PSI-2432: Projeto e Implementação de Filtros Digitais
1ª Prova

26 de março de 2015

Nome: Gabarito

Nº USP: ....

Turma: ....

Duração da prova: 100 minutos
Tipo desta prova: com consulta ao material próprio, limitado a uma folha A4.

Notas:

1ª Q: ....

2ª Q: ....

3ª Q: ....

Total: ....

1. (3,6) É dada a função racional

$$X(z) = \frac{2 - 3z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

na variável complexa z.

Pedem-se os itens abaixo.

a) (1,2) A expansão em frações parciais de $X(z)$.
Obs.: Quando, em $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, $\text{gr}\{N(z)\} \geq \text{gr}\{D(z)\}$, deve-se efetuar a divisão indicada, obtendo-se $X(z) = Q(z) + \frac{R(z)}{D(z)}$ de tal forma que $\text{gr}\{R(z)\} < \text{gr}\{D(z)\}$.

a) Divide-se o numerador pelo denominador para que a função racional $X(z)$ imprópria possa ser decomposta na soma de um polinômio $Q(z)$ com uma função racional própria $R(z)/D(z)$:

$$\begin{array}{l|l} 5z^{-2} - 3z^{-1} + 2 & -\frac{1}{4}z^{-2} + 1 \\ \hline -5z^{-2} \qquad\quad + 20 & -20 \\ \qquad -3z^{-1} + 22 & \end{array}$$

ou

$$\boxed{\begin{aligned} X(z) &= -20 + \frac{22 - 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \\ &= -20 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \end{aligned}}$$

na expansão em frações parciais com resíduos A_1 e A_2, que são determinados como

$$A_1 = \left.\frac{22 - 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{22 - 6}{1 + 1} \rightarrow \boxed{A_1 = 8}$$

$$A_2 = \left.\frac{22 - 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{22 + 6}{1 + 1} \rightarrow \boxed{A_2 = 14}$$

b) (1,2) Sendo $X(z)$ a transformada z da sequência $x_1(n)$ com região de convergência $\mathrm{RC}\{x_1(n)\} = \{z \in \mathbb{C} | |z| > 1/2\}$, determine uma expressão analítica para $x_1(n)$.

c) (1,2) Sendo $X(z)$ a transformada z da sequência $x_2(n)$ com região de convergência $\mathrm{RC}\{x_2(n)\} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1/2\}$, determine uma expressão analítica para $x_2(n)$.

b) As expansões das frações parciais com polos devem ser causais, ou seja,

$$x_1(n) = -20\delta(n) + 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 14\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

c) As expansões das frações parciais com polos devem ser anticausais, isto é,

$$x_2(n) = -20\delta(n) - 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) - 14\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

1. a) Solução em z

$$X(z) = \frac{2z^2 - 3z + 5}{z^2 - 1/4}$$

$$\begin{array}{l|l} 2z^2 - 3z + 5 & z^2 - 1/4 \\ \underline{-2z^2 \quad\quad + 1/2} & 2 \\ \quad -3z + 11/2 & \end{array}$$

$$X(z) = 2 + \frac{-3z + 11/2}{z^2 - 1/4} = 2 + \frac{A_1}{z - 1/2} + \frac{A_2}{z + 1/2}$$

$$A_1 = \left.\frac{-3z + 11/2}{z + 1/2}\right|_{z=1/2} = \frac{-3/2 + 11/2}{1/2 + 1/2} \rightarrow \boxed{A_1 = 4}$$

$$A_2 = \left.\frac{-3z + 11/2}{z - 1/2}\right|_{z=-1/2} = \frac{+3/2 + 11/2}{-1/2 - 1/2} \rightarrow \boxed{A_2 = -7}$$

$$\therefore \quad \boxed{X(z) = 2 + \frac{4}{z - 1/2} - \frac{7}{z + 1/2}}$$

1. b)

$$\begin{array}{l|l} 1 & z - 1/2 \\ \underline{-1 + \frac{1}{2}z^{-1}} & z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \ldots \\ \frac{1}{2}z^{-1} & \end{array}$$

$n=1 \quad n=2$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & z + 1/2 \\ \underline{-1 - \frac{1}{2}z^{-1}} & z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} + \ldots \\ -\frac{1}{2}z^{-1} & \end{array}$$

$n=1 \quad n=2$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$\boxed{x_1(n) = 2\,\delta(n) + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)}$$

1. c)

$$\begin{array}{l|l} 1 & -1/2 + z \\ \underline{-1 + 2z} & -2 - 4z - \ldots \\ 2z & \end{array}$$

$n=0 \quad n=-1$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(-n)$$

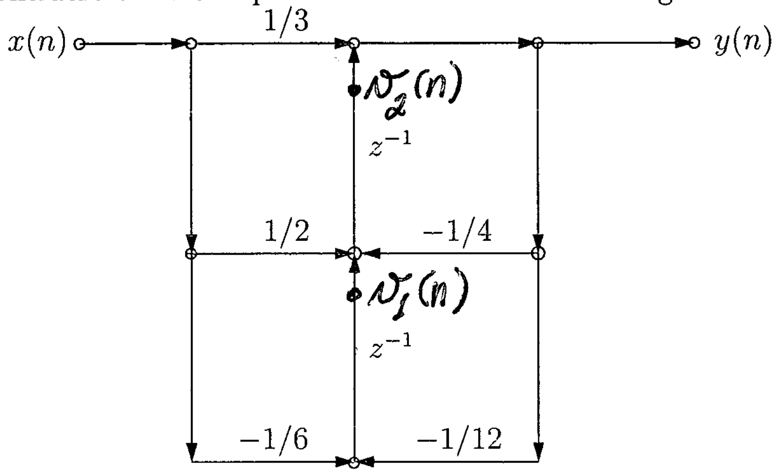
$$\begin{array}{l|l} 1 & 1/2 + z \\ \underline{-1 - 2z} & 2 - 4z + 8z^2 - \ldots \\ -2z & \\ \underline{2z + 4z^2} & \\ 4z^2 & \end{array}$$

$n=0 \quad n=-1 \quad n=-2$

$$-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(-n)$$

$$\boxed{x_2(n) = 2\,\delta(n) - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(-n) + 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(-n)}$$

2. (3, 0) Considere o filtro implementado na estrutura da figura abaixo.



Pedem-se os itens abaixo.

a) (1,2) Escreva um sistema de equações de diferenças para fornecer a saída em função das variáveis dos registradores e da entrada bem como para a atualização das variáveis dos registradores.

$$\begin{cases} v_1(n+1) = -\frac{1}{6}x(n) - \frac{1}{12}y(n) & (1) \\ v_2(n+1) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{4}y(n) + v_1(n) & (2) \end{cases}$$

$$y(n) = \underset{\overset{\shortparallel}{1/3}}{b_0}\, x(n) + v_2(n)$$

ou

$$y(n) = \frac{1}{3}x(n) + v_2(n) \quad (3)$$

b) (0,9) Determine uma equação de diferenças que forneça a saída corrente em função da entrada corrente, de eventuais entradas atrasadas e de saídas atrasadas.

c) (0,9) Determine a função de transferência do filtro em questão.

b) Substituindo (1) para 1º membro no instante n em (2), obtemos

$$v_2(n+1) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{4}y(n) - \frac{1}{6}x(n-1) - \frac{1}{12}y(n-1) \quad (4)$$

Substituindo (2) e (4), tomadas no instante n, em (3), vem

$$y(n) = \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) - \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{6}x(n-2) - \frac{1}{12}y(n-2)$$

que, com termos rearranjados, fica

$$\boxed{\begin{aligned} y(n) = {} & \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) - \frac{1}{6}x(n-2) \\ & - \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{12}y(n-2) \end{aligned}}$$

c) Tomando a transformada z da equação de diferenças obtida no item b), temos

$$\begin{aligned} Y(z) = {} & \frac{1}{3}X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}X(z) - \frac{1}{6}z^{-2}X(z) \\ & - \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{12}z^{-2}Y(z) \end{aligned}$$

ou

$$\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{12}\right)Y(z) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}\right)X(z)$$

e finalmente

$$\boxed{\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{12}z^{-2}}}$$

3. $(3,4)$ Um filtro tem a função de tranferência

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}.$$

A respeito desse filtro, responda os itens abaixo.

a) (1,2) Forneça sua função de amplitude e sua resposta de fase linear ou linear generalizada. Calcule também seu atraso de grupo.

a)
$$H(e^{j\omega}) = 1 - 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}$$
$$= e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega}\right)$$
$$= -2(1-\cos\omega)\, e^{-j\omega}$$
$$= A(\omega)\, e^{j\theta(\omega)}$$

Portanto, identificamos

$$\boxed{\begin{aligned} A(\omega) &= -2(1-\cos\omega) \\ \theta(\omega) &= -\omega \end{aligned}}$$

O atraso de grupo é

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \rightarrow \boxed{\tau_g(\omega) = 1} \text{ amostra}$$

b) (1,0) Determine a magnitude da sua resposta em frequência e a correspondente resposta de fase. Simplifique a expressão da magnitude recorrendo a identidades trigonométricas.

c) (1,2) Compare a resposta de magnitude com a função de amplitude e determine o tipo do filtro, isto é, se ele é passa-baixas, passa-altas, passa-faixa ou de outro tipo.

$$H(e^{j\omega}) = 1 - 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = (1 - 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega})(1 - 2e^{j\omega} + e^{j2\omega})$$

$$= 1 - 2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 4 + 1 + (e^{j2\omega} - e^{-j2\omega})$$

$$- 2(e^{j\omega} + e^{-j\omega})$$

$$= 6 - 8\cos\omega + 2\cos(2\omega)$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos(2\omega) = 2\cos^2\omega - 1,$$

obtemos

$$|H(e^{j\omega})|^2 = 6 - 8\cos\omega + 4\cos^2\omega - 2$$

$$= 4 - 8\cos\omega + 4\cos^2\omega$$

$$= 4(1 - 2\cos\omega + \cos^2\omega)$$

$$= 2^2(1-\cos\omega)^2$$

que resulta em

$$\boxed{|H(e^{j\omega})| = 2(1-\cos\omega)}$$

$$\boxed{\phi(\omega) = \arctan\frac{2\sin\omega + [-\sin(2\omega)]}{1 - 2\cos + \cos(2\omega)}}$$

c) Notamos que

$$|H(e^{j\omega})| = |A(\omega)|$$

Em $\omega = 0$ (DC) : $|H(1)| = 0$

Em $\omega = \pi$ (Nyquist) : $|H(-1)| = 4$

Em $\omega = \pi/2$ (quad.) : $|H(e^{j\pi/2})| = 2$

Note-se ainda que, como sua derivada $2\sin\omega$ é não-negativa, $|H(e^{j\omega})|$ é monotônica não-decrescente.

Assim, a característica de $H(z)$ é de filtro passa-altas.