Transformada de Laplace - Aula 1

- Uma transformada é uma operação em que se parte de uma função e se chega em outra função.

Ex. $f(x) = x^2$. Aplicando a transformada DERIVADA

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx} = 2x$$ encontramos a função $g(x)$.

- Uma transformada INTEGRAL é definida pela integral a seguir:

$$F(s) = \int_{t_i}^{t_f} \underbrace{K(s,t)}_{\substack{\text{kernel da transformação} \\ \text{função de duas variáveis}}} f(t)\,dt$$

$$f(t) \xrightarrow{\text{TRANSFORMADA}} F(s)$$

- A transformada de Laplace é definida pela integral:

minúsculas, maiúsculas, integral imprópria

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

- Para existir a transformada de Laplace de uma função a integral imprópria deve ser convergente.

Ex. Encontre a transformada de Laplace da função $f(t) = 1$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot 1 \cdot dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-st}\,dt$$

$$F(s) = \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^A$$

$$F(s) = \lim_{A\to\infty} \left\{ -\frac{1}{s} \left[e^{-sA} - \overset{1}{\cancel{e^{-s\cdot 0}}} \right] \right\}$$

$$F(s) = -\frac{1}{s} \lim_{A\to\infty} \left[e^{-sA} - 1 \right]$$

Se $s > 0 \rightarrow e^{-sA} = \frac{1}{e^{sA}}$ e $\lim_{A\to\infty} \left[e^{-sA} \right] = 0$

Se $s < 0 \rightarrow$ o limite não existe

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \frac{1}{s} \qquad \boxed{\text{Se } s > 0}$$

$$f(t) = 1 \underset{\text{T. Inversa de Laplace}}{\overset{\text{T. Laplace}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{s} = F(s) \quad ''$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = f(t) = 1$$

Ex. Calcule $\mathcal{L}\{t\}$.

$$\mathcal{L}\{t\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, t\, dt = \lim_{A\to\infty} \left[\int_0^A e^{-st} t\, dt\right]$$

$$\int_0^A e^{-st} t\, dt$$

Integração por Partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = t \qquad du = dt$

$dv = e^{-st}dt \qquad v = -\frac{e^{-st}}{s}$

$$\int_0^A e^{-st} t\, dt = -\left.\frac{te^{-st}}{s}\right|_0^A + \frac{1}{s}\int_0^A e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s}\left[Ae^{-sA} - \underbrace{0\cdot e^{-s\cdot 0}}_{0}\right] - \frac{1}{s}\,\frac{1}{s}\, e^{-st}\Big|_0^A$$

$$= -\frac{1}{s}Ae^{-sA} - \frac{1}{s^2}\left[e^{-sA} - \underbrace{e^{-s\cdot 0}}_{1}\right]$$

$$\int_0^A e^{-st}\cdot t\cdot dt = -\frac{1}{s}Ae^{-sA} - \frac{1}{s^2}\left[e^{-sA} - 1\right]$$

Se $s>0$

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\, t\cdot dt = \frac{1}{s^2}, \qquad \lim_{A\to\infty}\left[\frac{A}{e^{sA}}\right] = 0, \quad \lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{e^{sA}}\right] = 0$$

$$\mathcal{L}\{t\} = F(s) = \frac{1}{s^2} \qquad \text{se } s>0$$

$$f(t) = t \;\underset{\text{T. Inversa de Laplace}}{\overset{\text{T. Laplace}}{\rightleftarrows}}\; \frac{1}{s^2} = F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = f(t) = t$$

Ex. Calcule $\mathcal{L}\{e^{at}\}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt$$

$$'' \quad = -\frac{e^{-(s-a)t}}{(s-a)}\Bigg|_0^\infty = -\frac{1}{s-a}\left[\lim_{A\to\infty} \overset{0}{\cancel{e^{-(s-a)A}}} - \overset{1}{\cancel{e^{-(s-a)\cdot 0}}}\right]$$

se $s-a>0$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{se } s>a$$

$$f(t) = e^{at} \underset{\text{T. Inversa de Laplace}}{\overset{\text{T. Laplace}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{s-a} = F(s) \quad \text{se } s>a.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at} = f(t)$$

A transformada de Laplace é uma transformação linear

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] dt = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt$$

se ambas as integrais do lado direito convergirem para $s>c$, $c \in \mathbb{R}$.

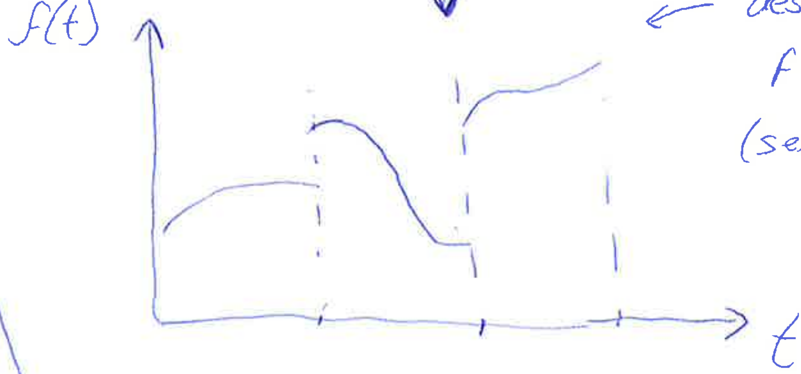
Ex. Calcule $\mathcal{L}\{7+5t\}$.

$$\mathcal{L}\{7+5t\} = 7\mathcal{L}\{1\} + 5\mathcal{L}\{t\} = 7\frac{1}{s} + 5\frac{1}{s^2}$$

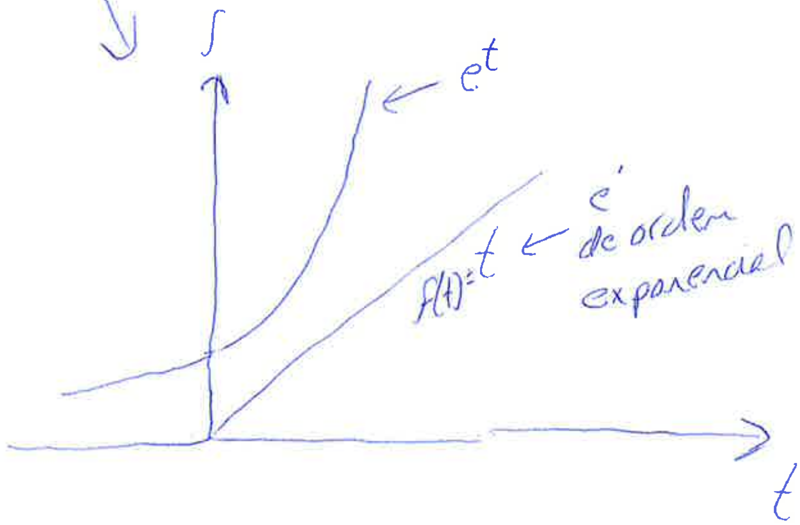
Condições Suficientes para a Existência de $\mathcal{L}\{f(t)\}$

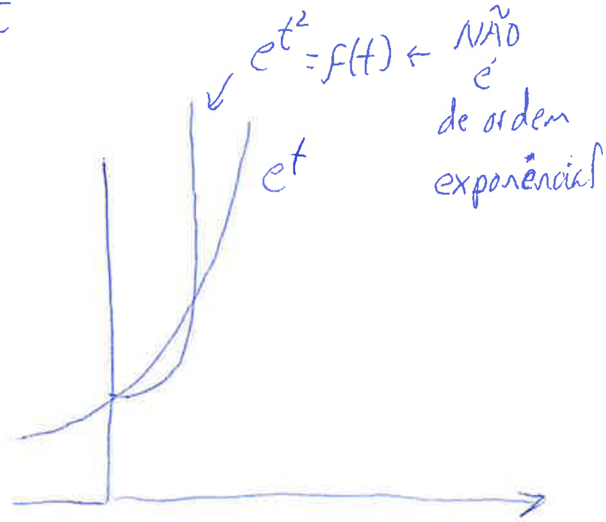
$\mathcal{L}\{1/t\}$ e $\mathcal{L}\{e^{t^2}\}$ não existem. As integrais são divergentes.

- Para que exista a transformada de Laplace a função $f(t)$ deve ser contínua por partes em $[0,\infty)$ e de ordem exponencial.



descontinuidades finitas (sem saltos infinitos)





Definição: Uma função f é de ordem exponencial c se existem constantes c, $M>0$ e $T>0$ tal que

$$|f(t)| \le Me^{ct} \text{ para todo } t > T.$$

Existem tabelas de Transformadas de Laplace que podem ser consultadas de forma análoga às tabelas de integrais.

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
t^n, n = inteiro positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
t^p, $p \in \mathbb{R}$, $p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$s>0$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$s>a$
$t^n e^{at}$, n = inteiro positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s>a$

Ex. Use a tabela para encontrar a transformada inversa de Laplace da função $F(s) = \frac{1}{s^5} + \frac{1}{s^2+7}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5} + \frac{1}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} + \frac{1}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\}$$

$$f(t) = \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{sen}(\sqrt{7}t)$$

A transformada inversa de Laplace também é uma transformação linear.

Ex. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4}$$

Decomposição em Frações Parciais: Fatores Lineares Distintos

Método do Encobrimento

- Multiplico os dois lados da eq. por $(s-1)$ e avaliamos em $s=1$.

$$\left.\frac{s^2+6s+9}{(s-2)(s+4)}\right|_{s=1} = A + \underbrace{\left.\frac{B(s-1)}{s-2}\right|_{s=1}}_{0} + \underbrace{\left.\frac{C(s-1)}{s+4}\right|_{s=1}}_{0}$$

$$A = \frac{1+6+9}{-1\cdot 5} = -\frac{16}{5}$$

- Multiplico por $(s-2)$ e avalio em $s=2$

$$\left.\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s+4)}\right|_{s=2} = B = \frac{4+12+9}{1\cdot 6} = \frac{25}{6}$$

- Multiplico por $(s+4)$ e avalio em $s=-4$

$$C = \left.\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)}\right|_{s=-4} = \frac{16+(-24)+9}{(-5)(-6)} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{-16/5}{s-1} + \frac{25/6}{s-2} + \frac{1/30}{s+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-16/5}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{25/6}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/30}{s+4}\right\}$$

$$f(t) = -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}$$

Transformada de Laplace das Derivadas

- Queremos usar as transformadas de Laplace para resolver eq. diferenciais. Vamos calcular $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ assumindo que $f'(t)$ é contínua para $t \geq 0$.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$

Integrando por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = e^{-st} \longrightarrow du = -se^{-st}\,dt$

$dv = f'(t)\,dt \longrightarrow v = f(t)$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}_{\mathcal{L}\{f(t)\}}$$

Se $s > 0$ $\lim_{A\to\infty} \left[e^{-sA}\right] = 0$

$f(t)$ é de ordem exponencial

$\lim_{A\to\infty} \left[e^{-sA} f(A)\right] = 0.$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s\,\mathcal{L}\{f(t)\}}$$

Vamos calcular agora $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ trocando $f'' \to f'$ e $f' \to f$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)\,dt = -f'(0) + s\,\mathcal{L}\{f'(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) + s\left[-f(0) + s\,\mathcal{L}\{f(t)\}\right]$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) - s f(0) + s^2 \mathcal{L}\{f(t)\}}$$

Em geral, pode ser provado que se $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ forem contínuas em $[0,\infty)$ e de ordem exponencial, e se $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes em $[0,\infty)$, então

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Ex. Problema de Valor Inicial em uma eq. dif. de primeira ordem com coeficientes constantes.

Resolva $\frac{dy}{dt} + 3y = 13\,\text{sen}(2t)$, $y(0) = 6$.

Sol. Aplicamos a transformada de Laplace nos dois lados da eq. diferencial.

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + 3\mathcal{L}\{y(t)\} = 13\,\mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\}$$

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

$\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$

$$s\,Y(s) - \underbrace{y(0)}_{\substack{\text{condição}\\ \text{inicial}}} + 3Y(s) = 13\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

$y(0) = 6$

$$s\,Y(s) - 6 + 3Y(s) = \frac{26}{s^2+4}$$

← Eq. Algébrica para $Y(s)$. Não aparecem derivadas

$$Y(s)\left[s+3\right] = 6 + \frac{26}{s^2+4}$$

$$Y(s) = \frac{6}{s+3} + \frac{26}{(s+3)(s^2+4)}$$

← Encontramos a transformada de Laplace da Solução da Eq. Dif. com condição inicial.

A solução do problema de condição inicial será $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

Precisamos escrever o segundo somando de $Y(s)$ em termos de frações parciais

$$\frac{26}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

polinômio de 2da ordem sem soluções reais

$$A = \left.\frac{26}{s^2+4}\right|_{s=-3} = \frac{26}{9+4} = \frac{26}{13} = 2$$

$$\frac{26}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{2}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{2s^2+8+(s+3)(Bs+C)}{(s+3)(s^2+4)}$$

$$26 = 2s^2+8+Bs^2+sC+3Bs+3C$$

$$26 = (2+B)s^2+(C+3B)s+8+3C$$

$$\begin{cases} 2+B=0 \longrightarrow \boxed{B=-2} \\ C+3B=0 \longrightarrow C=-3B=6 \rightarrow \boxed{C=6} \\ 8+3C=26 \end{cases}$$

$$\frac{26}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{2}{s+3} + \frac{-2s+6}{s^2+4}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = \operatorname{sen}(at) \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos(at) \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{8}{s+3} + \frac{-2s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) = 8e^{-3t} - 2\cos(2t) + 3\operatorname{sen}(2t)$$

Ex. Problema de Valor Inicial em uma Eq. Dif. de 2da ordem com coeficientes constantes.

Resolva $y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

$$\underbrace{s^2 \mathcal{L}[y] - s y(0) - y'(0)} - 3\underbrace{[s\mathcal{L}[y] - y(0)]} + 2\mathcal{L}[y] =$$

$$= \mathcal{L}[e^{-4t}]$$

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

$$s^2 Y(s) - s - 5 - 3s\,Y(s) + 3 + 2\,Y(s) = \frac{1}{s+4}$$

$$(s^2 - 3s + 2)\,Y(s) = s + 2 + \frac{1}{s+4}$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2-3s+2} + \frac{1}{(s+4)(s^2-3s+2)}$$

$$s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2)$$

$$Y(s) = \frac{(s+2)(s+4) + 1}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}$$

Feito anteriormente

$$y(t) = -\frac{16}{5} e^{t} + \frac{25}{6} e^{2t} + \frac{1}{30} e^{-4t}$$