Transformada de Laplace: Aula 3. 7ª do Curso

– Derivadas de uma transformada

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$ ← Definição de T. de Laplace.

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$ ← vamos supor que a integral imprópria é convergente e que é possível trocar a ordem da derivada e da integral.

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st} f(t)\right] dt$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = -\int_0^\infty e^{-st}\, t f(t)\,dt$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = -\mathcal{L}\{t f(t)\}$$

Isto é, $\boxed{\mathcal{L}\{t f(t)\} = -\dfrac{d[F(s)]}{ds}} = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}$

– Segunda Derivada da Transformada

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot t f(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}\right]$$

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2}\left[\mathcal{L}\{f(t)\}\right]$$

Os dois resultados precedentes sugerem o resultado geral para $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[F(s)]$$

Ex. Calcule $\mathcal{L}\{t\,\text{sen}(kt)\}$.

Sendo $f(t) = \text{sen}(kt) \longrightarrow F(s) = \dfrac{k}{s^2+k^2}$ e $n=1$

$$\mathcal{L}\{t\,\text{sen}(kt)\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right] = -\frac{d}{ds}\left[k(s^2+k^2)^{-1}\right]$$

$$\mathcal{L}\{t\,\text{sen}(kt)\} = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$$

Ex. Resolva $x'' + 16x = \cos(4t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

$$\mathcal{L}\{x''\} + 16\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{\cos(4t)\}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

$$s^2X(s) - s\underbrace{x(0)}_{0} - \underbrace{x'(0)}_{1} + 16X(s) = \frac{s}{s^2+16}$$

$$(s^2+16)X(s) = 1 + \frac{s}{s^2+16}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

$$x(t) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+16)^2}\right\}$$

do exercício anterior

$$\mathcal{L}\{t\,\text{sen}(kt)\} = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$$

se $k=4$

$$\mathcal{L}\{t\,\text{sen}(4t)\} = \frac{8s}{(s^2+16)^2}$$

$$x(t) = \frac{1}{4}\,\text{sen}(4t) + \frac{1}{8}\,t\,\text{sen}(4t)$$

A Integral de Convolução

Algumas vezes identificamos uma transformada de Laplace $H(s) = F(s)G(s)$ ← produto de outras duas transformadas.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$$

porém, $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \neq f(t)g(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

← Integral de Convolução de $f(t)$ e $g(t)$

$$f*g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = g*f$$

A convolução pode ser considerada um produto especial

A convolução $(f \times g)(t)$ tem muitas propriedades da multiplicação usual.

$$f * g = g * f \quad \text{comutatividade}$$

$$f*(g_1+g_2) = f*g_1 + f*g_2 \quad \text{distributividade}$$

$$(f*g)*h = f*(g*h) \quad \text{associatividade}$$

$$f*0 = 0*f = 0 \quad \text{elemento nulo (função nula)}$$

- Porém, a convolução não tem outras propriedades que a multiplicação usual tem. Por exemplo, em geral não é verdade que $f*1$ seja igual a f.

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

Se $f(t) = \cos(t)$, $g(t) = 1$ e

$$f(t)*1 = \int_0^t \cos(\tau)\cdot 1\,d\tau = \operatorname{sen}(\tau)\Big|_0^t = \operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}(t)$$

$$f(t)*1 = \operatorname{sen}(t) \neq \cos(t) = f(t)$$

- $f(t)*f(t)$ pode ser negativa em contradição ao produto usual.

Ex. Se $f(t) = \operatorname{sen}(t)$

$$\operatorname{sen}(t) * \operatorname{sen}(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(\tau)\operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau$$

$$\operatorname{sen}(t-\tau) = \operatorname{sen}(t)\cos(\tau) - \operatorname{sen}(\tau)\cos(t)$$

$$\operatorname{sen}(t) * \operatorname{sen}(t) = \frac{1}{2}\left(-t\cos(t) + \operatorname{sen}(t)\right)$$

que não é sempre positivo

Ex. Calcule $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau\right\}$.

Sol.: Sendo $f(t)=e^t$ e $g(t)=\operatorname{sen}(t)$ a integral anterior é $f*g$.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau\right\}=\mathcal{L}\{e^t\}\cdot\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\}$$

$$=\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s^2+1} \quad \blacksquare$$

Ex. Encontre a transformada inversa de Laplace de

$$H(s)=\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}.$$

Sol.: $H(s)=F(s)\,G(s)$

$$F(s)=\frac{1}{s^2} \quad e \quad G(s)=\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=f(t)=t \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}=g(t)=\operatorname{sen}(at)$$

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=f*g \quad \rightarrow f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

$$h(t)=\int_0^t \tau\operatorname{sen}(a(t-\tau))\,d\tau=\int_0^t \operatorname{sen}(a\tau)[t-\tau]\,d\tau$$

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

$$h(t)=\int_0^t t\operatorname{sen}(a\tau)\,d\tau-\int_0^t \tau\operatorname{sen}(a\tau)\,d\tau \longrightarrow \text{por partes}$$

$$\begin{cases} u=\tau \\ dv=\operatorname{sen}(a\tau)\,d\tau \\ du=d\tau \\ v=-\dfrac{\cos(a\tau)}{a}\end{cases}$$

$$h(t)=t\left(\frac{-\cos(a\tau)}{a}\right)\Bigg|_0^t - \quad ''$$

$$h(t) = -\frac{t}{a}\left[\cos(at) - 1\right] - \left[-\frac{\tau}{a}\cos(a\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{a}\int_0^t \cos(a\tau)\,d\tau\right]$$

$$\cancel{h(t) = \frac{t}{a} - \frac{t}{a}\cos(at) + \frac{\tau}{a}\left(\cos(at) - 1\right) - \frac{1}{a}\,\frac{\operatorname{sen}(a\tau)}{a}\Big|_0^t}$$

$$h(t) = \frac{t}{a} - \cancel{\frac{t}{a}\cos(at)} + \frac{1}{a}\left(\cancel{t\cos(at)} - 0\right) - \frac{1}{a^2}\operatorname{sen}(at)$$

$$\boxed{h(t) = \frac{at - \operatorname{sen}(at)}{a^2}}$$

Equação Integral de Volterra para $f(t)$

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

$f(t)$ aparece em dois lugares diferentes. um deles, dentro da integral de convolução de $f * h$.

Ex. Resolva $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \underbrace{\int_0^t f(\tau)\,e^{t-\tau}\,d\tau}_{f*h}$ para $f(t)$.

$h(t) = e^t \leftrightarrow h(t-\tau) = e^{t-\tau}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1} = H(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 3\mathcal{L}\{t^2\} - \mathcal{L}\{e^{-t}\} - \underbrace{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,e^{t-\tau}\,d\tau\right\}}$$

$$F(s) = 3\,\frac{2!}{s^3} - \frac{1}{s+1} - F(s)H(s)$$

$$F(s) + F(s)\frac{1}{s-1} = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

$$F(s)\left[1 + \frac{1}{s-1}\right] = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

$$F(s)\left[\frac{s}{s-1}\right] = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

$$F(s) = \frac{6(s-1)}{s^4} - \frac{s-1}{s(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{6\cancel{s}}{s^{\cancel{4}\,3}} - \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

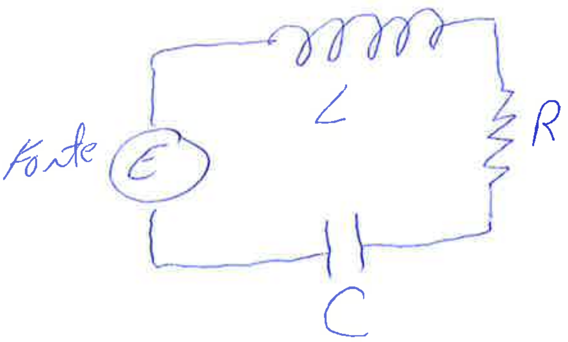
$A = 1 \quad B = -1$

$$F(s) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s+1} + \underbrace{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}}$$

$$F(s) = \frac{\overset{3\cdot 2}{6}}{s^3} - \frac{\overset{3!}{6}}{s^4} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 3t^2 - t^3 - 2e^{-t} + 1$$

Circuito RLC em Série: Equação Íntegro-Diferencial



Lei de Kirchhoff

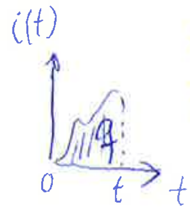
$$E(t) = V_{em\,L} + V_{em\,R} + V_{em\,C}$$

$$E(t) = L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

$$E(t) = L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

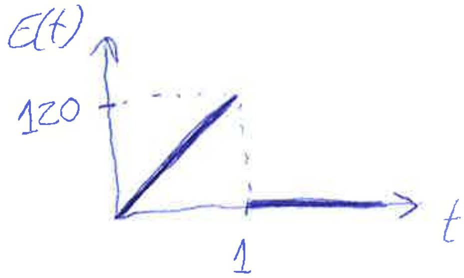
termo não homogêneo

derivada de $i(t)$



integral de $i(t)$

Ex. Determine a corrente $i(t)$ em um circuito RLC de malha simples no qual $L = 0{,}1\,F$, $R = 2\,\Omega$, $C = 0{,}1\,F$ e a voltagem aplicada $E(t) = 120t - 120t\,u(t-1)$. $i(0) = 0$



$$E(t) = L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

$$120t - 120t\,u(t-1) = 0{,}1\frac{di(t)}{dt} + 2i(t) + 10\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

$$120\mathcal{L}\{t\} - 120\mathcal{L}\{t\,u(t-\underset{a=1}{1})\} = 0{,}1\left[sI(s) - i(0)\right] + 2I(s) + 10\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right\}$$

$$\text{Se } g = 1 \Rightarrow i * g = \int_0^t i(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t i(\tau)\cdot 1\cdot d\tau$$

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s) \qquad \mathcal{L}\{g(t) = 1\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{i * g\} = \frac{I(s)}{s} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right\}$$

$$120\frac{1}{s^2} - 120e^{-s}\mathcal{L}\{t+1\} = 0{,}1sI(s) - \cancel{0{,}1\,i(0)}^{\,0} + 2I(s) + 10\frac{I(s)}{s}$$

$$120\frac{1}{s^2} - 120e^{-s}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right] = \left(0{,}1s + 2 + \frac{10}{s}\right)I(s)$$

$$120\left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}\right] = \left(0{,}1s + 2 + \frac{10}{s}\right)I(s)$$

Multiplicando $\times 10s$ nos dois lados

$$1200\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - e^{-s}\right] = \underbrace{(s^2 + 20s + 100)}_{(s+10)^2}\,I(s)$$

$$I(s) = 1200\left[\frac{1}{s(s+10)^2} - \frac{e^{-s}}{s(s+10)^2} - \frac{e^{-s}}{(s+10)^2}\right]$$

Frações Parciais

$$\frac{1}{s(s+10)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+10)} + \frac{C}{(s+10)^2} = \frac{\frac{1}{100}(s+10)^2 + B(s+10)s + -\frac{1}{10}s}{s(s+10)^2}$$

$A = 1/100 \quad C = -\frac{1}{10}$ ← Pelo Método do Solapamento

$$1 = \frac{1}{100}(s^2+20s+100) + Bs^2 + 10Bs - \frac{1}{10}s$$

$$1 = \left(\frac{1}{100} + B\right)s^2 + \dots$$

$$\frac{1}{100} + B = 0 \rightarrow B = -\frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{s(s+10)^2} = \frac{1/100}{s} - \frac{1/100}{s+10} - \frac{1/10}{(s+10)^2}$$

Forma Inversa
Segundo T. da Translação
Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$

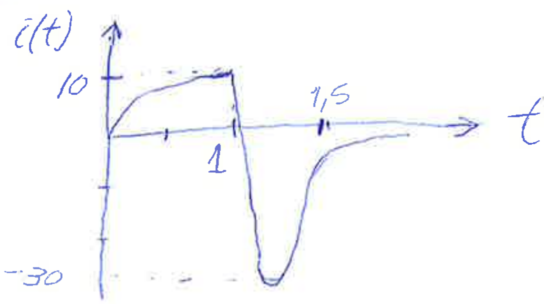
$a=1$

$$I(s) = 1200\left[\frac{1/100}{s} - \frac{1/100}{s+10} - \frac{1/10}{(s+10)^2} - \frac{1/100}{s}e^{-s} + \frac{1/100}{s+10}e^{-s} + \frac{1/10}{(s+10)^2}e^{-s} - \frac{1}{(s+10)^2}e^{-s}\right]$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}$$

$$i(t) = 12[1-u(t-1)] - 12[e^{-10t} - e^{-10(t-1)}u(t-1)] - 120te^{-10t} - 1080(t-1)e^{-10(t-1)}u(t-1)$$

$$i(t) = \begin{cases} 12 - 12e^{-10t} - 120te^{-10t}, & \text{se } 0 \le t < 1 \\ -12e^{-10t} + 12e^{-10(t-1)} - 120te^{-10t} - 1080(t-1)e^{-10(t-1)}, & t \ge 1 \end{cases}$$

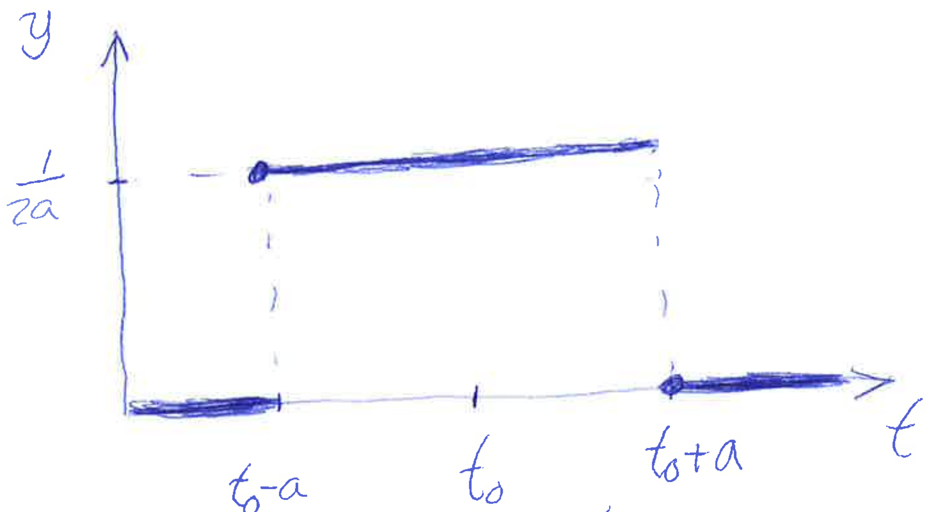


Embora a entrada $E(t)$ é descontínua em $t=1$, a saída $i(t)$ é contínua em $t=1$.

Função Delta de Dirac (Impulso Unitário)

Em muitos eventos uma força grande age durante um curto intervalo de tempo. Ex. Uma tacada no beisebol ou um chute no futebol. Para estudar esses casos vamos introduzir a função Delta de Dirac.

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a} & , t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0 & , t \geq t_0 + a \end{cases}$$

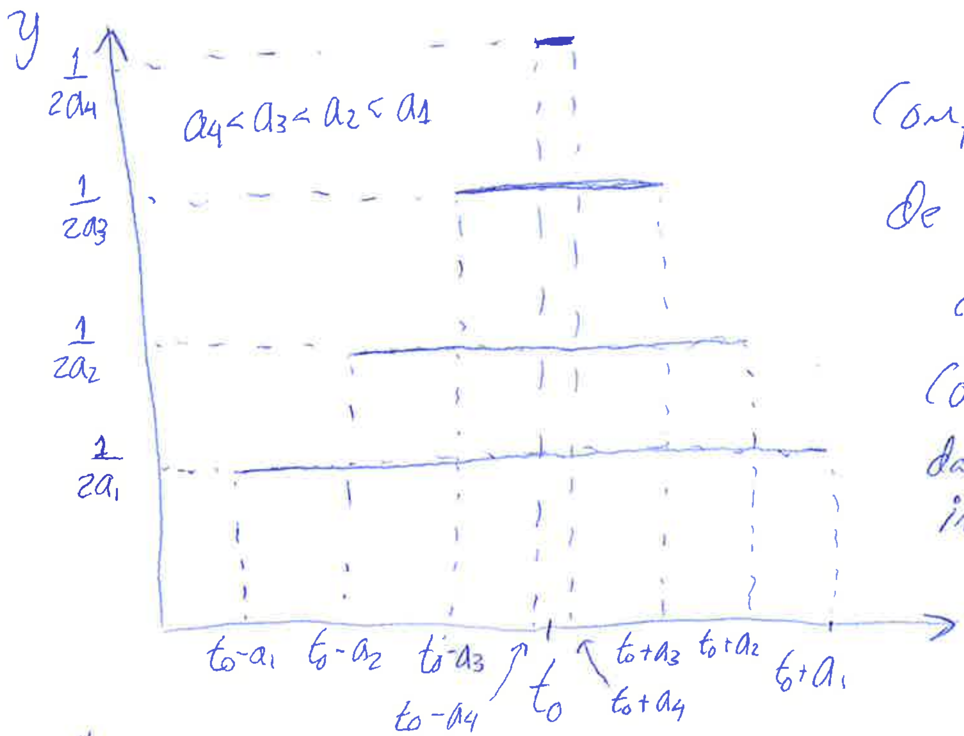


$$\int_0^\infty \delta_a(t-t_0)\,dt = \int_{t_0-a}^{t_0+a} \frac{1}{2a}\,dt = \frac{1}{2a}\,t\Big|_{t_0-a}^{t_0+a} = \frac{1}{2a}(t_0+a-t_0+a)$$

$$\int_0^\infty \delta_a(t-t_0)\,dt = 1 \leftarrow$$ Por esse motivo a função é chamada de IMPULSO UNITÁRIO.

Agora vamos definir uma "função generalizada" como

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a\to 0}\left[\delta_a(t-t_0)\right]$$



Comportamento de $\delta_a(t-t_0)$ quando $a \to 0$.

Como a área embaixo da curva deve ser 1 independentemente do valor de a. Se a diminuc a altura deve aumentar.

"Função" Delta de Dirac $\longrightarrow$ $\delta(t-t_0) = \lim\limits_{a \to 0} [\delta_a(t-t_0)]$

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad e \quad \int_0^\infty \delta(t-t_0)\,dt = 1$$

Adicionalmente $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$ $\leftarrow$ A função delta de Dirac escolhe, entre todos os valores possíveis de t, t_0 para avaliar f.

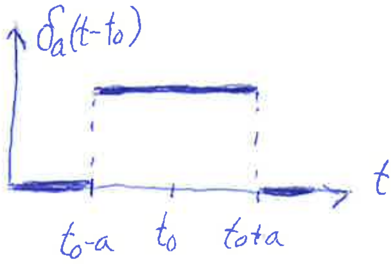
Vamos calcular a transformada de Laplace da função delta de Dirac supondo formalmente que

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{a \to 0} [\mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\}]$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Teorema: Para } t_0 > 0 \\ \qquad \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}\end{array}}$$

Prova: Vamos escrever $\delta_a(t-t_0)$ em função da função degrau unitário:

$$\delta_a(t-t_0) = \frac{1}{2a}\left[u(t-(t_0-a)) - u(t-(t_0+a))\right]$$



Aplicando a transformada de Laplace nos dois lados.

$$\mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\} = \frac{1}{2a}\left[\mathcal{L}\{u(t-(t_0-a))\} - \mathcal{L}\{u(t-(t_0+a))\}\right]$$

constante, não depende de t
a transformada é linear

Lembrando que $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$

$$\mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\} = \frac{1}{2as}\left[e^{-(t_0-a)s} - e^{-(t_0+a)s}\right] = \frac{e^{-t_0 s}}{2as}\left[e^{as} - e^{-as}\right]$$

Agora precisamos calcular o limite quando $a \to 0$ de $\mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\}$, mas apresenta uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicando a regra de L'Hôpital:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{a\to 0}\left[\mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\}\right] = e^{-st_0}\lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right) = e^{-st_0}$$

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{\cancel{s}e^{sa}-(-s)e^{-sa}}{2\cancel{s}}\right) = 1$$

Ex. Resolva $y'' + y = 4\delta(t-2\pi)$ sujeita à

(a) $y(0)=1$ e $y'(0)=0$

(b) $y(0)=0$ e $y'(0)=0$

Pode ser o modelo do movimento de um conjunto massa-mola sem atrito, onde a massa recebe uma pancada abrupta em $t=2\pi$.

Aplicando a transformada de Laplace nos dois lados da eq. dif.

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = 4\mathcal{L}\{\delta(t-2\pi)\}$$

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ e $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$

$$\underbrace{s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{1,0} - \underbrace{y'(0)}_{0,0}} + Y(s) = 4e^{-2\pi s}$$

(a) $$s^2Y(s) - s + Y(s) = 4e^{-2\pi s}$$

$$Y(s)(s^2+1) = s + 4e^{-2\pi s}$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{4}{s^2+1}e^{-2\pi s}$$

$a^2=1 \to a=1$; $2\pi \to a$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \mathrm{sen}(at)$$

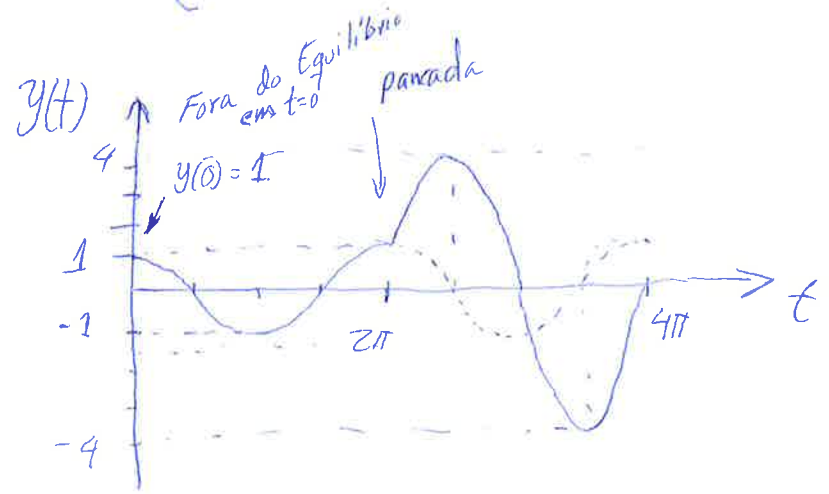
Segundo T. da Translação

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-as}\} = f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a) \\ \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)\end{gathered}}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \cos(t) + 4\,\mathrm{sen}(t-2\pi)\,\mathcal{U}(t-2\pi)$$

como $\mathrm{sen}(t-2\pi) = \mathrm{sen}(t)$

$$y(t) = \begin{cases} \cos(t), & 0 \le t < 2\pi \\ \cos(t) + 4\,\mathrm{sen}(t), & t \ge 2\pi \end{cases}$$



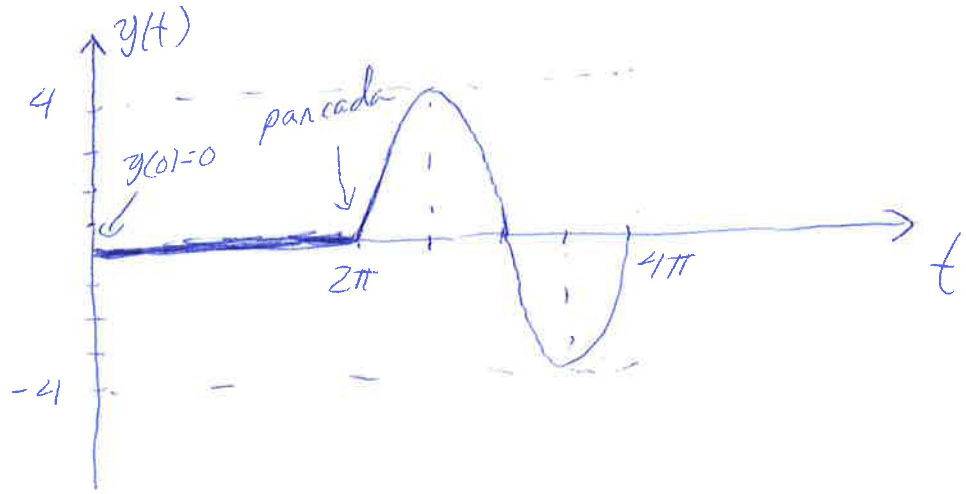
(a)

(b) Neste caso $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

$$Y(s) = \frac{4}{s^2+1} e^{-2\pi s}$$

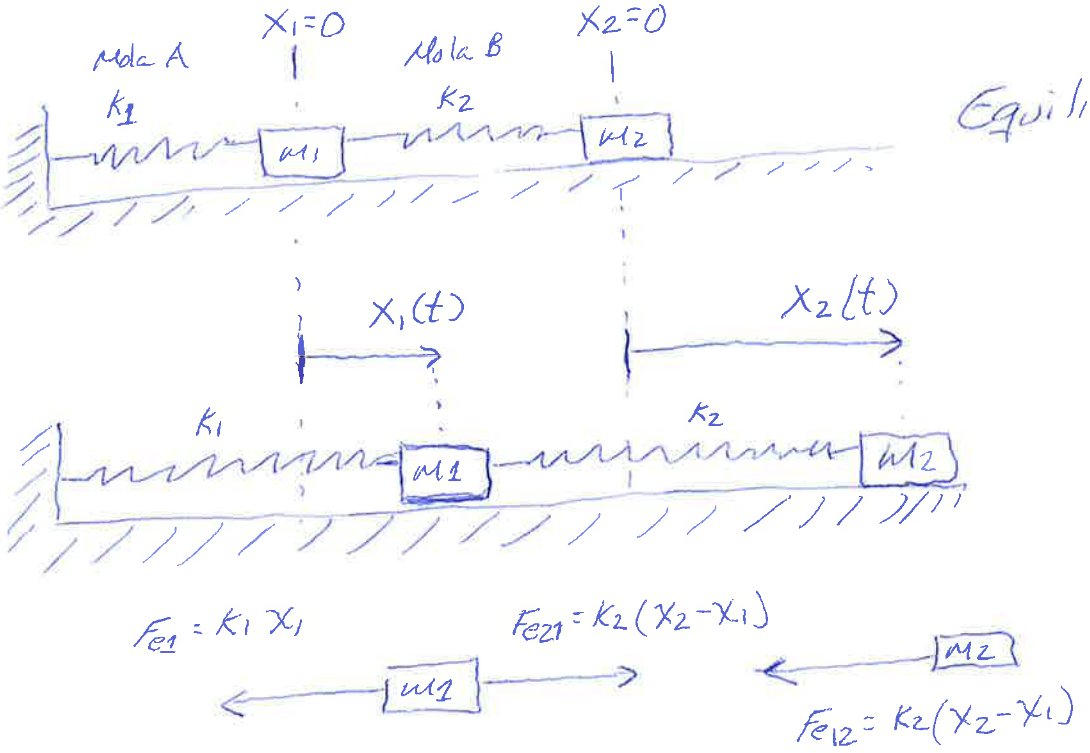
$$y(t) = 4\,\mathrm{sen}(t - 2\pi)\, u(t - 2\pi)$$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\pi \\ 4\,\mathrm{sen}(t), & t \ge 2\pi \end{cases}$$



Uso da Transformada de Laplace na Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Ex. das Molas Acopladas (A e B). Sem Atrito.



Equilíbrio

Fora do Equilíbrio

Forças na direção do eixo x.

Segunda Lei de Newton: $\Sigma F_x = m a_x = m x''(t)$

Para m_1: $\quad k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 = m_1 x_1''$

" m_2: $\quad -k_2(x_2 - x_1) = m_2 x_2''$

} Sistema de Eq. Dif. de 2ª ordem, linear, em $x_1(t)$ e $x_2(t)$ Acopladas.

Ex. Resolva

$$x_1'' + 10x_1 - 4x_2 = 0$$
$$-4x_1 + x_2'' + 4x_2 = 0$$

para $x_1(t)$ e $x_2(t)$, sujeita as condições iniciais $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ e $x_2'(0) = -1$.

se $\mathcal{L}\{x_1(t)\} = X_1(s)$ e $\mathcal{L}\{x_2(t)\} = X_2(s)$

aplicando a transformada de Laplace nos dois lados das duas eq. dif.

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}\{x_1''\} + 10\,\mathcal{L}\{x_1\} - 4\,\mathcal{L}\{x_2\} = \mathcal{L}\{0\} \\ &-4\,\mathcal{L}\{x_1\} + \mathcal{L}\{x_2''\} + 4\,\mathcal{L}\{x_2\} = \mathcal{L}\{0\} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &s^2X_1(s) - s\overset{0}{\cancel{X_1(0)}} - \underset{1}{\underbrace{X_1'(0)}} + 10X_1(s) - 4X_2(s) = 0 \\ &-4X_1(s) + s^2X_2(s) - s\overset{0}{\cancel{X_2(0)}} - \underset{-1}{\underbrace{X_2'(0)}} + 4X_2(s) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Colocando as condições iniciais

$$\left.\begin{aligned} &s^2X_1(s) - 1 + 10X_1(s) - 4X_2(s) = 0 \\ &-4X_1(s) + s^2X_2(s) + 1 + 4X_2(s) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &(s^2+10)\,X_1(s) - 4\,X_2(s) = 1 \\ &-4\,X_1(s) + (s^2+4)\,X_2(s) = -1 \end{aligned}\right\}$$ Sistema Algébrico para $X_1(s)$ e $X_2(s)$

Resolvendo o sistema e usando frações parciais

$$X_1(s) = \frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)} = -\frac{1/5}{s^2+2} + \frac{6/5}{s^2+12}$$

$$X_2(s) = \frac{s^2+6}{(s^2+2)(s^2+12)} = -\frac{2/5}{s^2+2} - \frac{3/5}{s^2+12}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} \quad \text{e} \quad x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\}$$

$$x_1(t) = -\frac{\sqrt{2}}{10}\,\text{sen}(\sqrt{2}\,t) + \frac{\sqrt{3}}{5}\,\text{sen}(2\sqrt{3}\,t)$$

e

$$x_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{5}\,\text{sen}(\sqrt{2}\,t) - \frac{\sqrt{3}}{10}\,\text{sen}(2\sqrt{3}\,t)$$

$\blacksquare$