

geralmente sofrendo pequenas deformações.

Elementos estruturais são partes resistentes com geometria e características bem definidas, cuja identificação facilita o entendimento da transmissão dos esforços na estrutura. Na edificação da Fig. 1, por exemplo, a laje intermediária transfere esforços para as vigas, que os transferem para os pilares, que por sua vez os transferem para os elementos da fundação. Nem sempre a decomposição da estrutura em elementos estruturais é imediata. A transferência dos esforços pode depender de interações mecânicas complexas entre os diversas partes da estrutura.

28 de Julho de 2011

Edgard S. Almeida Neto
Escola Politécnica da USP

Conceitos Fundamentais de Resistência dos Materiais

Conteúdo

1	Estrutura e Elementos Estruturais	1
1.1	Classificação quanto à Geometria	2
1.2	Estruturas Reticuladas	3
1.2.1	Barra	4
1.2.2	Trecho	5
1.2.3	Nó	5
2	Equações da Estática	5
3	Esforços na Estrutura	6
3.1	Tipos de Força	7
3.2	Classificação dos Esforços	8
3.3	Esforços Solicitantes	8
3.4	Tensão	11
3.5	Relações entre os Esforços Solicitantes e as Componentes de Tensão	14
4	Apoios	15
5	Classificação das Estruturas Reticuladas quanto à Estaticidade	17

1 Estrutura e Elementos Estruturais

Denominamos *estrutura* ao conjunto das partes resistentes de um objeto, dispositivo ou construção. As *partes resistentes* são caracterizadas por sua capacidade de transmitir esforços,

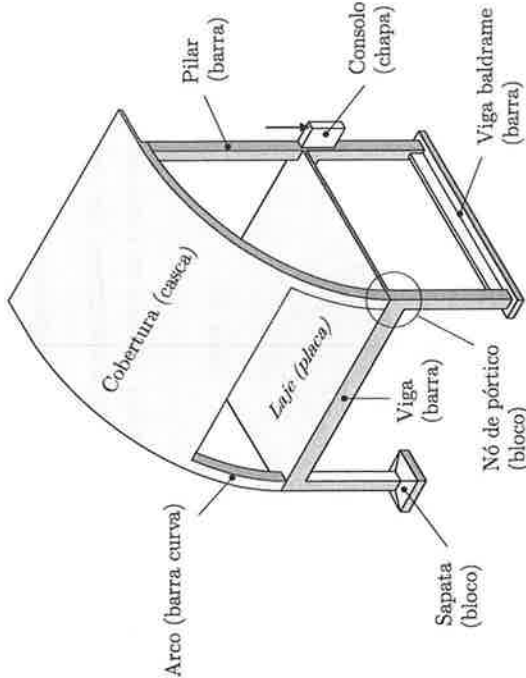


Fig. 1: Elementos estruturais de uma edificação.

1.1 Classificação quanto à Geometria

Os elementos estruturais são classificados quanto à geometria em:

Lineares, quando uma das dimensões predomina sobre as demais, Fig. 2-a. É o caso de cabos, tirantes, vigas e, de modo geral, barras. A geometria é descrita pela equação de uma curva e por seções transversais definidas nos pontos ao longo da curva.

De superfície, quando predominam duas dimensões, Fig. 2-b. A geometria é descrita por uma superfície média e por espessuras associadas aos pontos da superfície.

Se a superfície média for curva, o elemento é denominado *casca*. Se ela for plana, a denominação depende do carregamento atuante: *chapa*, quando os esforços externos estão contidos no plano médio, e *placa*, quando os esforços externos atuam perpendicularmente ao plano médio.

Nos problemas de comportamento linear, um elemento plano submetido a um carregamento genérico pode ser sempre representado por uma chapa mais uma placa. Este é o caso das 'placas' de expansão do microcomputador da Fig. 3.

De volume, quando as três dimensões têm a mesma ordem de grandeza, Fig. 2-c. É o caso de parafusos, porcas, blocos de fundação, nós de pórticos etc.

Os termos *barra*, *folha* e *bloco* são usualmente empregados para designar, respectivamente, os elementos lineares, de superfície e de volume. Por exemplo, o *arco* é uma barra curva e a *casca* é uma folha curva.

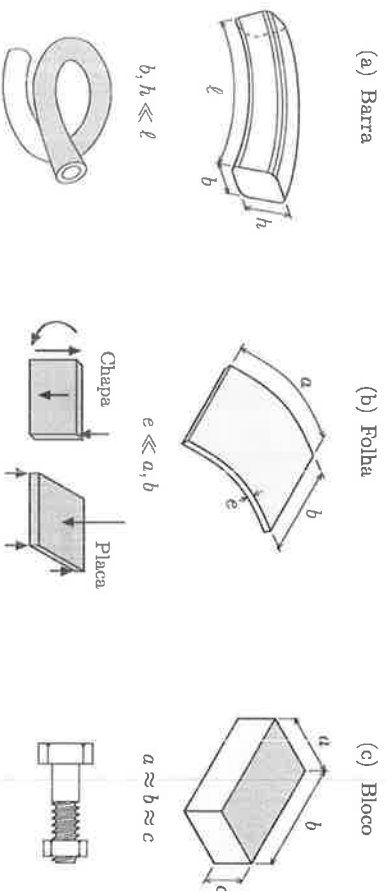


Fig. 2: Classificação quanto à geometria: (a) estrutura linear, (b) de superfície, (c) de volume.

1.2 Estruturas Reticuladas

Estrutura reticulada é aquela formada apenas por elementos estruturais lineares. Dizemos que uma estrutura reticulada é *plana* quando suas barras apresentam um plano central¹ coincidente com o plano médio da estrutura e os esforços externos ou estão contidos no plano médio (vigas poligonais e pórticos planos) ou atuam perpendicularmente a ele (*grelhas*).

A seguir, introduzimos os conceitos de barra, trecho e nó visando facilitar a descrição das estruturas reticuladas.

¹Plano definido pelo eixo longitudinal da barra e um dos eixos centrais-principais da ST.

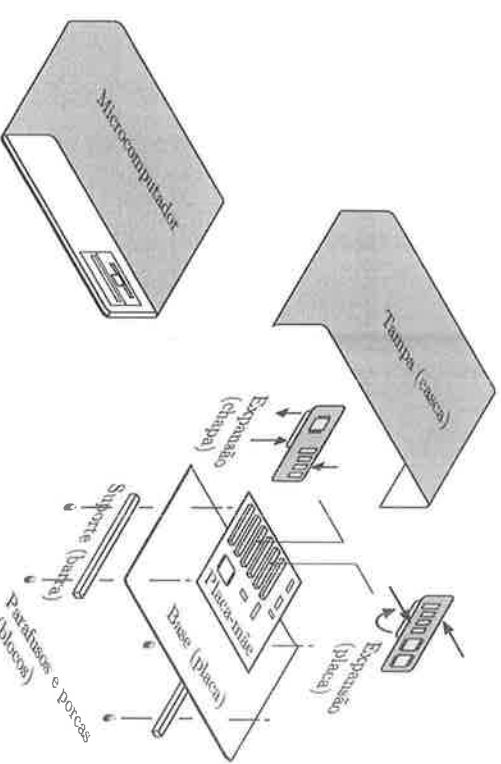


Fig. 3: Elementos estruturais de um microcomputador.

1.2.1 Barra

Barra é o elemento sólido gerado por uma figura plana, não necessariamente constante, que se desloca no espaço permanecendo normal à trajetória de seu baricentro, Fig. 4.

O lugar geométrico dos pontos ocupados pelo baricentro da figura plana recebe o nome de *eixo longitudinal* da barra. As interseções dos planos normais ao eixo com o sólido gerado definem as *seções transversais* da barra. As interseções dos planos normais ao eixo com o sólido gerado definem um ponto arbitrário do eixo. Os adjetivos *reta* e *curva* designam barras de eixos retos e curvos, respectivamente. A barra reta de seção transversal constante recebe o nome de *barra prismática*.

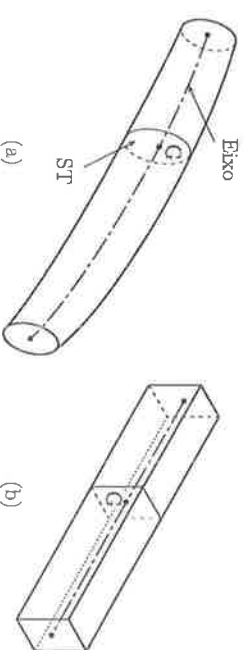


Fig. 4: Eixo e seção transversal de uma barra (a) genérica, (b) prismática.

1.2.2 Trecho

Denominamos *trecho* a um segmento de barra delimitado por STs nas quais

- insere-se uma nova barra, ou uma articulação etc.;
- altera-se a equação que rege a posição do eixo da barra;
- introduz-se uma carga concentrada;
- interrompe-se um carregamento distribuído.

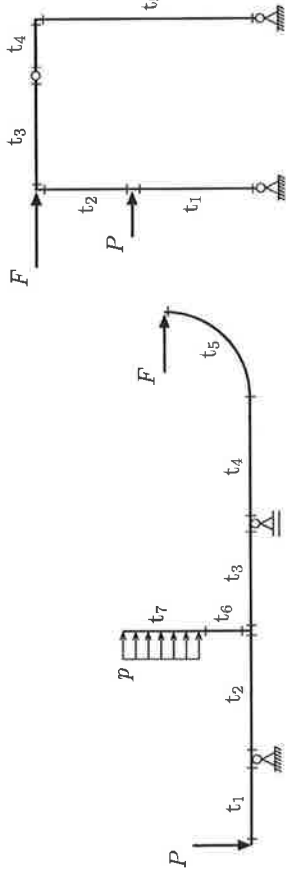


Fig. 5: Delimitação das seções extremas dos trechos.

1.2.3 Nó

Denominamos *nó*² ao ponto de encontro de duas ou mais barras. Dizemos que os nós são *articulados* quando eles permitem rotações relativas entre as extremidades das barras, caso contrário dizemos que eles são *rígidos*.

2 Equações da Estática

Definição 1 (Equilíbrio de um Sólido) Dizemos que um sólido está em *equilíbrio* em relação a um referencial inercial se ele estiver em repouso em relação a esse referencial, isto é, se as posições de todos os seus pontos em relação a esse referencial não variarem com o tempo [1].

²Uma definição mais abrangente é obtida associando-se os nós aos pontos determinados pelas *seções transversais extremas dos trechos*, definição normalmente empregada na Análise Matricial de Estruturas.

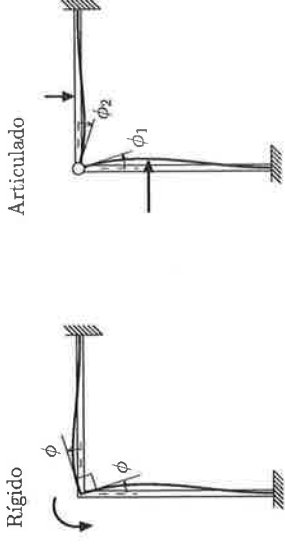


Fig. 6: Nó rígido e nó articulado.

Para um corpo em repouso em relação a um sistema inercial, as leis de Euler³ fornecem:

$$\sum_{i=1}^{n_F} \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad \sum_{j=1}^{n_M} \mathbf{M}_{Oj} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

correspondendo ao equilíbrio de n_F forças $\mathbf{F}_i$ e n_M momentos $\mathbf{M}_j$ em relação a um polo arbitrário O. Reescrevendo a equação acima empregando as componentes de força e momento em relação a três eixos ortogonais x , y e z passando por O, obtemos

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & \sum M_{Ox} &= 0, \\ \sum F_y &= 0, & \sum M_{Oy} &= 0, \\ \sum F_z &= 0, & \sum M_{Oz} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde os índices foram omitidos. Para um sistema de forças coplanares em que as forças e momentos atuam no plano definido pelos eixos x e y , restam apenas três equações não-identicamente nulas:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, \\ \sum F_y &= 0, \\ \sum M_{Oz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

3 Esforços na Estrutura

O termo *esforço* é uma designação genérica que abrange as noções de força (força concentrada, força distribuída sobre linha, força de superfície e força de volume), momento e tensão [5].

³As leis de Euler estendem, para a mecânica dos sólidos, a segunda lei de Newton.

3.1 Tipos de Força

Existem dois tipos de força que descrevem a interação entre sólidos: forças distribuídas de superfície e forças distribuídas de volume.

Forças de superfície — forças que atuam nas superfícies dos sólidos, como a pressão de um líquido, as forças de atrito etc.

Forças de volume — forças que atuam nas partículas que compõem o sólido, sem que haja contato entre os sólidos. A força gravitacional e as forças eletromagnéticas são exemplos conhecidos.

Essas forças são também conhecidas por *forças de contato* e *forças de massa*, respectivamente, o que acentua o fato de admitirem interpretações físicas. A Mecânica também emprega forças idealizadas, ou seja, forças definidas a partir das resultantes parciais ou totais das primeiras, Fig. 7. Por exemplo,

Força distribuída sobre linha — força por unidade de comprimento representando forças distribuídas em superfícies *estreitas* ou em volumes *alongados*. A força distribuída tem grande aplicação nas estruturas reticuladas, sua intensidade sendo obtida a partir do conceito de esforços mecanicamente equivalentes em uma superfície cu volume elementar carregado, Fig. 8.

Força concentrada — resultante de forças distribuídas em pequenas superfícies ou volumes aplicada pontualmente.

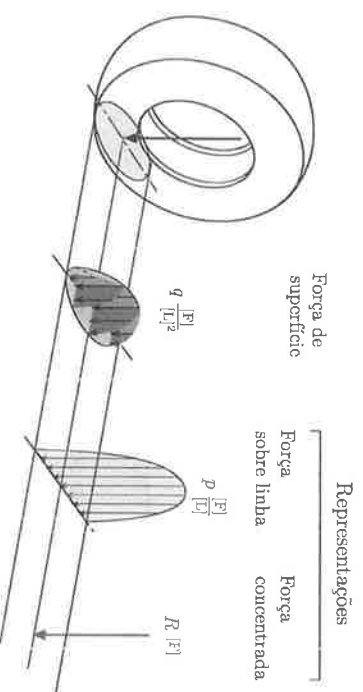


Fig. 7: Aproximações sucessivas da força de contato [3].

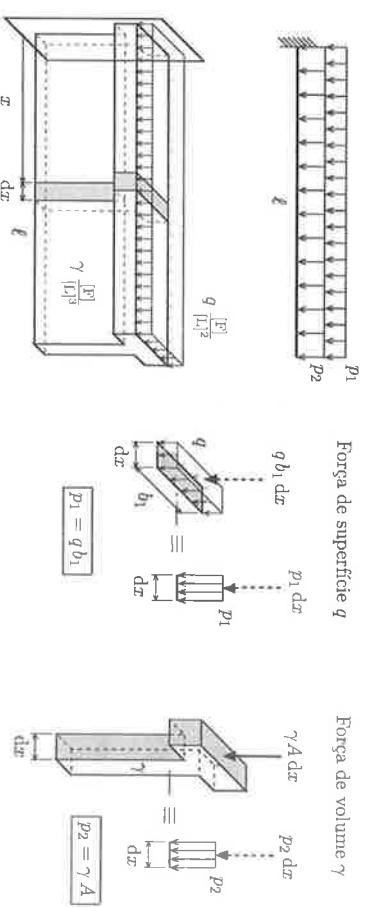


Fig. 8: Cálculo da força distribuída sobre linha. Viga submetida a forças distribuídas p_1 e p_2 mecanicamente equivalentes à força de superfície q e ao peso próprio da viga.

3.2 Classificação dos Esforços

Os esforços podem ser classificados em externos e internos à estrutura.

- Os *esforços externos* decorrem da interação entre a estrutura e os sólidos que a rodeiam. Eles podem ser
 - *ativos*, correspondendo a esforços aplicados, tais como o peso próprio, a pressão de um líquido, o efeito de um campo eletromagnético;
 - *reativos*, ou simplesmente *reações*, correspondendo a esforços introduzidos por vínculos externos para manter a estrutura em equilíbrio.
- Os *esforços internos* descrevem a interação entre partes da mesma estrutura. Eles admitem duas representações bastante distintas nas estruturas reticuladas, a primeira expressa nos pontos do sólido e a segunda, resumida às seções transversais das barras:
 - *tensões*, esforços internos pontuais descrevendo a interação entre partículas;
 - *esforços solicitantes*, resultantes de força e momento que descrevem a interação no plano da ST.

3.3 Esforços Solicitantes

Considere-se uma barra em equilíbrio sob a ação de esforços externos. Seja α um plano perpendicular ao eixo, cuja intersecção com a barra a subdivide nas partes I e II indicadas na Fig. 9. Se a barra está em equilíbrio, suas partes também têm que estar. Como os esforços

externos em I não estão necessariamente equilibrados, evidencia-se a existência de esforços internos transmitidos de II para I através da seção A, os quais possibilitam o equilíbrio. As resultantes de força, $\mathbf{R}$, e momento, $\mathbf{M}$, em relação ao centro de gravidade G são denominadas *esforços solicitantes* na seção transversal.

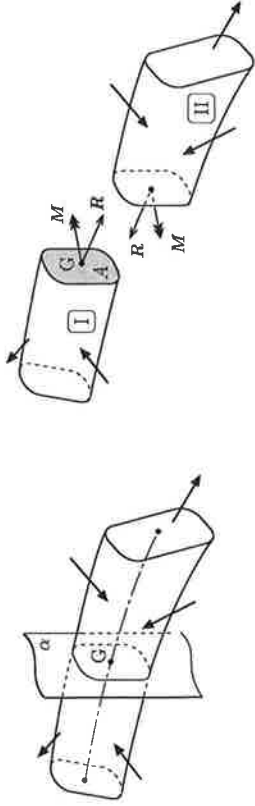


Fig. 9: Definição de esforços solicitantes. Sólido antes e depois do corte imaginário.

É usual decompor os vetores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}$ em três direções perpendiculares, sendo uma delas coincidente com a direção do eixo da barra como mostrado na Fig. 10. As componentes assim obtidas são designadas:

Força Normal (N) — componente normal à ST; positiva quando traciona a ST.

Força Cortante (V_y e V_z) — componentes tangenciais à ST; positivas quando tendem a girar a seção no sentido horário (convenção que depende do ponto de vista do observador).

Momentos Fletores (M_y e M_z) — componentes de momento em relação aos eixos y e z passando por G; positivas quando orientadas nas direções dos respectivos eixos.

Momento em relação ao eixo da barra (M_x) — positivo quando o vetor momento tende a sair da ST. Para seções com dupla simetria, este momento é igual ao momento de torção da barra.

No caso plano, os índices podem ser omitidos, fornecendo a representação da Fig. 11. Neste curso, o momento fletor será considerado positivo quando tracionar o lado inferior da barra. Repare que as convenções mostradas na figura satisfazem implicitamente a lei da ação e reação.

Teorema 1 (Teorema do Corte ou Teorema dos Esforços Solicitantes) Se o plano imaginário α da seção transversal dividir o sólido em duas partes I e II, então os esforços solicitantes que atuam no centro de gravidade da ST da parte I são mecanicamente equivalentes às resultantes de força e momento dos esforços externos aplicados em II.

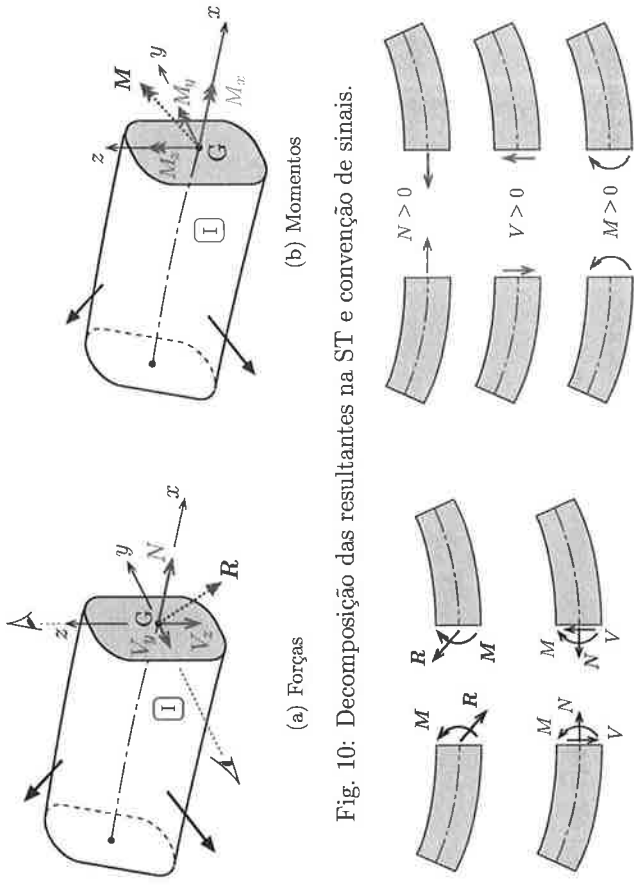


Fig. 10: Decomposição das resultantes na ST e convenção de sinais.

Fig. 11: Problema plano: esforços solicitantes e convenção de sinais.

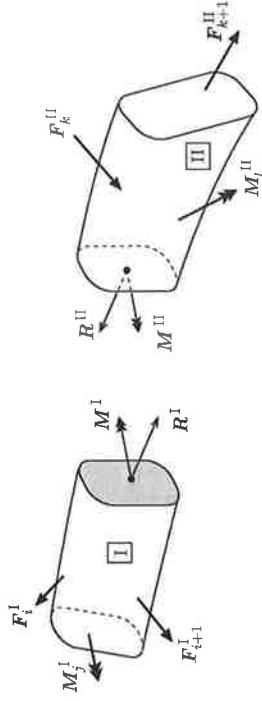


Fig. 12: Teorema dos Esforços Solicitantes.

PROVA Pelo princípio da ação e reação⁴, têm-se que os esforços nas seções opostas são iguais e de sinais contrários:

$$\mathbf{R}^I = -\mathbf{R}^{II}, \quad \mathbf{M}^I = -\mathbf{M}^{II}.$$

⁴Demonstra-se que a terceira lei de Newton pode ser estendida para sólidos.

Por outro lado, o equilíbrio de forças na parte II fornece

$$\sum_k \mathbf{F}_k^{\text{II}} + \mathbf{R}^{\text{II}} = \mathbf{0},$$

portanto,

$$\mathbf{R}^{\text{I}} = \sum_k \mathbf{F}_k^{\text{II}}.$$

O equilíbrio de momentos em relação à G fornece

$$\sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{\text{II}} + \sum_l \mathbf{M}_l^{\text{II}} + \mathbf{M}^{\text{II}} = \mathbf{0},$$

logo,

$$\mathbf{M}^{\text{I}} = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{\text{II}} + \sum_l \mathbf{M}_l^{\text{II}}.$$

□

Embora o teorema do corte tenha uma demonstração simples, o seu emprego facilita bastante o cálculo dos esforços solicitantes nas STs. Adicionalmente, ele permite que se desenvolva a idéia intuitiva de transmissão de esforços nas estruturas abertas.

3.4 Tensão

Definição — tensão de Cauchy

Seja V um sólido em equilíbrio sob a ação de esforços externos, Fig. 13. Seja P um ponto qualquer de V e sejam I e II as duas partes em que o sólido fica dividido quando ele é interceptado por um plano imaginário α passando por P . Seja A a figura plana resultante da intersecção de V e o plano α .

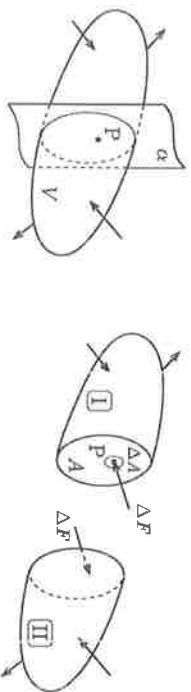


Fig. 13: Sólido V interceptado por um plano imaginário α e o equilíbrio de suas partes.

Se o sólido V está em equilíbrio, suas partes I e II também estão em equilíbrio. Como os esforços externos em I não estão necessariamente equilibrados, evidencia-se a existência de

esforços transmitidos de II para I através de A que possibilitam o equilíbrio. Esses esforços, por aparecerem no interior do corpo, são chamados de *esforços internos*. A distribuição dos esforços internos na ST é desconhecida e sua determinação é um dos objetivos da Resistência dos Materiais. Admitiremos que seja sempre possível calcular sua resultante de força em uma pequena área ΔA ao redor do ponto P e que o momento correspondente tenda a zero quando ΔA tender a zero.

Seja $\Delta \mathbf{F}$ a resultante dos esforços internos exercidos pela parte II na parte I e transmitidos através da área ΔA ao redor de P . A lei da ação e reação garante que a resultante exercida por I em II é igual e de sinal oposto a $\Delta \mathbf{F}$, Fig. 13. A *tensão média* no ponto P , considerando o plano α e a área ΔA , é definida por

$$\rho_m(P, \alpha, \Delta A) = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}.$$

Admitindo que distribuição dos esforços internos na seção seja contínua, definimos *vetor tensão* no ponto P e no plano α por

$$\rho(P, \alpha) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}.$$

Diferentemente do conceito de vetor aplicado, o vetor tensão ρ depende também do plano α . Contudo, observamos que fixado o ponto e o plano, e somente neste caso, podemos lidar com ρ usando a álgebra vetorial.

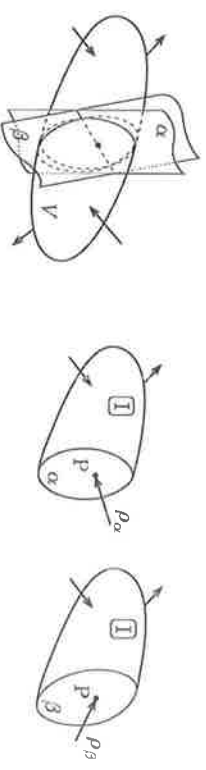


Fig. 14: Vetores de tensão no mesmo ponto, mas em planos distintos.

Uma abordagem mais abrangente desenvolvida por Cauchy permite representar as componentes do vetor tensão ρ no ponto P em função do plano α . Essa abordagem faz uso de uma entidade matemática denominada tensor e dá origem ao tensor das tensões $\mathbf{T}$.

Componentes de ρ associadas ao plano α

Fixado o plano α , ou equivalentemente o seu versor normal externo $\mathbf{n}$, é usual decompor o vetor tensão ρ no ponto P nos vetores normal σ e tangencial τ ao plano, denominados *vetor*

tensão normal e *vetor tensão tangencial* ou *de cisalhamento*, Fig. 15-a. A magnitude do vetor normal, denominada *tensão normal*, é dada pelo produto escalar⁵

$$\sigma = \rho \cdot \mathbf{n}; \quad (3.4)$$

enquanto, a *tensão tangencial* ou *de cisalhamento*, $\tau = \|\boldsymbol{\tau}\|$, é obtida por

$$\tau = \sqrt{\|\boldsymbol{\rho}\|^2 - \sigma^2} = \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} - (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})^2}. \quad (3.5)$$

Na Resistência dos Materiais, é conveniente trabalharmos com as componentes τ_{xy} e τ_{zz} de $\boldsymbol{\tau}$ medidas nas direções dos eixos y e z contidos no plano da seção, Fig. 15-b. O primeiro índice de τ indica o plano de atuação e o segundo, a sua direção.

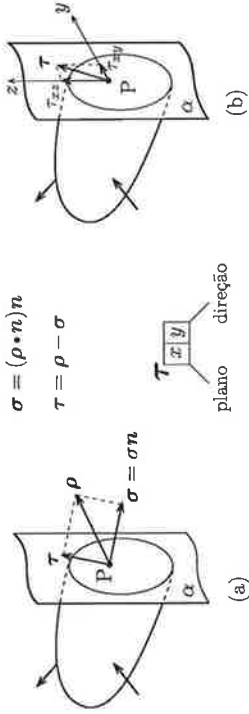


Fig. 15: (a) Tensão normal σ e tensão tangencial τ ; (b) decomposição da tensão tangencial.

Convenções de sinais

A tensão normal σ é positiva quando ela for de tração e negativa quando de compressão. No caso plano, a tensão tangencial é positiva quando tende a girar o plano em que atua no sentido horário. As convenções de sinais estão indicadas na Fig. 16 para o caso plano. Observe que elas fornecem sinais idênticos para as tensões nas seções opostas das partes I e II do sólido, satisfazendo implicitamente o princípio da ação e reação.

⁵O produto escalar dos vetores $\boldsymbol{\rho} = \rho_x \mathbf{i} + \rho_y \mathbf{j} + \rho_z \mathbf{k}$ e $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$ na base ortonormal $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ é dado por:

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} = \rho_x n_x + \rho_y n_y + \rho_z n_z;$$

enquanto o módulo do vetor $\boldsymbol{\rho}$ é definido por

$$\|\boldsymbol{\rho}\| = \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}}.$$

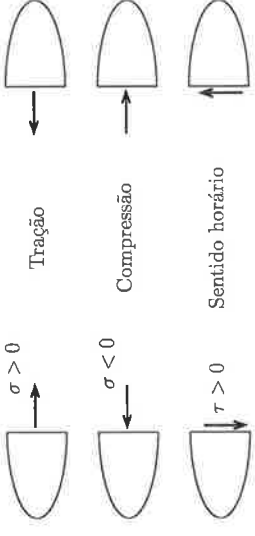


Fig. 16: Convenção de sinais.

Unidades

A tensão tem unidade de força distribuída por unidade de área ($[F]/[L]^2$). No Sistema Internacional (SI), a unidade é denominada Pascal ($\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$). Em virtude do pequeno valor desta unidade, é usual empregarmos unidades que são múltiplos de várias ordens de magnitude nas aplicações da Resistência dos Materiais. Por exemplo, $\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa}$ (megapascal) e $\text{kN}/\text{cm}^2 = 10 \text{ MPa}$. No sistema técnico, é comum o uso de kgf/cm^2 e $\text{tf}/\text{m}^2 = 10^3 \text{ kgf}/\text{m}^2 = 10^{-1} \text{ kgf}/\text{cm}^2$. As seguintes relações são úteis para converter as unidades de tensão:

$$1 \text{ MPa} = 0,1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2};$$

$$1 \text{ MPa} = \frac{1}{9,81 \times 10^{-2}} \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \approx 10 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2};$$

$$1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 10 \text{ MPa} \approx 0,1 \frac{\text{tf}}{\text{cm}^2} = 100 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}.$$

3.5 Relações entre os Esforços Solicitantes e as Componentes de Tensão

Por definição, os esforços solicitantes numa seção transversal correspondem às resultantes de força e momento, expressas no centro de gravidade G^6 , das tensões que atuam no plano da seção. Para um elemento de área dA situado no quadrante positivo, temos em relação a G ,

⁶Mais adiante, quando o momento M_x for substituído pelo momento de torção, M_T , as forças cortantes passarão a ser definidas no centro de cisalhamento, ou centro de torção, da ST.

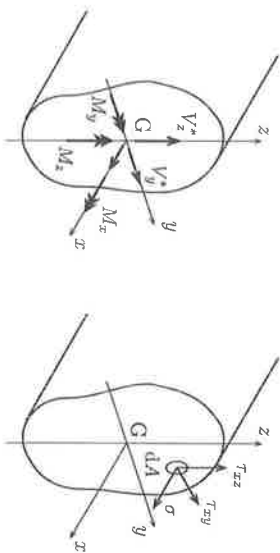


Fig. 17. Esforços solicitantes e componentes de tensão na seção transversal.

conforme indica a Fig. 17,

$$\begin{aligned} dN &= \sigma dA, & dV_y^* &= \tau_{xy} dA, & dV_z^* &= \tau_{xz} dA, \\ dM_y &= \sigma z dA, & dM_z &= -\sigma y dA, & dM_x &= (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \end{aligned}$$

em que os sinais dos momentos são obtidos usando a regra da mão direita e, excepcionalmente, o asterisco é usado para indicar forças cortantes concordando com os sentidos dos respectivos eixos⁷. Integrando na seção transversal, obtemos

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA, & V_y^* &= \int_A \tau_{xy} dA, & V_z^* &= \int_A \tau_{xz} dA, \\ M_y &= \int_A \sigma z dA, & M_z &= -\int_A \sigma y dA, & M_x &= \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Repare que obter os esforços solicitantes uma vez conhecidas as tensões é relativamente simples. As relações contrárias requerem, além das equações de equilíbrio, hipóteses de distribuição de tensões.

4 Apoios

Apoios são dispositivos pontuais que vinculam a estrutura a outros sistemas estruturais restringindo seu movimento. Existem três tipos básicos de apoio:

⁷Lembrar que o sinal da força cortante foi definido z partir do ponto de vista do observador e não dos sentidos dos eixos na Seção 3.3.

apoio simples (*articulação móvel*) — impede deslocamento na direção normal a um plano estabelecido;

apoio fixo (*articulação fixa*) — impede qualquer deslocamento do ponto;

engaste *engaste*(*engastamento*) — impede qualquer deslocamento e rotação do ponto.

A Tabela 1 contém as representações usuais dos apoios e as reações mobilizadas. Note que o número de reações é sempre igual ao número de vínculos, ou seja, ao número de restrições impostas ao movimento do ponto. A decomposição em componentes justifica-se quando a direção da reação é desconhecida. Os vínculos de deslocamento mobilizam *forças* reativas, enquanto os vínculos de rotação mobilizam *momentos* reativos. Combinações de vínculos originam outros tipos de apoio, como por exemplo engastes móveis nas direções longitudinal e transversal ao eixo da barra junto ao engastamento, Fig. 18.

Tabela 1: Tipos básicos de apoio no plano.

Apoio	Modelo físico	Representações	Reações
Simples			
Fixo			
Engaste			

Na representação de apoios de estruturas tridimensionais, uma combinação muito maior de vínculos é possível. Uma prática corrente consiste em indicar os vínculos de deslocamento por

pequenas barras bi-articuladas na direção vinculada, e os de rotação por ângulos representando os planos vinculados, Fig. 19.

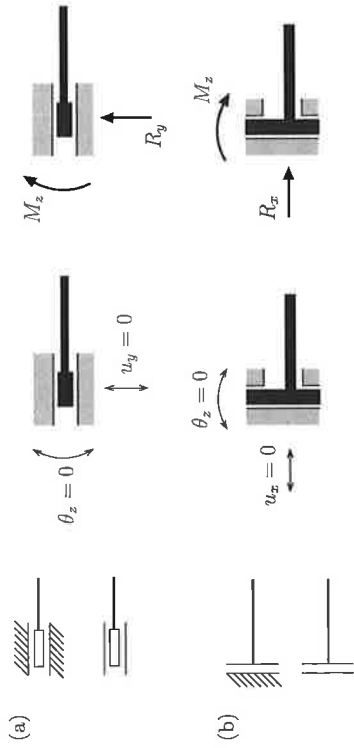


Fig. 18: Engastes móveis nas direções (a) longitudinal e (b) transversal à barra.

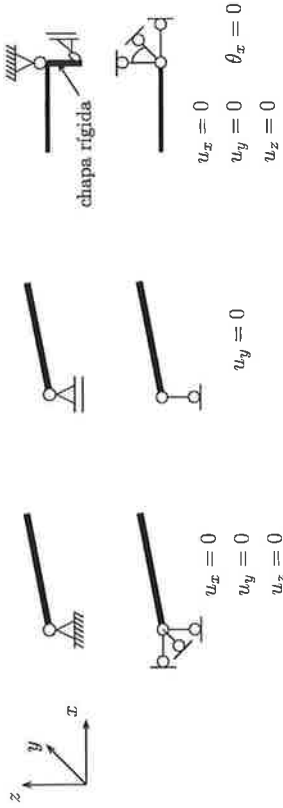


Fig. 19: Representação tridimensional dos apoios.

5 Classificação das Estruturas Reticuladas quanto à Estaticidade

Classificamos as estruturas reticuladas quanto à estaticidade em:

Hipostáticas Estruturas em que o número de equações da estática é maior que o de esforços incógnitos.

Nas estruturas hipostáticas, os vínculos internos e externos são insuficientes para impedir movimentos de corpo rígido da estrutura ou de algum trecho em seu interior. O equilíbrio

estático é possível apenas sob a ação de determinadas ações, e mesmo assim ele é instável. As estruturas hipostáticas também são denominadas *mecanismos*.

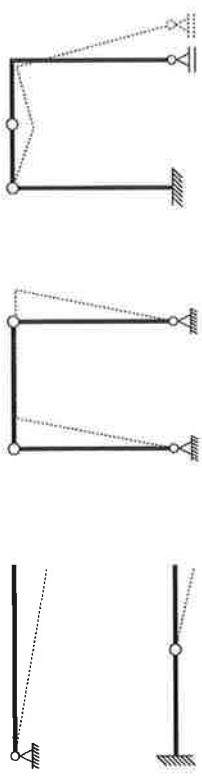


Fig. 20: Estruturas hipostáticas.

Isostáticas Também conhecidas por *estaticamente determinadas*, são estruturas em que as reações e os esforços solicitantes em qualquer seção transversal (ST) ficam completamente determinados pelas equações da estática.

Consequentemente, as distribuições dos esforços solicitantes⁸ independem tanto da forma da seção transversal quanto das propriedades dos materiais que constituem a estrutura. Este fato permite obtermos os esforços solicitantes antes de especificarmos os materiais e as dimensões da seção a resisti-los.

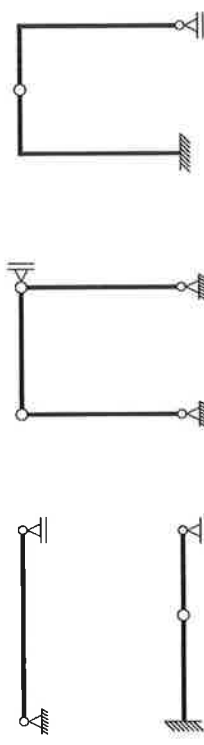


Fig. 21: Estruturas isostáticas.

Hiperestáticas Estruturas em que as equações de equilíbrio não bastam para determinarmos os esforços solicitantes em todas as suas STs, sendo necessário a consideração da deformabilidade da estrutura na resolução.

Se o número de reações de apoio em uma estrutura hiperestática é maior que o de equações de equilíbrio⁹ a estrutura é dita *externamente hiperestática*, Fig. 22. Se a estrutura permanecer indeterminada uma vez conhecidos todos os esforços reativos, ela é dita *internamente hiperestática*.

⁸As deformações devem ser pequenas para que as equações de equilíbrio possam ser escritas na configuração indeformada.

⁹Considerando as equações fundamentais da estática e as condições impostas na estrutura, como a de momento nulo nas articulações.

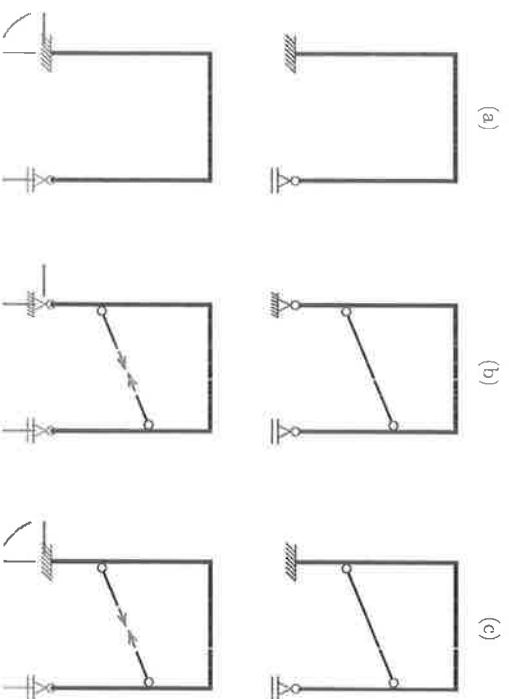


Fig. 22: Estruturas hiperestáticas: (a) externamente, (b) internamente, (c) interna- e externamente.

Críticas Estruturas cuja verificação do equilíbrio requer que as equações da estática sejam escritas na configuração deformada. O equilíbrio é possível por que elas conseguem mobilizar, na configuração deformada, esforços internos e esforços reativos capazes de equilibrar os esforços aplicados.

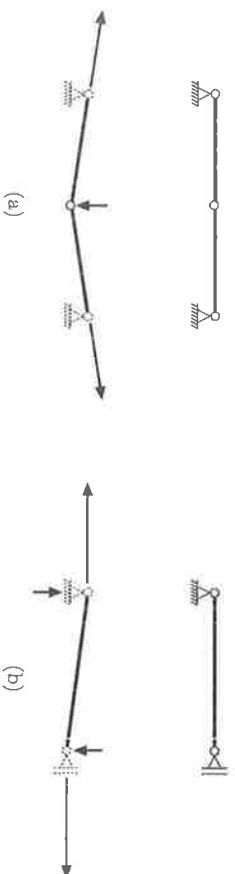


Fig. 23: Estruturas críticas: mobilização de (a) forças normais inclinadas e (b) forças binárias nos apoios.

Nota 1 A classificação quanto à estaticidade é uma característica da estrutura e *independe* do carregamento.

Muitas vezes o reconhecimento do tipo de estrutura é mais simples se examinarmos os movimentos de corpo rígido¹⁰ da estrutura e a vinculação (interna e externa) capaz de restringi-los.

- Uma estrutura **hipostática** apresenta um ou mais movimentos de corpo rígido, podendo envolver toda a estrutura ou apenas parte dela.
- Uma estrutura **isostática** não apresenta movimentos de corpo rígido, mas passa a apresentar se um vínculo qualquer for eliminado.
- Uma estrutura **hiperestática** não apresenta movimento de corpo rígido e continua não apresentando se um ou mais vínculos, denominados *redundantes* ou *excedentes*, forem eliminados.
- Uma estrutura **crítica** apresenta uma tendência de movimento em relação ao qual a estrutura não opte resistência na configuração indeformada, mas começa a opor assim que o movimento se inicia. Nesta situação, a mobilização da estrutura ocorre gradativamente com grande não-linearidade entre as deformações e os deslocamentos.

As estruturas planas com até dois vínculos externos são necessariamente hipostáticas, entretanto, um número maior de vínculos não implica em que a estrutura seja isostática ou hiperestática, Fig. 24.

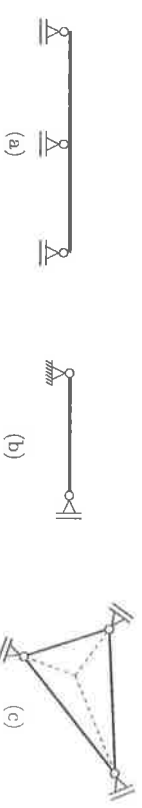


Fig. 24: Estruturas planas com três vínculos: (a) hipostática, (b) e (c) críticas.

Grau de Hiperestaticidade

Grau de hiperestaticidade (GH) é o número de vínculos redundantes (externos e internos) que devem ser removidos para que a estrutura se torne estaticamente determinada (isostática).

¹⁰Movimentos sem deformação, decomponíveis em movimentos de translação e rotação da estrutura ou de seus elementos estruturais.

Simplificadamente, ele corresponde à diferença entre o número de esforços incógnitos, externos e internos, e o número de equações da estática,

$$GH = \left[\begin{array}{c} \text{Núm. de} \\ \text{vínculos} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Núm. de equações} \\ \text{da estática} \end{array} \right].$$

As equações não se restringem às equações de equilíbrio (6 no espaço ou 3 no plano) pois condições estáticas na forma de momentos ou forças podem ser impostas. Este é o caso da articulação no meio de uma barra pois ela implica em um momento fletor nulo na ST correspondente. Na definição de grau de hiperestaticidade está implícito que a estrutura tenha pelo menos o número mínimo de vínculos impedindo os movimentos de corpo rígido.

Agradecimentos

O autor agradece os comentários e sugestões do Prof. Henrique de Britto Costa.

Referências

- [1] Lindenberg, N., Henrique, *PEF 124: Introdução à Mecânica das Estruturas*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1996.
- [2] Morilla, J. C. and Pereira, B. B., Filho. *Introdução à Resistência dos Materiais*. Preliminar ed., São Paulo, 1996.
- [3] Ricardo, O. G. *Introdução à Resistência dos Materiais*. Editora da Universidade de Campinas, Campinas, 1977.
- [4] Souza Lima, V. M. *Introdução à Resistência dos Materiais*. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - EPUSP, São Paulo, 1955.
- [5] van Langendonck, T. *Vocabulário de Teoria das Estruturas*. Associação Brasileira de Cimento Portland, São Paulo, 1967.

Index

- apoio, 15
- fixo, 16
- simples, 15
- arco, 3
- articulação
 - fixa, 16
 - móvel, 16
- barra, 3, 4
- curva, 4
- prismática, 4
- reta, 4
- bloco, 3
- casca, 3
- chapa, 3
- eixo longitudinal, 4
- elemento estrutural, 2
- engastamento, 16
- engaste, 16
- equilíbrio, 5
- esforço, 6
- ativo, 8
- externo, 8
- interno, 8, 12
- reativo, 8
- solicitante, 8, 9
- estrutura, 1
- crítica, 19, 20
- de superfície, 2
- de volume, 3
- estaticamente determinada, 18
- externamente hiperestática, 18
- hiperestática, 18, 20
- hipostática, 17, 20
- internamente hiperestática, 18
- isostática, 18, 20
- linear, 2
- plana, 3
- reticulada, 3
- folha, 3
- força
 - concentrada, 7
 - cortante, 9
 - de contato, 7
 - de massa, 7
 - de superfície, 7
 - de volume, 7
 - distribuída sobre linha, 7
 - normal, 9
- grau de hiperestaticidade (GH), 20
- mecanismo, 18
- momento
 - de torção, 9
 - fletor, 9
- nó, 5
- articulado, 5
- rígido, 5
- parte resistente, 1
- placa, 3
- reação, 8
- seção transversal, 4

tensão, 8, 11
 convenção de sinais, 13
de cisalhamento, 13
 média, 12
 normal, 13
tangencial, 13
teorema
 do corte, 9
 dos esforços solicitantes, 9
trecho, 5
vetor tensão, 12
 de cisalhamento, 13
 normal, 12
 tangencial, 13
vínculo
 excedente, 20
 redundante, 20

Diagramas de Esforços Solicitantes

Edgard S. Almeida Neto
Escola Politécnica da USP

18 de Abril de 2012

Conteúdo

1	Determinação dos Esforços Solicitantes	1
1.1	Equações Diferenciais de Equilíbrio	1
1.2	Traçado dos Diagramas de Estado por Trechos	3
1.3	Carregamento Distribuído em Barras Inclinadas	9
1.4	Barras Curvas	9
1.5	Vigas Poligonais Bidimensionais	9
1.6	Pórticos e Quadros Tri-Articulados	13
1.7	Vigas Poligonais Tridimensionais	14

1 Determinação dos Esforços Solicitantes

1.1 Equações Diferenciais de Equilíbrio

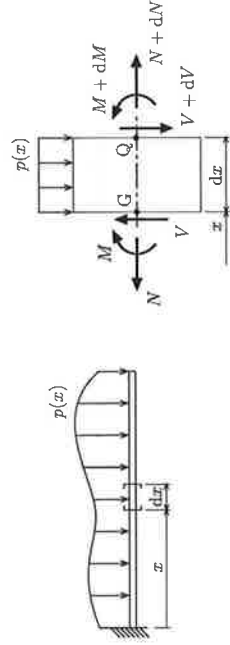


Fig. 1: Trecho reto submetido a uma carga transversal.

Consideremos um trecho de comprimento infinitesimal dx de uma barra prismática submetida a uma carga distribuída transversal $p(x)$, Fig. 1. Sejam M , V e M os esforços solicitantes na seção à esquerda do trecho e dN , dV e dM os acréscimos dos esforços na seção à direita.

O equilíbrio estático do trecho indicado na figura fornece as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad \left\{ -N + (N + dN) = 0 \right. & \Rightarrow dN = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad \left\{ V - p dx - (V + dV) = 0 \right. & \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -p \\ \sum M_Q = 0 & \quad \left\{ M + V dx - p dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0 \right. & \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V \end{aligned}$$

em que o momento $\frac{p(dx)^2}{2}$ é de ordem superior e pode ser desprezado frente aos demais.

A primeira equação mostra que a força normal é constante no trecho e as demais podem ser expressas por

$$\boxed{\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -p(x)}, \quad (1)$$

denominadas *equações diferenciais de equilíbrio* de uma barra reta.

As Eqs. (1) permitem determinar os esforços solicitantes em barras retas sujeitas a qualquer carga $p(x)$ contínua. Quando $p(x)$ é nulo ou constante, as funções $V(x)$ e $M(x)$ são imediatas e os diagramas podem ser traçados a partir dos valores das funções nas extremidades dos trechos sem a necessidade de explicitar suas expressões, Fig. 2.

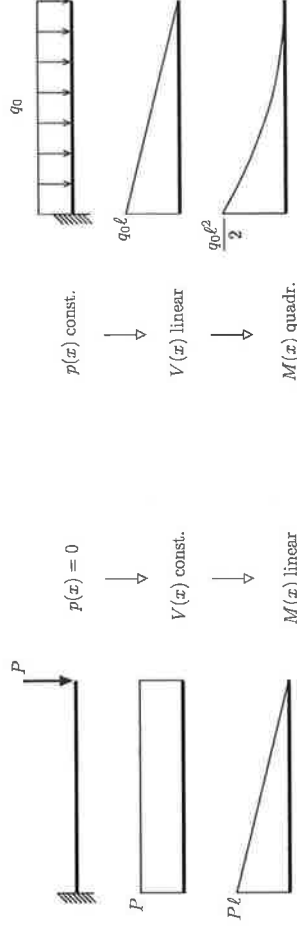
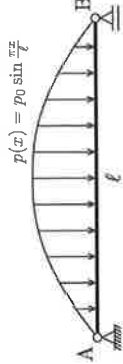


Fig. 2: Variação dos diagramas de V e M .



Exemplo 1 Determine as expressões dos esforços solicitantes empregando as equações diferenciais de equilíbrio.

SOLUÇÃO Resolvendo a equação diferencial $\frac{d^2 M}{dx^2} = -p(x)$, temos

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p_0 \sin \frac{\pi x}{\ell};$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{p_0 \ell}{\pi} \cos \frac{\pi x}{\ell} + C_1,$$

$$M(x) = \frac{p_0 \ell^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{\ell} + C_1 x + C_2.$$

As constantes de integração são obtidas a partir das condições de momento fletor nulo nas extremidades,

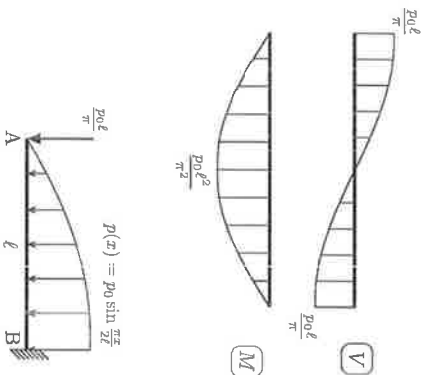
$$M(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$M(\ell) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Logo,

$$V(x) = \frac{p_0 \ell}{\pi} \cos \frac{\pi x}{\ell},$$

$$M(x) = \frac{p_0 \ell^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{\ell}.$$



Problema 1 Trace os diagramas de estado para a viga em balanço ao lado.

1.2 Traçado dos Diagramas de Estado por Trechos

O conhecimento de como os esforços solicitantes variam num trecho de barra possibilita traçarmos os diagramas de estado a partir dos valores nas suas seções extremas. Mesmo para o carregamento distribuído da Fig. 3, podemos traçar o diagrama de momentos sem calcular valores intermediários. Nesse caso, a equação do momento é dada por

$$M(x) = -\frac{p}{2}x^2 + \left(\frac{M_B - M_A}{\ell} + \frac{p\ell}{2}\right)x + M_A$$

em que M_A e M_B são os momentos fletores nas seções extremas afastadas de ℓ . Empregando as propriedades da parábola, a construção gráfica do diagrama segue os seguintes passos:

- desenhe a linha tracejada ligando os momentos M_A e M_B , lembre-se que os momentos fletores são desenhados do lado traçado;
- a partir do ponto médio da linha tracejada e perpendicularmente ao eixo da barra, marque dois pontos **no sentido de p** distantes $\frac{p\ell^2}{8}$;

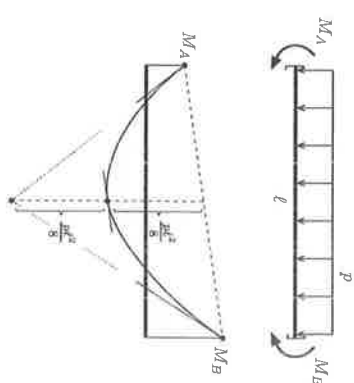


Fig. 3: Trecho submetido a um carregamento uniforme.

- no meio do trecho, a parábola passa pelo primeiro ponto e a tangente é paralela à linha tracejada;
- nas extremidades, a parábola é tangente aos segmentos pontilhados que ligam o segundo ponto aos momentos M_A e M_B .

Exemplo 2 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga ao lado.

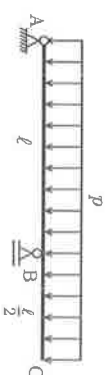


Fig. E2: Barra reta.

SOLUÇÃO

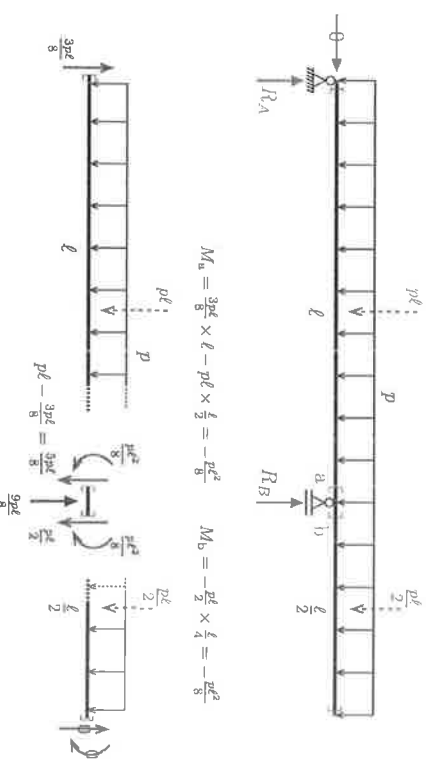


Fig. E2-1: Esforços nas seções.

- Reações

$$\uparrow \left\{ \begin{aligned} R_A + R_B &= \frac{3p\ell}{2}, & \curvearrowright_B \left\{ R_A\ell - p\ell \times \frac{\ell}{2} + \frac{p\ell}{2} \times \frac{\ell}{4} \right. &= 0, & \Rightarrow \\ & & R_B &= \frac{9p\ell}{8}. \end{aligned} \right.$$

$$(\text{verif.}) \quad \curvearrowright_A \left\{ p\ell \times \frac{\ell}{2} - \frac{9p\ell}{8} \times \frac{\ell}{2} + \frac{p\ell}{2} \times \frac{5\ell}{4} \right. = 0$$

- Diagramas de esforços solicitantes

A Fig. E-2-1 ilustra o cálculo dos esforços solicitantes nas seções extremas dos trechos. Os momentos M_A e M_B foram obtidos transferindo os esforços para as seções correspondentes. Conhecidas as formas dos diagramas e os valores de extremidade, traçamos os diagramas conforme a Fig. E-2-2.

- Momento fletor máximo

O momento máximo ocorre na seção em que $dM/dx = V(x) = 0$, ou seja

$$V(x) = \frac{3p\ell}{8} - px = 0 \rightarrow x = \frac{3\ell}{8}.$$

Como $M(x) = \frac{3p\ell}{8}x - \frac{p}{2}x^2$, temos

$$M_{\max} = M\left(\frac{3\ell}{8}\right) = \frac{9}{128}p\ell^2.$$

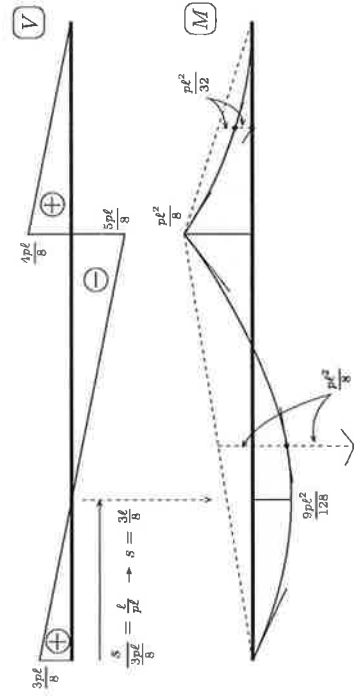


Fig. E-2-2: Diagramas de estado.

Exemplo 3 Trace os diagramas de estado e determine a seção em que atua o máximo momento fletor positivo.

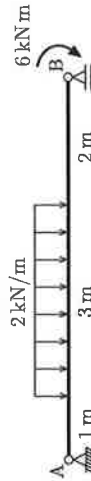


Fig. E-3: Viga bi-apoiada.

SOLUÇÃO

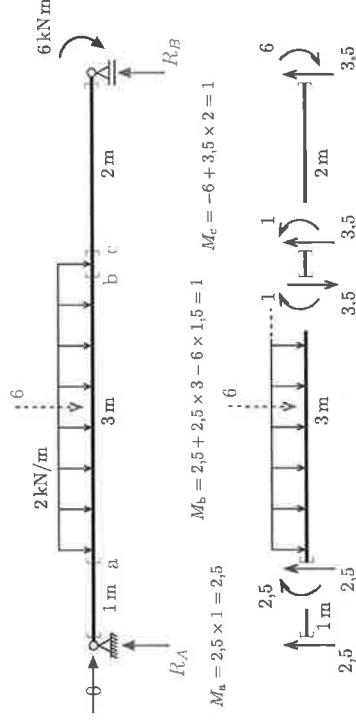


Fig. E-3-1: Esforços nas seções.

- Reações

$$\uparrow \left\{ \begin{aligned} R_A + R_B &= 6, & \curvearrowright_A \left\{ 6 \times 2,5 + 6 - R_B \times 6 \right. &= 0, & \Rightarrow \\ & & R_A &= 2,5 \text{ kN}, \\ & & R_B &= 3,5 \text{ kN}. \end{aligned} \right.$$

$$(\text{verif.}) \quad \curvearrowright_B \left\{ 2,5 \times 6 - 6 \times 3,5 + 6 \right. = 0.$$

- As etapas de construção dos diagramas de estado (ou de esforços solicitantes) estão indicadas nas Figs. E-3-1 e E-3-2.

- O momento fletor máximo ocorre no trecho entre as seções a e b da Fig. E-3-2,

$$V(x) = 2,5 - 2x = 0, \quad \Rightarrow \quad x = 1,25 \text{ m}.$$

Como $M(x) = 2,5 + 2,5x - 2x \times \frac{x}{2} = 2,5 + 2,5x - x^2$, resulta

$$M_{\max} = M(1,25) = 4,0625 \text{ kNm}.$$

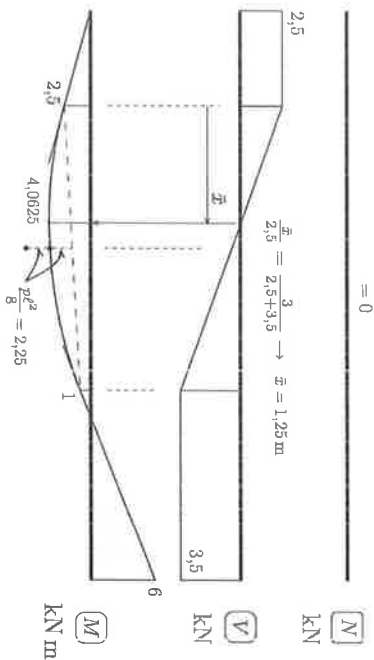
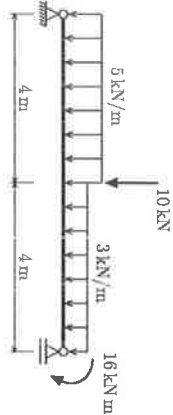


Fig. E3-2: Diagramas de estado.

Problema 2 Trace os diagramas de estado para a viga ao lado e determine os valores extremos do momento fletor.

R.: $M_{\max} = 44 \text{ kN m}$, $M_{\min} = -16 \text{ kN m}$.



Exemplo 4 Trace os diagramas de estado e determine a seção em que atua o máximo momento fletor.

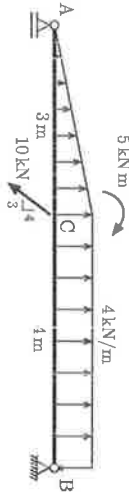


Fig. E4: Barra com carga linear.

SOLUÇÃO

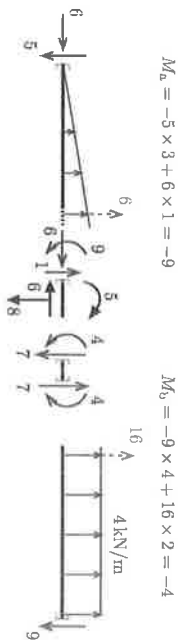
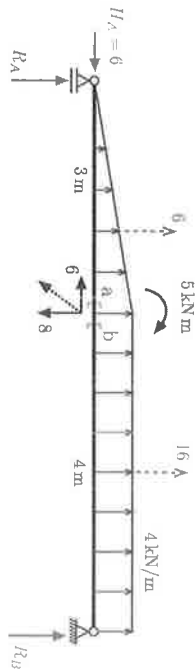


Fig. E4-1: Esforços nas seções.

• Reações

$$\uparrow \left\{ R_A + R_B = -14, \quad \curvearrowright_B \left\{ R_A \times 7 + 6 \times 5 + 5 - 8 \times 4 + 16 \times 2 = 0, \right. \\ \Rightarrow R_A = -5 \text{ kN}, \quad R_B = -9 \text{ kN}.$$

$$(\text{verif.}) \quad \curvearrowright_A \left\{ -6 \times 2 + 5 + 8 \times 3 - 16 \times 5 + 9 \times 7 = 0.$$

• Cálculo do momento fletor máximo

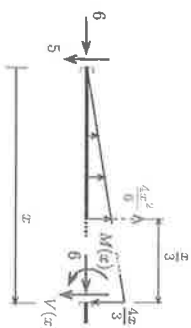
$$V(x) = -5 + \frac{4x^2}{6} = 0 \rightarrow x = 2,739 \text{ m},$$

a outra raiz está fora do intervalo;

$$M(x) = -5 \times x + \frac{4x^2}{6} \times \frac{x}{3} = -5 \times x + \frac{2x^3}{9},$$

$$M_{\max} = M(2,739) = 9,129 \text{ kN m}.$$

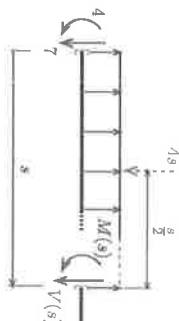
Fig. E4-2: $M_{\max}$ em AC.



$$M(s) = 4 - 7s + 2s^2 \\ V(s) = -7 + 4s \rightarrow x = 1,75 \text{ m}$$

$$M_{\max} = M(1,75) = 10,125 \text{ kN m}$$

Fig. E4-3: $M_{\max}$ em CB.



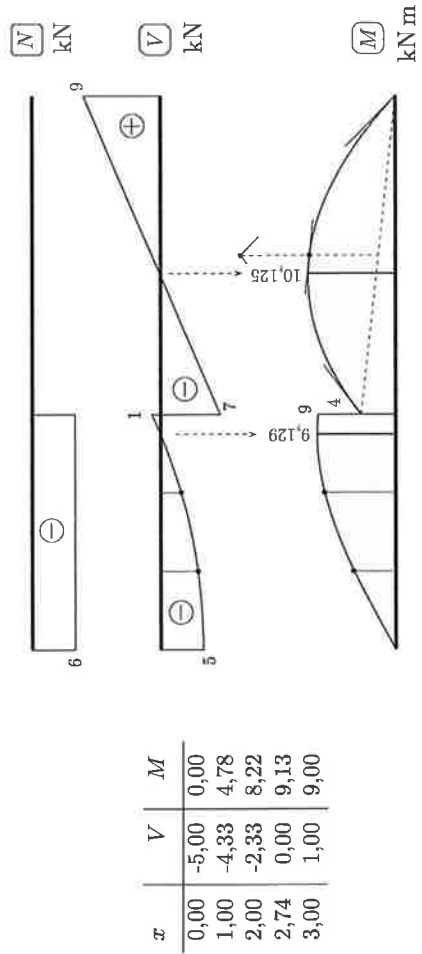


Fig. E 4-4: Diagramas de estado.

1.3 Carregamento Distribuído em Barras Inclinadas

1.4 Barras Curvas

1.5 Vigas Poligonais Bidimensionais

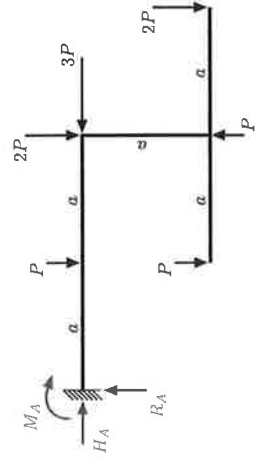


Fig. E 5: Viga poligonal.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \rightarrow \{ H_A - 3P &= 3P \\ \uparrow \{ R_A - P - 2P - P + P - 2P &= 0 \\ \curvearrowleft_A \{ M_A + Pa + 4Pa + Pa - 2Pa + 6Pa &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Rightarrow H_A &= 3P, \\ \Rightarrow R_A &= 5P, \\ \Rightarrow M_A &= -10P. \end{aligned}$$

Exemplo 5 Trace os diagramas de estado para a viga poligonal da figura.

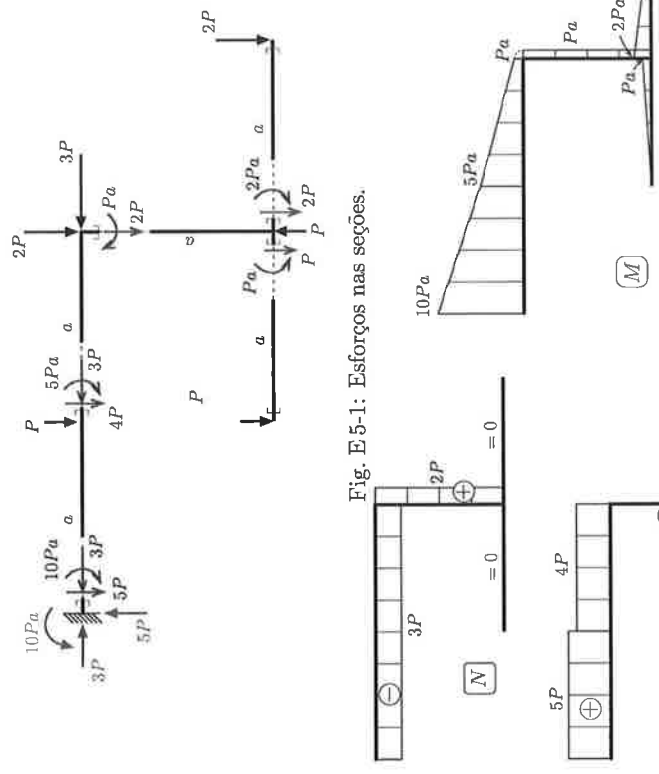


Fig. E 5-1: Esforços nas seções.

Fig. E 5-2: Diagramas de estado.

Exemplo 6 Trace os diagramas de estado para a viga poligonal da figura.

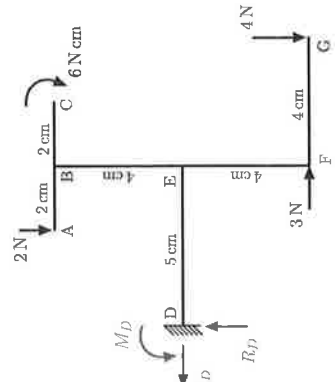


Fig. E 6: Viga poligonal engastada.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} -H_D + 3 &= 0, \\ \uparrow \left\{ \begin{aligned} R_D - 2 - 4 &= 0 \\ -M_D + 2 \times 3 + 6 - 3 \times 4 + 4 \times 9 &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. & \Rightarrow \begin{aligned} H_C &= 3 \text{ N}, \\ R_C &= 6 \text{ N}, \\ M_D &= 36 \text{ N cm}. \end{aligned} \end{aligned}$$

$$(\text{verif.}) \quad \curvearrowright_F \left\{ -36 - 3 \times 4 + 6 \times 5 - 2 \times 2 + 6 + 4 \times 4 = 0. \right.$$

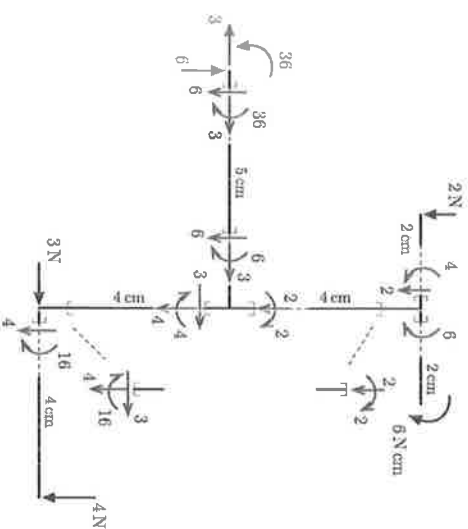


Fig. E-6-1: Esforços nas seções.

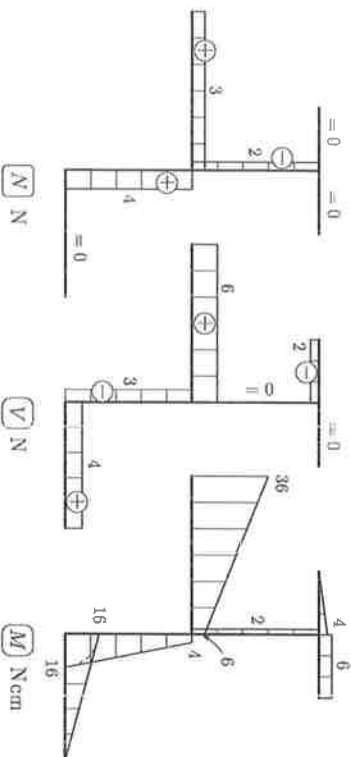


Fig. E-6-2: Diagramas de estado.

Exemplo 7 Trace os diagramas de estado para a viga poligonal biapoiada ao lado.

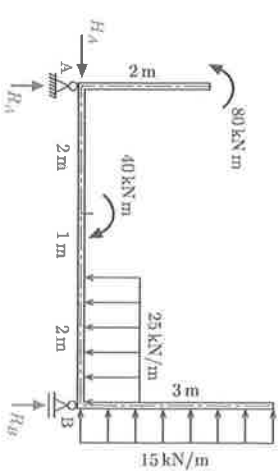


Fig. E7: Viga poligonal biapoiada.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} H_A - 45 &= 0, \\ \uparrow \left\{ \begin{aligned} R_A + R_B &= 50 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. & \Rightarrow \begin{aligned} H_A &= 45 \text{ kN}, \\ R_B &= 18,5 \text{ kN m}, \\ R_A &= 31,5 \text{ kN m}. \end{aligned} \end{aligned}$$

$$(\text{verif.}) \quad \curvearrowright_B \left\{ -80 + 31,5 \times 5 + 40 - 50 \times 1 - 45 \times 1,5 = 0. \right.$$

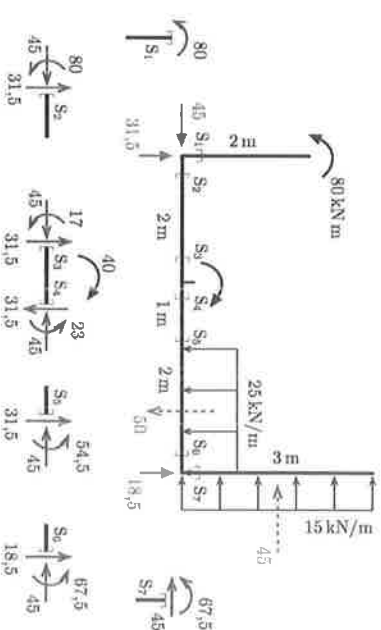


Fig. E7-1: Esforços nas seções.

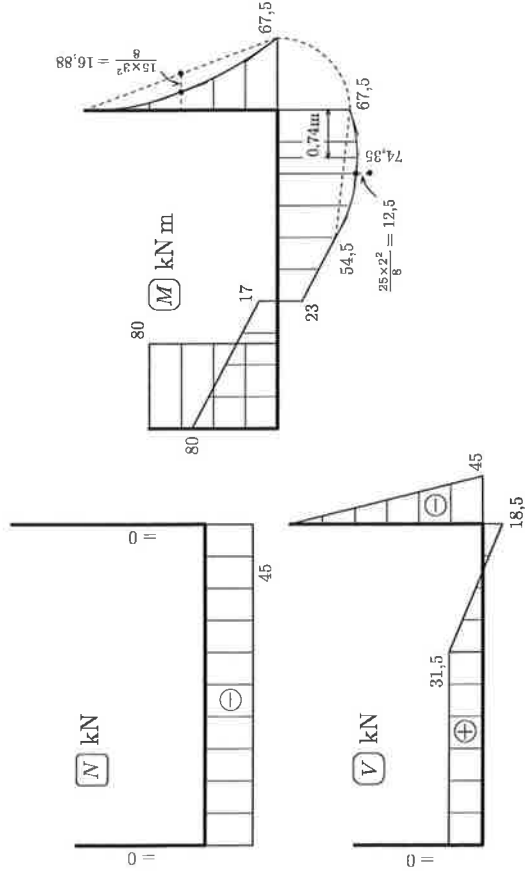
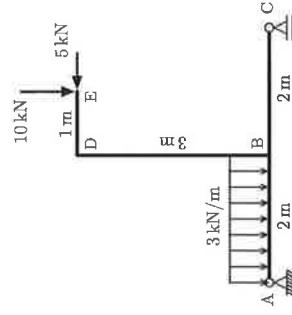


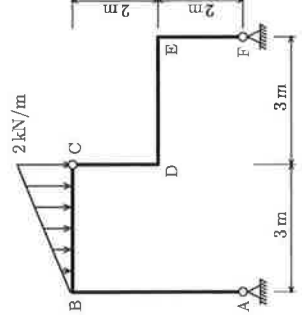
Fig. E 7-2: Diagramas de estado.



Problema 3 Trace os diagramas de estado para a viga poligonal ao lado.

1.6 Pórticos e Quadros Tri-Articulados

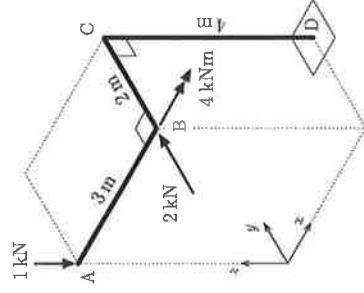
Problema 4 Trace os diagramas de estado para o pórtico tri-articulado da figura. Utilize a condição de momento fletor nulo na articulação C, juntamente com as equações de equilíbrio para determinar as quatro reações de apoio.



1.7 Vigas Poligonais Tridimensionais

Nas estruturas reticuladas tridimensionais, é conveniente adotarmos a representação vetorial para os momentos na seção transversal. Desse modo, usaremos frequentemente a regra da mão direita para traçar os diagramas de momentos fletores.

O traçado dos diagramas de força cortante e momento fletor requer atenção especial por causa da representação simultânea de duas componentes. Adicionalmente, a convenção de sinal da força cortante depende do observador e a força pode trocar de sinal com a simples mudança de direção do eixo da barra.



Exemplo 8 Trace os diagramas de estado para a viga poligonal ao lado.

SOLUÇÃO

Reações de apoio As equações de equilíbrio permitem obter as reações no engaste.

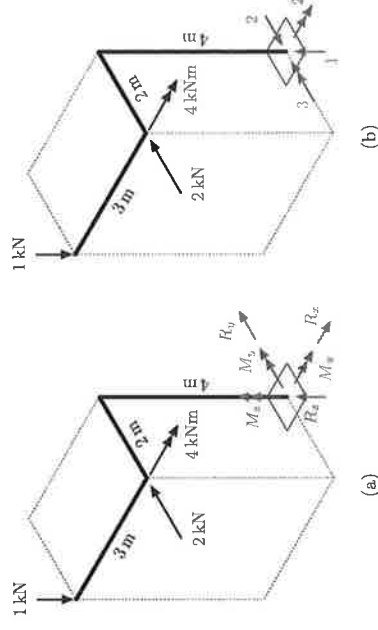


Fig. 4: Reações de apoio: (a) incógnitas, (b) valores obtidos.

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 \quad \{ R_x = 0 & \Rightarrow R_x = 0 \\
 \sum F_y = 0 \quad \{ R_y + 2 = 0 & \Rightarrow R_y = -2 \text{ kN} \\
 \sum F_z = 0 \quad \{ -1 + R_z = 0 & \Rightarrow R_z = 1 \text{ kN} \\
 \sum M_{Dx} = 0 \quad \{ 1 \times 2 - 2 \times 4 + 4 + M_x = 0 & \Rightarrow M_x = 2 \text{ kN m} \\
 \sum M_{Dy} = 0 \quad \{ -1 \times 3 + M_y = 0 & \Rightarrow M_y = 3 \text{ kN m} \\
 \sum M_{Dz} = 0 \quad \{ M_z = 0 & \Rightarrow M_z = 0
 \end{aligned}$$

Esforços solicitantes A Fig. 5 ilustra o emprego do teorema do corte para calcular os esforços solicitantes. As orientações das seções transversais nas extremidades dos trechos determinam o sentido de caminhamento ao longo da viga poligonal. No caso, as seções foram percorridas na ordem A, B₁, B₂, C₁, C₂ e D.

- Os esforços solicitantes estão indicados na frente das seções de acordo com o caminhamento escolhido.
- A idéia de perspectiva é reforçada pela representação dos esforços na seção.
- A regra da mão direita define os sentidos dos vetores momentos nas seções e determina o lado tracionado pelos momentos fletores.
- Esforços em uma seção são transmitidos para a seção seguinte juntamente com esforços aplicados nos trechos de barra e nós da estrutura delimitados pelas seções.
- Os esforços solicitantes nas seções junto aos apoios devem estar em equilíbrio com as reações nesses apoios.

Diagramas de Estado No traçado dos diagramas de esforços solicitantes algumas convenções devem ser seguidas, Fig. 6.

- Os sinais devem ser indicados nos diagramas de N, V e M_T, mas devem ser omitidos no diagrama de M.
- A força cortante é positiva quando ela tende a girar a seção no sentido horário. Se as orientações que definem o ponto de vista¹ não estiverem indicadas, considera-se o ponto de vista da perspectiva.
- Os diagramas das componentes de V e de M são sempre traçados nos planos em que as componentes atuam.
- Os diagramas de momento fletor são sempre desenhados no lado tracionado das barras.

¹ Ver indicações do ponto de vista no Exemplo 9.

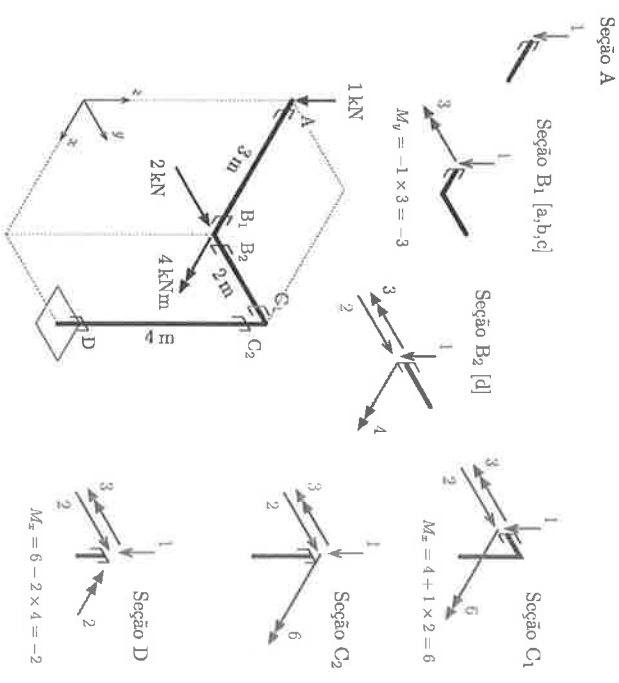


Fig. 5: Cálculo dos esforços solicitantes nas seções de extremidade.

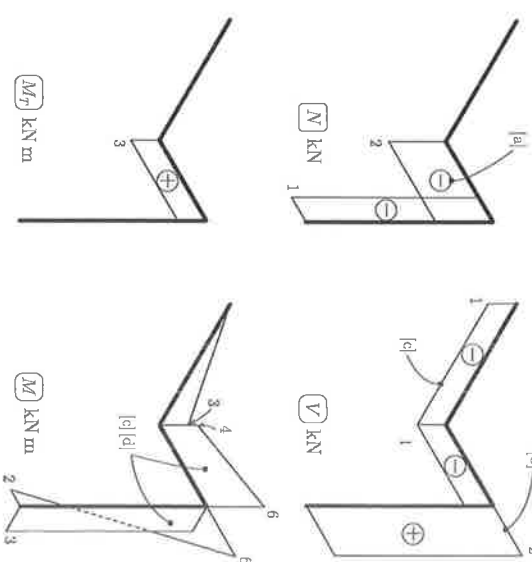
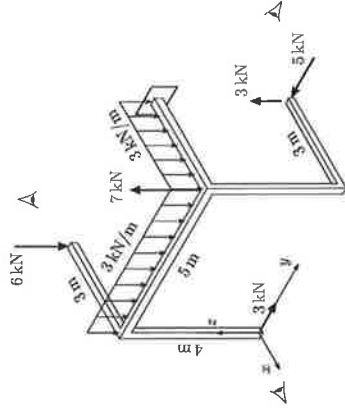


Fig. 6: Diagramas de Estado.

Exemplo 9 Trace os diagramas de estado para a viga poligonal ao lado.



SOLUÇÃO
Reações de apoio

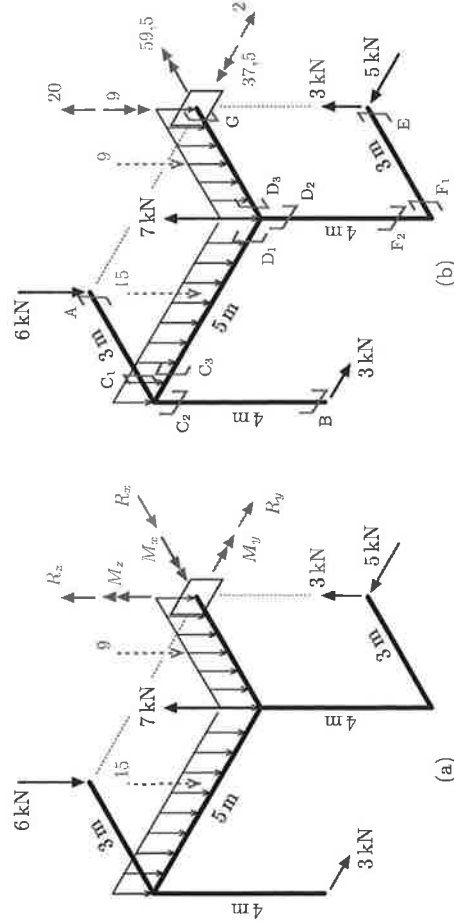


Fig. 7: Reações de apoio: (a) incógnitas, (b) valores.

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0 \quad \{ R_x = 0 \\
 \sum F_y &= 0 \quad \{ 3 - 5 + R_y = 0 \\
 \sum F_z &= 0 \quad \{ -6 - 15 + 7 - 9 + 3 + R_z = 0 \\
 \sum M_{Ax} &= 0 \quad \{ 6 \times 5 + 15 \times 2,5 + 3 \times 4 - 5 \times 4 + M_x = 0 \\
 \sum M_{Ay} &= 0 \quad \{ 15 \times 3 - 7 \times 3 + 9 \times 1,5 + M_y = 0 \\
 \sum M_{Az} &= 0 \quad \{ 3 \times 3 + M_z = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow R_x &= 0 \\
 \Rightarrow R_y &= 2 \text{ kN} \\
 \Rightarrow R_z &= 20 \text{ kN} \\
 \Rightarrow M_x &= -59,5 \text{ kNm} \\
 \Rightarrow M_y &= -37,5 \text{ kNm} \\
 \Rightarrow M_z &= -9,0 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

Esforços solicitantes A Fig. 8 apresenta o cálculo dos esforços solicitantes, obtidos a partir das extremidades livres da estrutura. As seções foram percorridas na ordem A, C₁; B, C₂; C₃; D₁; E, F₁, F₂; D₃ e G.

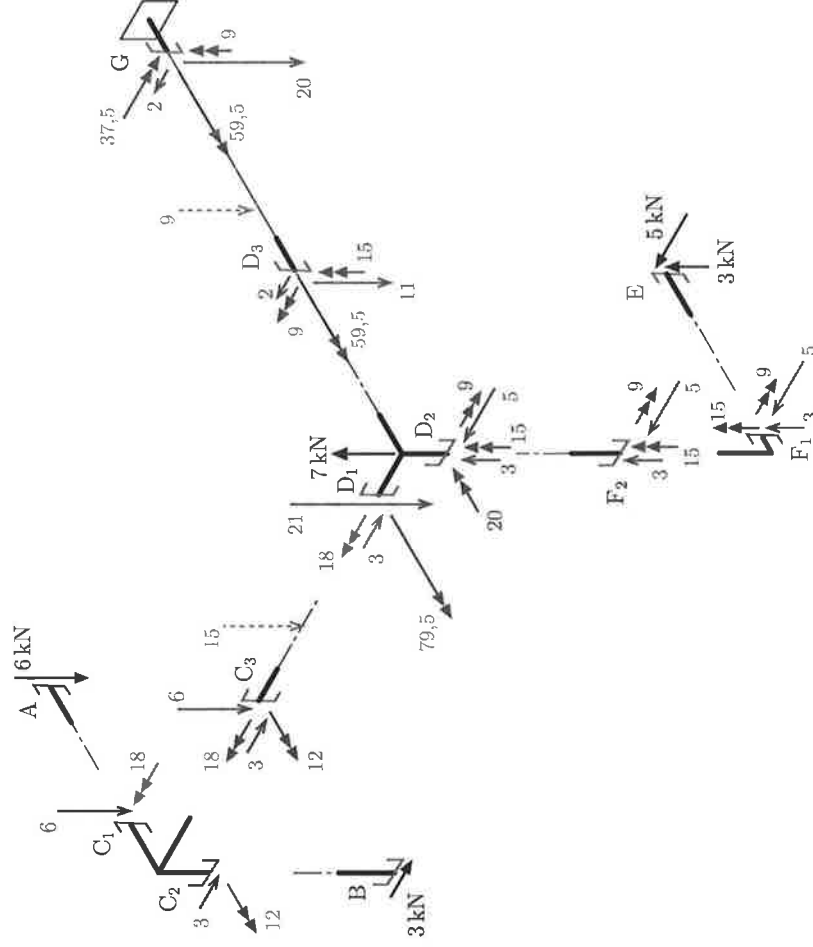


Fig. 8: Cálculo dos esforços solicitantes nas seções de extremidade.

Diagramas de estado Os diagramas são construídos a partir dos valores nas seções extremas dos trechos. As componentes das forças cortantes e dos momentos fletores são sempre traçados nos planos em que elas atuam. Uma força cortante positiva tende a girar a seção no sentido horário de acordo com um ponto de vista estabelecido. Quando omitido, o ponto de vista da perspectiva deve ser adotado (neste problema, o ponto de vista indicado pelos 'olhos' coincide com o da perspectiva).

Repare na Fig. 9 que as hachuras nos diagramas são usadas para indicar a direção em que são medidos os valores dos esforços solicitantes. Elas ajudam na visualização contribuindo para o efeito tridimensional.

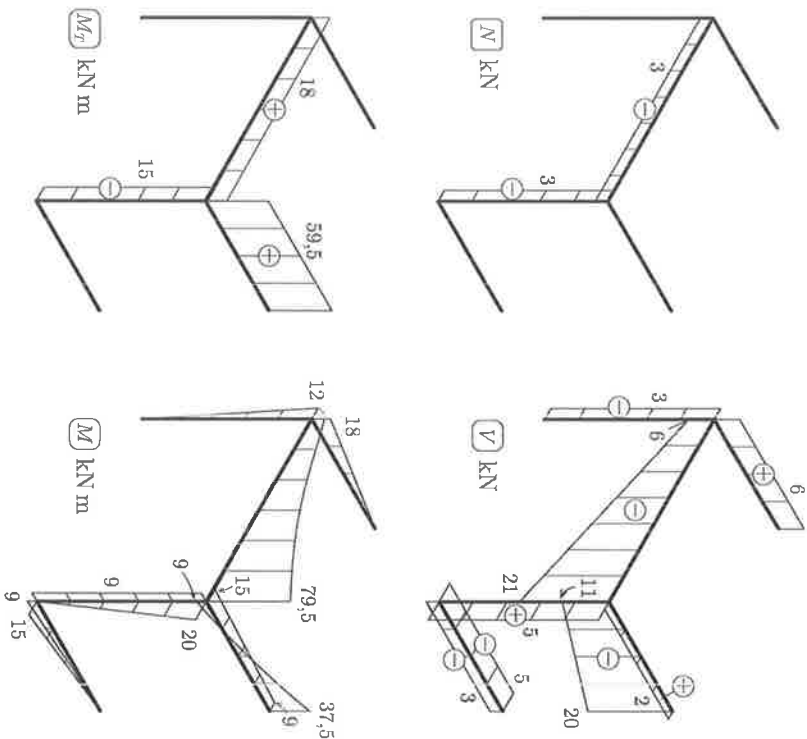


Fig. 9: Diagramas de Estado.

Exemplo 10 Trace os diagramas de esforços solicitantes na barra EF da estrutura ao lado e determine o valor da máxima força normal no trecho curvo CD.

SOLUÇÃO

Diagramas na barra EF

A resolução é imediata se obtivermos os esforços solicitantes na seção E e depois calcularmos os esforços na seção F do engastamento, conforme mostra a Fig. 10.

Seção E: (convenção da Resistência dos Materiais)

$$\begin{aligned} N &= 0 & T &= +4 \times 100 - 8 \times 100 = 400 \text{ N mm} \\ V_x &= 4 \text{ N} & M_x &= 0 \\ V_z &= +8 + 5 = 13 \text{ N} & M_z &= +4 \times 100 = 400 \text{ N mm (traciona lado direito)} \end{aligned}$$

Uma vez obtidos os esforços nas seções, traçamos os diagramas para o trecho EF.

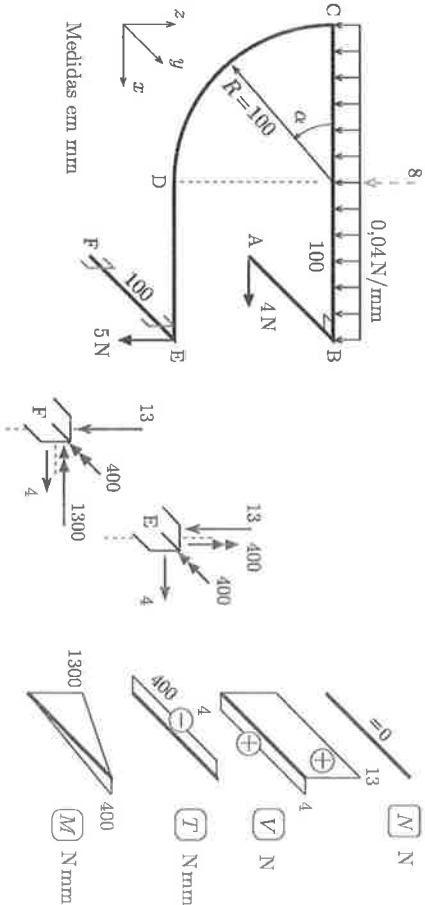
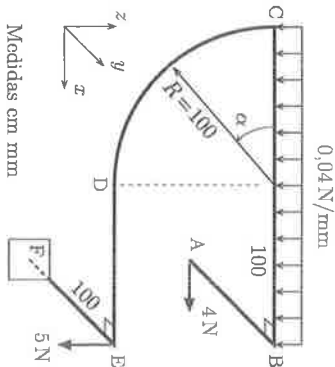


Fig. 10: Esforços solicitantes no trecho EF.



Força normal em CD

A expressão da força normal é obtida a partir dos esforços solicitantes na seção C. De acordo com a Fig. 11, o arco e todos esforços nele aplicados estão contidos no plano xz . Logo,

$$\begin{aligned} N(\alpha) &= -8 \cos \alpha - 4 \sin \alpha \\ \frac{dN}{d\alpha} &= 8 \sin \alpha - 4 \cos \alpha \\ \tan \alpha &= \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26,57^\circ \\ N_{\max} &= 8,84 \text{ N.} \end{aligned}$$

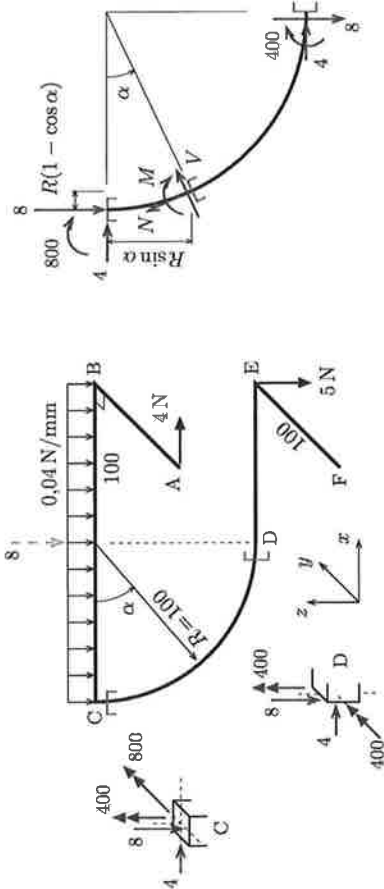


Fig. 11: Esforços solicitantes no trecho CD.

Apenas por curiosidade apresentamos os diagramas completos na Fig. 12.

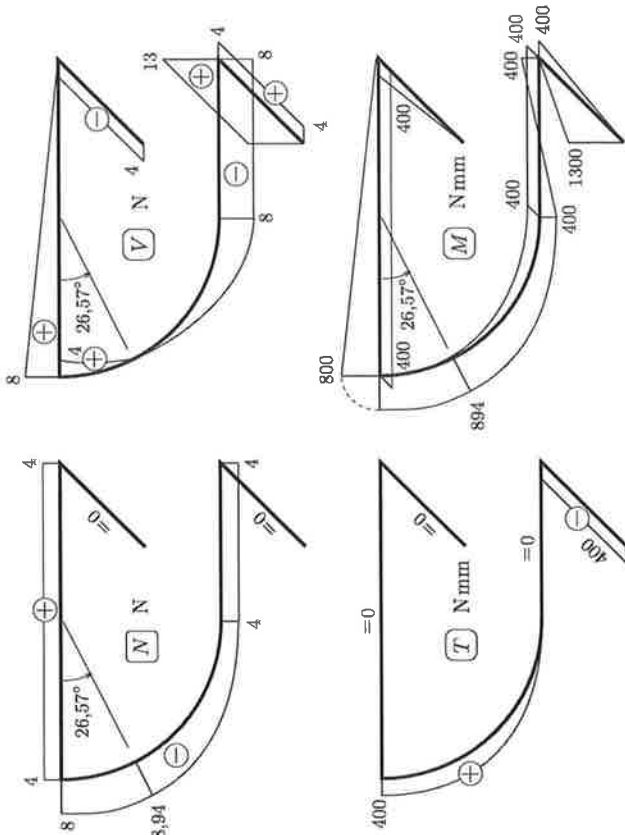


Fig. 12: Diagramas de esforços solicitantes.

