações livres

Atenção: Não mergulhe o rotor em óleo até terminar e conferir cuidadosamente as medições desta parte da experiência (oscilações livres).

Período T_0

- Medir o tempo de 12 oscilações completas do rotor ($t = 12T_0$), repetindo o procedimento 5 vezes.

Observações:
1. Uma oscilação completa é um movimento de "ida e volta" completo do rotor.
2. Um deslocamento inicial de aproximadamente $12\,cm$ é razoável. Amplitudes grandes permitem visualizar melhor os pontos de retorno do movimento. Entretanto, amplitudes exageradas podem aumentar muito o atrito e até ultrapassar o limite de linearidade da torção do fio.
3. Para reduzir erro sistemático na cronometragem é preferível disparar o cronômetro quando o pêndulo atinge um ponto de retorno do movimento (contando as oscilações e cronometrando o tempo a partir daí).

- Calcular o período T_0 das oscilações livres e respectiva incerteza. Apresentar todas as expressões utilizadas nos cálculos (semelhantes aos da Experiência 1).

Amplitudes das oscilações livres

- Medir a posição de equilíbrio do rotor.

  É mais conveniente escolher uma referência qualquer (z_{equil}) de tal forma que a emenda da fita métrica na borda do disco não cruze o marcador de referência. Se necessário gire o suporte 180^o.

- Medir pontos de retorno do movimento para 10 oscilações completas do rotor.

  Os pontos de retorno $z_{\leftarrow}$ e $z_{\rightarrow}$ à esquerda e à direita podem ser lidos diretamente na fita métrica e os pontos de retorno relativos a zero são:

$$z_- = z_{\leftarrow} - z_{equil} \qquad \text{e} \qquad z_+ = z_{\rightarrow} - z_{equil}$$

Obs.: Na medida do possível, deve-se evitar ao máximo o movimento pendular do rotor, que dificulta bastante a medição de amplitudes.

- Montar tabela com valores de $x_i \equiv i$ e z_i, onde $z_i \equiv z_+$ ou z_-, conforme i seja impar ou par.
- A partir dos máximos e mínimos das oscilações ($z_i \times i$), esboçar o gráfico $z \times x$.

2.2. Oscilações com amortecimento viscoso

Período T_a

- Mergulhar a caneca do rotor no recipiente com óleo .
- Medir o tempo de 8 oscilações completas do rotor ($t = 8\,T_a$), repetindo o procedimento 5 vezes.
- Calcular o período T_a das oscilações e respectiva incerteza. Apresentar todas as expressões utilizadas nos cálculos.

Amplitudes das oscilações amortecidas

- Medir a posição de equilíbrio do rotor.
- Medir pontos de retorno do movimento para 10 oscilações completas do rotor (se possível).
- Montar tabela com valores de $x_i \equiv i$, z_i , σ_{zi} , $y_i \equiv \log\, z_i$ e σ_{yi} , onde $z_i \equiv z_+$ ou z_- , conforme o valor de i seja impar ou par
- A partir dos máximos e mínimos das oscilações ($z_i \times i$), esboçar o gráfico $z \times x$. Esboçar também as envoltórias das oscilações pelos ramos positivo e negativo.
- Fazer gráfico $y_i \times x_i$ (isto é, $\log z_i \times i$).
- Ajustar os parâmetros da reta $y = A\,x + B$ pelo método dos mínimos quadrados.
- Determinar γ e a respectiva incerteza.
- Calcular γ a partir de (ver Exercício 4) :

$$\gamma = 2\pi\sqrt{\frac{1}{T_o^2} - \frac{1}{T_a^2}}$$

Discutir o resultado e, se possível, comparar com o valor anterior.

Folha de dados - Experiência 4 - Pêndulo de torção

Equipe: .... Turma:...............
.... Data: ....
.... Pêndulo Nº: ....

Medições preliminares e dados iniciais

Nº do pêndulo:......... $R = (\qquad \pm \qquad)\,cm$

Tabela 1. Medições de tempo de 12 oscilações livres do rotor.

τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	$\overline{\tau}\,(s)$	$\sigma_{\overline{\tau}}\,(s)$	$\sigma_\tau\,(s)$

Tabela 2.
Amplitudes de oscilações livres.

$x_{equil} = (\qquad \pm \qquad)\,cm$

$x_{\leftarrow}\,(cm)$	$x_{\rightarrow}\,(cm)$
$\sigma =$	$\sigma =$

Tabela 3.
Amplitudes de oscilações amortecidas.

$x_{equil} = (\qquad \pm \qquad)\,cm$

$x_{\leftarrow}\,(cm)$	$x_{\rightarrow}\,(cm)$
$\sigma =$	$\sigma =$

Tabela 4. Medições de tempo de 8 oscilações amortecidas do rotor.

τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	$\overline{\tau}\,(s)$	$\sigma_{\overline{\tau}}\,(s)$	$\sigma_\tau\,(s)$