Instituto de Física

Versão online disponível em: http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=6840&section=1

Experiência 1. Linhas de Transmissão

Objetivos

- Medir a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética numa linha de transmissão constituída por um cabo coaxial;
- Estudar os efeitos da impedância de terminação numa linha de transmissão constituída por um cabo coaxial;

Introdução

Nesta experiência vamos estudar os aspectos da propagação de ondas eletromagnéticas numa linha de transmissão constituída de um cabo coaxial, incluindo a determinação da velocidade de propagação, efeitos de impedância e efeitos associados à terminação da linha. Introduziremos o tema, determinando os efeitos da propagação de uma onda em uma corda. Dado que estes efeitos são propriedades de todos os *fenômenos ondulatórios*, eles também estarão presentes em ondas eletromagnéticas.

Onda numa Corda

A equação diferencial que rege a propagação de uma onda transversal em uma corda tem expressão:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0$$

onde v é a velocidade de propagação da onda nesse meio e está associada a T, força que tensiona a corda, e ρ, sua densidade linear, dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Uma das soluções para essa equação é a função de onda $y(x,t) = y_0 sen(kx - wt)$

onde y_0 é a amplitude da onda, $k=2\pi/\lambda$ é o número de onda e $\omega=2\pi f$ representa a freqüência angular. A relação entre a velocidade de propagação da onda, a freqüência e o comprimento de onda é dada por:

Quando uma onda encontra um obstáculo em seu caminho, ela sofre reflexão. No caso de uma corda, por exemplo, o comportamento do pulso de onda ao longo de seu caminho varia segundo o tipo de obstáculo encontrado. Se a extremidade da corda está fixa à uma parede (Fig. 1), o pulso de onda refletido mantém todas as suas características iniciais, porém sofre uma mudança de fase de 180° (π). Se a extremidade da corda puder se mover (Fig. 2), então nenhuma alteração é observada na fase do pulso refletido com relação ao pulso incidente, a não ser pela mudança no sentido de propagação da onda

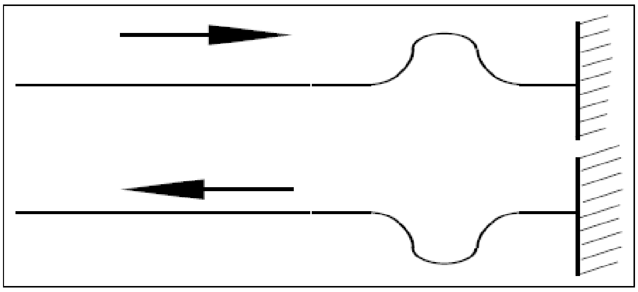

Figura 1 Um pulso que se propaga numa corda que tem a extremidade presa retorna *com diferença de fase de 180° (π radianos)*, que inverte sua amplitude. Esta condição decorre da condição que proibide o movimento para aquele ponto da corda

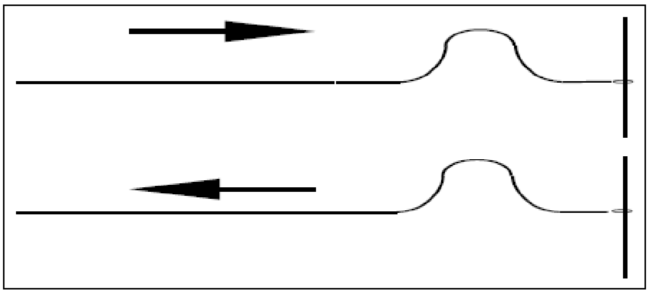

Figura 2 Um pulso se propaga numa corda que tem a extremidade livre retorna *com a mesma fase*. Isto acontece porque a extremidade livre irá se deslocar sob o pulso incidente.

Uma situação intermediária, na qual a extremidade da corda não se encontra rigidamente presa e nem é mantida completamente livre, corresponde ao caso em que duas cordas diferentes encontram-se unidas. A Fig. 3 ilustra a situação em que cordas de diferentes densidades estão unidas. Um pulso de onda percorrendo uma corda de *menor densidade de massa*, ao atingir o ponto de união com uma corda de *maior densidade de massa*, é parte refletido *com inversão de fase* e é em parte transmitido. Porém, se o pulso de onda está inicialmente percorrendo a corda de maior densidade, o pulso refletido terá *a mesma fase*. O pulso transmitido sempre tem a mesma fase do pulso incidente, qualquer que seja o caso.

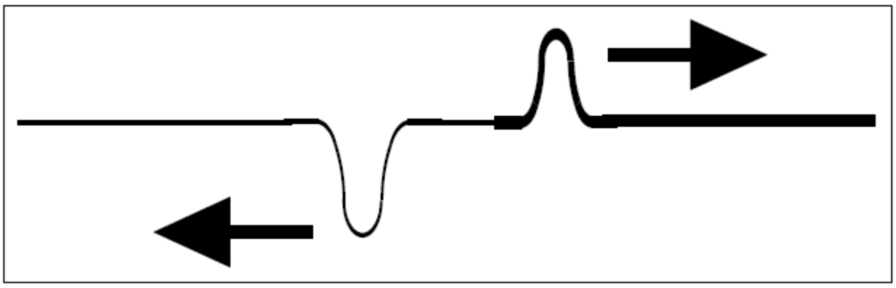

Figura 3 Sempre ocorre uma reflexão parcial de um pulso que atravessa uma interface entre meios com densidades diferentes. Se o pulso se propaga de um meio com menor densidade, para outro com maior densidade, (situação ilustrada) o pulso refletido tem amplitude invertida e mantém sua fase na situação inversa. Em qualquer dos casos, o pulso transmitido tem a mesma fase do pulso incidente.

Ondas eletromagnéticas conduzidas por um cabo coaxial têm comportamentos semelhantes aos verificados acima. Certamente há campos eletromagnéticos, mas frequentemente estamos preocupados apenas com ondas de *tensão* e *corrente* na linha.

Em nosso estudo, ficaremos restritos ao caso de *uma linha de transmissão sem perdas*, que podemos representar por uma sucessão infinita de indutores e capacitores como sugere a Fig. 4-a.

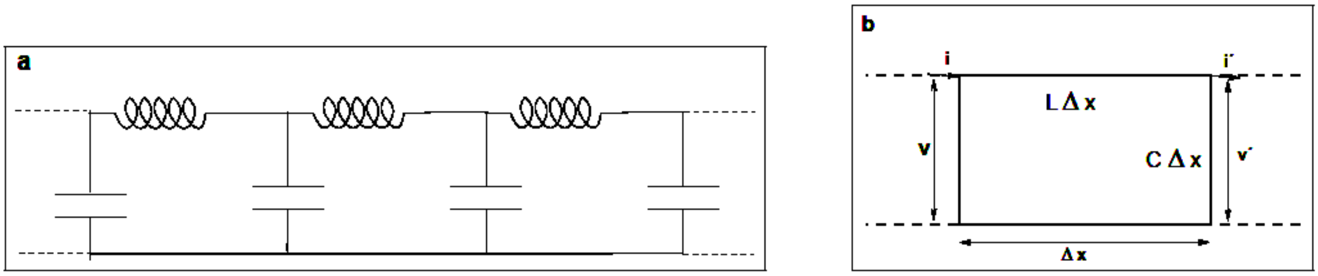

Figura 4 Para a dedução da equação de onda, imaginamos que uma linha de transmissão se comporta como uma distribuição contínua de capacitores e indutores (a), da qual isolamos uma célula elementar de extensão Δx com indutância LΔx e capacitância CΔx (b).

Podemos isolar uma célula elementar de extensão Δx, com indutância $L\Delta x$, e capacitância $C\Delta x$,onde L e C são, respectivamente, a indutância e a capacitância por unidade de comprimento da linha de transmissão.

Nesta célula há uma queda de tensão $(\partial V/\partial x)\Delta x$ provocada pela corrente variando na razão $\partial i/\partial t$ na indutância $L\Delta x$. Aplicando a lei das malhas ao circuito da Fig. 4-b obtemos:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x = (L\Delta x)\frac{\partial i}{\partial t},$$

O sinal – decorre do fato de que a tensão diminui com a distância x. De maneira análoga, a diferença de corrente entre os extremos da célula é dada pela corrente de deslocamento através do capacitor $C\Delta x$ provocada pela tensão que varia na razão $\partial V/\partial t$. A conversão da corrente implica:

$$-\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x = (C\Delta x)\frac{\partial V}{\partial t}$$

Dividindo lado a lado as equações anteriores por Δx obtemos:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t} \qquad e \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Podemos eliminar a corrente de ambas as equações tomando a derivada da primeira equação com relação a *x* e a derivada da segunda equação com relação a *t:*

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \qquad e \qquad -\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = C\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Como:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$$

Temos:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

que é a equação de onda para uma linha de transmissão. A comparação com a equação de onda para a corda, mostra que a onda se propaga na linha de transmissão com velocidade dada por:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

onde L e C, são, respectivamente, a indutância por unidade de comprimento e a capacitância por unidade de comprimento da linha. Para um cabo coaxial, Fig. 5,

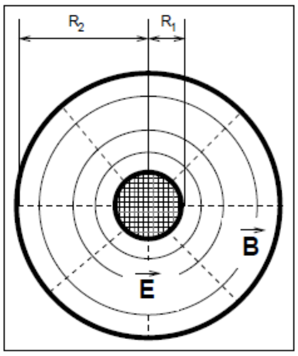

Figura 5 Um cabo coaxial é constituído de um condutor central de raio R_1 envolvido por uma malha metálica de raio R_2 que constitui o segundo condutor. Num cabo coaxial as linhas de força do campo elétrico são radiais e as linhas de campo magnético são circulares. Fazemos nossa análise, entretanto, para as tensões e correntes no cabo.

A indutância e a capacitância do cabo são dadas por:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \qquad e \qquad C = \frac{2\pi\epsilon}{ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

onde R_1 e R_2 são, respectivamente, o raio do condutor interno e o raio da malha externa; μ e ϵ são a permeabilidade magnética e a permissividade dielétrica do meio entre os condutores, respectivamente.

Como a equação de onda para o cabo coaxial e para uma onda em uma corda é matematicamente a mesma, uma solução possível para a equação de onda no cabo é mesma que para a onda na corda, e é dada por:

$$v(x,t) = V_0 sen(kx - \omega t).$$

Substituindo esta solução em uma das equações definidas pela lei das malhas, podemos obter a corrente:

$$I(x,t) = I_0 sen(kx - \omega t).$$

onde $I_0=V_0/Z_0$ onde Z_0 é a impedância característica da linha, definida por: $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Análise do efeito de carga de terminação na linha de transmissão

Seja uma linha de transmissão terminada por uma impedância Z_t com a aproximação de que se trata de uma carga puramente resistiva, Fig. 6-a. Imaginamos uma onda de tensão incidente, descrita por v^+, propagando-se da esquerda para direita, Fig. 6-b. Temos uma corrente associada a esta onda de tensão expressa por $i^+=V^+/Z_0$, onde Z_0 é a impedância da linha de transmissão.

Figura 6 A linha de transmissão possui impedância Z_0 e está terminada por uma carga puramente resistiva Z_t. Obviamente a Lei de Ohm deve ser respeitada e devemos ter $V_t=i_tZ_t$, onde V_t e i_t são, respectivamente, a tensão e a corrente total nos extremos da carga.

No extremo da linha, devemos ter:

$$\frac{V_{total}}{i_{total}} = Z_t$$

onde Z_t é a impedância da carga, supostamente puramente resistiva. Chamando a tensão e corrente refletida V^- e i^-, a equação anterior torna-se:

$$\frac{V_t^+ + V_t^-}{i_t^+ + i_t^-} = \frac{V_t^+ + V_t^-}{\frac{V_t^+}{Z_t} - \frac{V_t^-}{Z_t}} = Z_t \rightarrow \frac{V_t^+ + V_t^-}{V_t^+ - V_t^-} = \frac{Z_t}{Z_0}$$

onde foi feita a substituição $i^-=-V^-/Z_0$.

Para estudarmos o efeito da impedância de terminação da linha, resolvemos a equação anterior para (V^-/V^+). Isso nos dá a expressão para o coeficiente de reflexão $K=(V^-/V^+)$, em função da impedância do cabo da impedância da terminação da linha:

$$k = \frac{V_t^-}{V_t^+} = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}$$

Fica claro aqui que vai existir um pulso refletido quando a impedância da carga da linha de transmissão for diferente da linha. Para uma linha aberta, $Z_t= \infty$ (K=1), observamos um pulso refletido com a mesma fase do pulso incidente; para uma linha em curto circuito, $Z_t= 0$ (K=-1), o pulso refletido terá uma diferença de fase de 180°. Chamamos de casamento de impedâncias, a escolha adequada da impedância de carga tal que $Z_t= Z_0$ (K=0), ou seja, não há reflexão de pulsos.

Bibliografia

Transmissions Lines and Networks, Intl. St. Ed. Walter C. Johnson, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. 1950.