Solução de uma Eq. Dif. Linear Homogênea de 2^{da} ordem usando séries de potências

$$A(x)\, y''(x) + B(x)\, y'(x) + C(x)\, y(x) = 0$$

- Em Cálculo II estudamos um teorema que falava que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ eram soluções L.I. da eq. anterior

$\Downarrow$ então

$$y_{g.h.}(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$$

era a SOLUÇÃO GERAL do problema.

- A seguir passamos a estudar a versão simplificada com coeficientes constantes

$$A y''(x) + B y'(x) + C y(x) = 0$$

$$\downarrow$$

$$Ar^2 + Br + C = 0 \quad \text{Eq. Caraterística} \qquad r = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

3 casos $\doteq$
$$\begin{cases} \text{se } r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y_{gh}(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \\ \text{Se } r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow y_{gh}(x) = \lambda_1 e^{rx} + \lambda_2 x e^{rx} \\ \text{Se } r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y_{gh}(x) = e^{\alpha x}\left[\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right] \end{cases}$$

números complexos

- Mas que acontece se os coeficientes não são constantes?

$$\boxed{x^2}\, y'' + \boxed{x}\, y' + \boxed{(x^2 - \nu^2)}\, y = 0 \qquad \text{Eq. de Bessel}$$

$\nu \to$ constante (parâmetro)

$$\boxed{(1 - x^2)}\, y'' \boxed{-2x}\, y' + \boxed{\alpha(\alpha+1)}\, y = 0 \qquad \text{Eq. de Legendre}$$

α é constante

Vamos supor que $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ são polinômios e queremos encontrar a solução da eq. dif. perto x_0.

Definição: Se $A(x_0) \neq 0$ o ponto é chamado de ORDINÁRIO e podemos dividir a eq. dif. por $A(x)$.

$$A(x)\,y''(x) + B(x)\,y'(x) + C(x)\,y(x) = 0$$

$$y''(x) + \underbrace{\boxed{\frac{B(x)}{A(x)}}}_{p(x)} y'(x) + \underbrace{\boxed{\frac{C(x)}{A(x)}}}_{q(x)} y(x) = 0$$

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = 0$$

Se $A(x_0) = 0$ o ponto é chamado de SINGULAR
Estudaremos estes pontos posteriormente

Vamos propor que exista uma solução para a eq. diferencial na forma de série de potências (já que os coeficientes são potências)

$$y(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

Ex. Resolva a eq. dif. $y'' + y = 0$ usando séries de potências.

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ r^2 + 1 = 0 \\ r^2 = -1 \\ r = \pm i \\ \alpha = 0 \quad \beta = 1 \end{cases}$$

$\leftarrow$ Coeficientes Constantes.

$$y_{g.h.}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x)$$

Como $A(x)y''(x)+B(x)y'(x)+C(x)y(x)$ e $A(x)=1$ no nosso problema,
Vamos propor que exista uma solução perto de $x=0$ que é
um ponto ORDINARIO para a eq. dif. $y''+y=0$. (De fato, todos os ~~...~~ valores de x são ORDINÁRIOS neste caso).

$$y(\cancel{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

$$x_0=0$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \leftarrow \text{proposta de solução}$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

$$y''+y=0 \quad \text{Eq. Dif}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{\overset{k}{n-2}} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\overset{k}{n}} = 0.$$

Primeira Verificação: 1 série $\rightarrow n=2 \rightarrow x^0$ OK ✓
2 ″ $\rightarrow n=0 \rightarrow x^0$

Segunda Verificação: 1 série $\rightarrow$ valor inicial $n=2$ X
2 ″ $\rightarrow$ ″ ″ $n=0$

Trocas: 1 série $\longrightarrow k=n-2 \longrightarrow n=k+2$
2 ″ $\longrightarrow k=n$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) c_{k+2} + c_k\right] x^k = 0 \quad \leftarrow \text{igualdade de polinômios}$$

$$(k+2)(k+1)\,c_{k+2} + c_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k+2)(k+1)} \quad \text{relação de recorrência}$$

Se $k=0$

$$c_2 = \frac{-c_0}{2} = -\frac{c_0}{2!}$$

Se $k=1$

$$c_3 = \frac{-c_1}{3\cdot 2} = -\frac{c_1}{3!}$$

Se $k=2$

$$c_4 = \frac{-c_2}{4\cdot 3} = \frac{-\left(-\frac{c_0}{2!}\right)}{4\cdot 3} = \frac{c_0}{4\cdot 3\cdot 2!} = \frac{c_0}{4!}$$

Se $k=3$

$$c_5 = \frac{-c_3}{5\cdot 4} = \frac{-\left(-\frac{c_1}{3!}\right)}{5\cdot 4} = \frac{c_1}{5!}$$

Se $k=4$

$$c_6 = \frac{-c_4}{6\cdot 5} = -\frac{\left(\frac{c_0}{4!}\right)}{6\cdot 5} = -\frac{c_0}{6!}$$

Se $k=5$

$$c_7 = -\frac{c_5}{7\cdot 6} = -\frac{c_1/5!}{7\cdot 6} = -\frac{c_1}{7!}$$

Para os coeficientes pares

$$c_2 = -\frac{c_0}{2!} \qquad c_4 = \frac{c_0}{4!} \qquad c_6 = -\frac{c_0}{6!}$$

Padrão $\quad c_{2n} = (-1)^n \dfrac{c_0}{(2n)!} \qquad n = 0, 1, \ldots$

Para os coeficientes ímpares

$$C_3 = -\frac{C_1}{3!} \qquad C_5 = \frac{C_1}{5!} \qquad C_7 = -\frac{C_1}{7!}$$

Padrão $\quad C_{2n+1} = (-1)^n \frac{C_1}{(2n+1)!} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$

Colocando os coeficientes C_n na proposta de solução da eq. dif.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} x^{2n+1}$$

$$= \overbrace{\underset{(n=0)}{C_0} + \underset{(n=1)}{C_2 x^2} + \underset{(n=2)}{C_4 x^4} \cdots}^{} + \overbrace{\underset{(n=0)}{C_1 x} + \underset{(n=1)}{C_3 x^3} + \underset{(n=2)}{C_5 x^5} + \cdots}^{}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_0}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$y(x) = C_0 \underbrace{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}}_{\cos(x)} + C_1 \underbrace{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}}_{\operatorname{sen}(x)} \qquad C_0, C_1 \in \mathbb{R}$$

Séries de Maclaurin

- Em geral não é possível expressar a série de potência em termos de funções conhecidas.

coeficiente não é constante

Ex. Resolva $y'' + x y = 0$

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$$

$$\underbrace{A(x) = 1}_{} \quad B(x) = 0 \quad C(x) = x$$

é ordinário para todo x, vamos resolver em $x = 0$
$A(x) \neq 0$

Proposta $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$$

$$y'' + x y = 0 \quad \text{Eq. Dif}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + \underbrace{x \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n}_{} = 0 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1}$$

1^{ra} verificação: 1 serie $\rightarrow$ se $n = 2 \rightarrow x^0$ corrigir
2 " $\rightarrow$ se $n = 0 \rightarrow x^1$

$$2C_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) C_n x^{\overset{k}{n-2}} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{\overset{k}{n+1}} = 0$$

1^{ra} verificação: 1 serie $\rightarrow n = 3 \rightarrow x^1$ ✓
2 serie $\rightarrow n = 0 \rightarrow x^1$

2^{da} verificação: 1^{ra} serie $\rightarrow k = n - 2 \rightarrow n = k + 2$
2^{da} " $\rightarrow k = n + 1 \rightarrow n = k - 1$

$$2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1) C_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k-1} x^k = 0$$

igualdade de polinômio

$$2C_2 x^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) C_{k+2} + C_{k-1}\right] x^k = 0$$

$$2C_2 = 0 \rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$\underbrace{(k+1)(k+2)\,C_{k+2} + C_{k-1} = 0}_{\text{relação de recorrência}} \qquad \forall k \;,\; k = 1, 2, \ldots$$

$$C_{k+2} = \frac{-C_{k-1}}{(k+1)(k+2)} \qquad (k+1)(k+2) \neq 0$$

Se $k=1$ $\quad C_3 = \dfrac{-C_0}{2\cdot 3}$ falta o 1

$k=2$ $\quad C_4 = \dfrac{-C_1}{3\cdot 4}$ falta o 2

$k=3$ $\quad C_5 = \dfrac{-C_2}{4\cdot 5}$, mas $C_2 = 0 \Rightarrow C_5 = 0$

$k=4$ $\quad C_6 = \dfrac{-C_3}{5\cdot 6} = -\dfrac{1}{5\cdot 6}\left(-\dfrac{C_0}{2\cdot 3}\right) = \dfrac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$ falta o 4,1

$k=5$ $\quad C_7 = \dfrac{-C_4}{6\cdot 7} = \dfrac{-1}{6\cdot 7}\left(-\dfrac{C_1}{3\cdot 4}\right) = \dfrac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$ falta o 5,2

$k=6$ $\quad C_8 = \dfrac{-C_5}{7\cdot 8} = 0$

$k=7$ $\quad C_9 = \dfrac{-C_6}{8\cdot 9} = -\dfrac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$ falta o 7,4,1

$k=8$ $\quad C_{10} = \dfrac{-C_7}{9\cdot 10} = -\dfrac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}$ falta o 8,5,2

$k=9$ $\quad C_{11} = \dfrac{-C_8}{10\cdot 11} = 0$

Três Casos

1) Os que dependem de C_0
2) " " " " C_1
3) " " são 0

1) C_0, $C_3 = -\dfrac{C_0}{2\cdot 3}$, $C_6 = \dfrac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$, $C_9 = -\dfrac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$

2) C_1, $C_4 = \frac{-C_1}{3\cdot 4}$, $C_7 = \frac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$, $C_{10} = -\frac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}$

C_{3n+1}, $n = 0, 1$

3) $C_2 = 0$, $C_5 = 0$, $C_8 = 0$, $C_{11} = 0$

$$\boxed{C_{3n+2} = 0}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{3n} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{3n+1} x^{3n+1} + \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{C_{3n+2}}_{0} x^{3n+2}} = 0$$

1) C_0; $C_3 = -\frac{C_0}{2\cdot 3}$; $C_6 = \frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$; $C_9 = -\frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$

$$\begin{cases} C_{3n} = \dfrac{(-1)^n C_0}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)} & n = 1, 2 \\ C_0 & n = 0 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} C_{3n+1} = \dfrac{(-1)^n C_1}{3\cdot 4\cdots(3n)\cdot(3n+1)} & n = 1, 2 \\ C_1 & n = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = \underbrace{C_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)}\right]\right]}_{y_1(x)} + \underbrace{C_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)}\right]\right]}_{y_2(x)}$$

Equação de Airy

Difração de Luz e Ondas de Rádio, ...

Outras formas da eq. de Airy

$y'' - xy = 0$ ou $y'' + \alpha^2 x y = 0$.