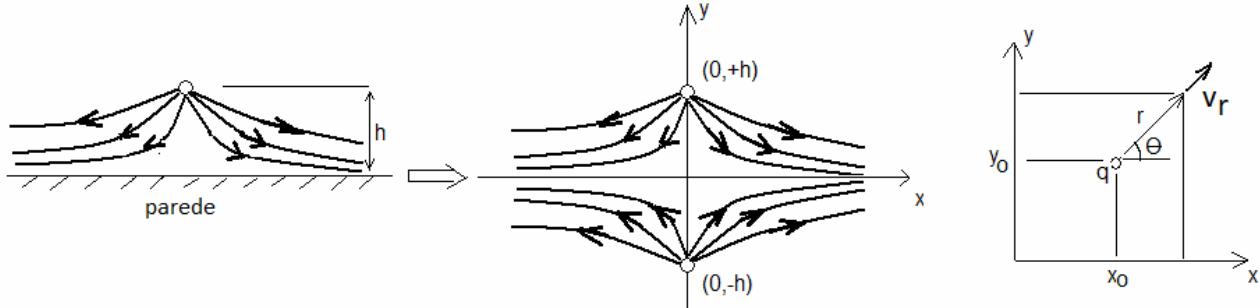


3ª Prova de Mecânica dos Fluidos II – PME 3330 29/06/2017

1ª Questão (3,0 pontos): Uma corrente de fluido incide sobre uma parede. Esse escoamento pode ser representado através de uma fonte de intensidade q colocada a uma distância h da parede. Para representar a existência da parede, o escoamento acaba sendo representado por duas fontes de igual intensidade, uma na posição $x=0, y=+h$ e a outra na posição $x=0, y=-h$, de modo que ambas as fontes se anulam onde devemos ter a parede. Pedem-se:



a) Uma fonte ou sumidouro de intensidade q localizada em x_0, y_0 provoca num ponto qualquer de coordenadas x, y uma velocidade radial dada por:

$$v_r = \frac{q}{2\pi r}$$

Verifique que as componentes x e y dessa velocidade são dadas por:

$$v_x = \frac{q(x - x_0)}{2\pi[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]} \quad v_y = \frac{q(y - y_0)}{2\pi[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]} \quad (1,0 \text{ ponto})$$

b) Obtenha as expressões das velocidades v_x e v_y para $y=0$ (ao longo da parede) em função de q, h e x . (1,0 ponto)

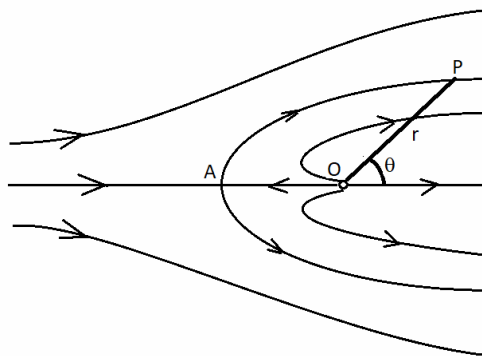
c) Para $x \geq 0$, verifique qual a região ao longo da parede para a qual temos gradiente adverso de pressão ($\partial p / \partial x > 0$). (1,0 ponto)

Dado: Equação de Bernoulli $\rho \frac{V^2}{2} + p = \text{constante}$

2ª Questão (4,0 pontos): Uma descarga de água contaminada num rio é representada por uma fonte de intensidade q no ponto O combinada com uma corrente de velocidade uniforme U , formando a região contaminada delimitada pela linha de corrente que passa pelo ponto de estagnação A . Seja P um ponto qualquer sobre essa linha de corrente. Se chamarmos de Δ à distância entre A e O , pedem-se:

a) Calcule Δ em função de q e U . (2,0 ponto)

b) Mostre que as coordenadas r e θ do ponto P são dadas por $r = \frac{q}{2\pi U} \frac{\pi - \theta}{\sin \theta}$ (2,0 pontos)

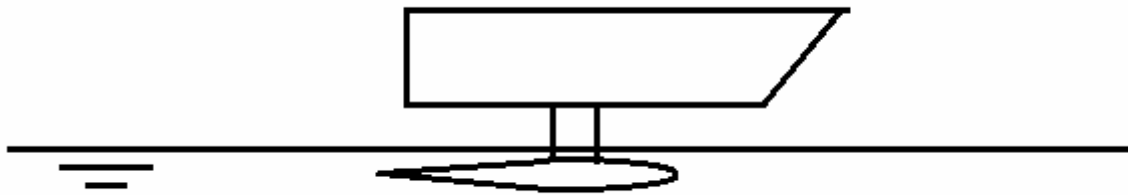


$$\text{Dados: } \psi_{\text{corrente}} = U r \sin \theta \quad ; \quad \psi_{\text{fonte}} = \frac{q\theta}{2\pi} \quad ; \quad v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \quad ; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

3ª Questão (3,0 pontos): Um barco com peso mg é suportado por um hidrofólio simétrico (sem arqueamento) de razão de aspecto RA e área planiforme A_p . O coeficiente de arrasto para razão de aspecto infinita do perfil do hidrofólio é $C_{D\infty}$. Por meio de um sistema de controle, o ângulo de ataque α é ajustado para as diferentes condições de operação. Suponha que o barco navega em cruzeiro na condição ideal para a qual $C_D=2C_{D\infty}$, através de água de massa específica ρ .

a) Supondo que as forças de arrasto e sustentação se devem só ao hidrofólio, obtenha expressões para a velocidade de cruzeiro U_{cr} , ângulo de ataque de cruzeiro α_{cr} (em radianos) e potência consumida W_{cr} em função de $m, g, RA, A_p, C_{D\infty}$ e ρ . (2,0 pontos)

b) Suponha agora que o motor é capaz de fornecer uma potência W_{max} . Obtenha uma expressão que permita o cálculo da velocidade U_{max} nessa condição, envolvendo $W_{max}, m, g, RA, A_p, C_{D\infty}$ e ρ . Obs.: note que agora não teremos mais a condição ideal $C_D=2C_{D\infty}$. (1,0 ponto)



Dados:

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 C_D A_p \quad ; D \text{ é a força de arrasto (Drag)}$$

$$L = \frac{1}{2} \rho U^2 C_L A_p \quad ; L \text{ é a força de sustentação (Lift)}$$

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA} \quad (C_D \text{ é o coeficiente de arrasto})$$

$$C_L = \frac{2\pi(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}} \quad \text{onde } \beta = \arctg \frac{2h}{c} \quad , \quad h \text{ é o arqueamento (cambagem) máximo e } c \text{ é a corda.}$$

Nesta última expressão, α e β estão em radianos. C_L é o coeficiente de sustentação.

$$RA = \frac{b}{\bar{c}} = \frac{b^2}{A_p} \quad \text{onde } b \text{ é a envergadura, } A_p \text{ é a área planiforme e } \bar{c} \text{ é a corda média.}$$

GABARITO

1ª Questão:

a) Lembrando que $r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$:

$$v_x = v_r \cos \theta = \frac{q}{2\pi r} \frac{x - x_o}{r} = \frac{q(x - x_o)}{2\pi r^2} \quad \text{logo} \quad \boxed{v_x = \frac{q(x - x_o)}{2\pi[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]}}$$

$$v_y = v_r \sin \theta = \frac{q}{2\pi r} \frac{y - y_o}{r} = \frac{q(y - y_o)}{2\pi r^2} \quad \text{logo} \quad \boxed{v_y = \frac{q(y - y_o)}{2\pi[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]}}$$

b) A superposição das duas fontes, uma em (0, +h) e a outra em (0, -h), resulta para v_x :

$$v_x = \frac{q(x - 0)}{2\pi[(x - 0)^2 + (y - (+h))^2]} + \frac{q(x - 0)}{2\pi[(x - 0)^2 + (y - (-h))^2]}$$

$$v_x = \frac{q x}{2\pi[x^2 + (y - h)^2]} + \frac{q x}{2\pi[x^2 + (y + h)^2]}$$

A superposição resulta para v_y :

$$v_y = \frac{q(y - (+h))}{2\pi[(x - 0)^2 + (y - (+h))^2]} + \frac{q(y - (-h))}{2\pi[(x - 0)^2 + (y - (-h))^2]}$$

$$v_y = \frac{q(y - h)}{2\pi[x^2 + (y - h)^2]} + \frac{q(y + h)}{2\pi[x^2 + (y + h)^2]}$$

Para $y = 0$, onde temos a parede:

$$\boxed{v_x = \frac{q x}{\pi[x^2 + h^2]} \quad ; \quad v_y = 0}$$

Assim, verificamos que a superposição das duas fontes representa realmente a presença da parede, pois tem o efeito de produzir uma velocidade normal nula na região onde esta está presente.

c) De Bernoulli, na parede:

$$p = \text{constante} - \rho \frac{v_x^2}{2}$$

Isso resulta:

$$p = \text{constante} - \frac{\rho}{2} \frac{q^2 x^2}{\pi^2 (x^2 + h^2)^2}$$

Derivando:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho q^2}{2\pi^2} \left[\frac{2x}{(x^2 + h^2)^2} - 2 \frac{x^2}{(x^2 + h^2)^3} \cdot 2x \right]$$

Isso resulta:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho q^2}{2\pi^2} \left[\frac{2x}{(x^2 + h^2)^2} - \frac{4x^3}{(x^2 + h^2)^3} \right]$$

Ou:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho q^2}{\pi^2} \left[\frac{-x(x^2 + h^2) + 2x^3}{(x^2 + h^2)^3} \right]$$

Resultando finalmente:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho q^2}{\pi^2} \left[\frac{x^3 - xh^2}{(x^2 + h^2)^3} \right]$$

Assim, para $x \geq 0$, $\frac{\partial p}{\partial x} \geq 0$ se $x^2 - h^2 \geq 0$, ou seja, $\boxed{x \geq h}$

2ª Questão:

a) A função de corrente resultante da superposição de corrente uniforme com fonte é:

$$\psi = U r \sin \theta + \frac{q \theta}{2\pi}$$

As velocidades resultam:

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = U \cos \theta + \frac{q}{2\pi r} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = U \sin \theta$$

No ponto de estagnação temos $r = \Delta$, $\theta = \pi$ e ambas as componentes da velocidade tem que ser nulas. Como $\sin \pi = 0$, a velocidade v_θ é nula. Da velocidade v_r :

$$U \underbrace{\cos \pi}_{-1} + \frac{q}{2\pi \Delta} = 0$$

Isso resulta:

$$\Delta = \frac{q}{2\pi U}$$

b) Da expressão da função de corrente, como no ponto de estagnação temos $r = \Delta$, $\theta = \pi$ resulta para a linha de corrente que passa por esse ponto:

$$\psi = U \Delta \underbrace{\sin \pi}_0 + \frac{q \pi}{2\pi}$$

Assim:

$$\psi = \frac{q}{2} \text{ é a linha de corrente passando pelo ponto de estagnação.}$$

Porém, para um ponto P qualquer sobre essa linha de corrente:

$$\frac{q}{2} = U r \sin \theta + \frac{q \theta}{2\pi}$$

Que resulta:

$$U r \sin \theta = \frac{q}{2} \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right)$$

E isso vai resultar:

$$r = \frac{q}{2\pi U} \frac{\pi - \theta}{\sin \theta}$$

3ª Questão:

a) Em cruzeiro, temos $C_D = 2C_{D\infty}$. Da expressão do coeficiente de arrasto:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA} = 2C_{D\infty} \quad \text{logo} \quad C_L = \sqrt{\pi RA C_{D\infty}} \quad \text{na condição de cruzeiro.}$$

Lembrando que se não há arqueamento ($\beta = 0$) vamos ter, da expressão do coeficiente de sustentação:

$$C_L = \frac{2\pi \alpha_{cr}}{1 + \frac{2}{RA}} = \sqrt{\pi RA C_{D\infty}}$$

Dessa expressão obtemos o ângulo de ataque em cruzeiro:

$$\alpha_{cr} = \frac{1}{2} \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot (RA + 2) \cdot RA^{-\frac{1}{2}} \cdot C_{D\infty}^{\frac{1}{2}}$$

Lembrando que a força de sustentação tem que equilibrar o peso:

$$mg = \frac{1}{2} \rho U^2 C_L A_p$$

Na condição de cruzeiro, onde $C_L = \sqrt{\pi RA C_{D\infty}}$:

$$mg = \frac{1}{2} \rho U_{cr}^2 (\pi RA C_{D\infty})^{\frac{1}{2}} A_p$$

Dessa expressão obtemos a velocidade de cruzeiro:

$$U_{cr} = \left(\frac{2mg}{\rho A_p} \right)^{\frac{1}{2}} (\pi RA C_{D\infty})^{-\frac{1}{4}}$$

A potência consumida é dada pelo produto de arrasto e velocidade:

$$W = DU$$

Ou seja:

$$W = \frac{1}{2} \rho U^3 C_D A_p$$

Mas em cruzeiro temos $C_D = 2C_{D\infty}$. Assim:

$$W_{cr} = \rho U_{cr}^3 C_{D\infty} A_p$$

Substituindo agora a expressão da velocidade de cruzeiro:

$$W_{cr} = \rho \cdot \left(\frac{2mg}{\rho A_p} \right)^{\frac{3}{2}} (\pi R A C_{D\infty})^{-\frac{3}{4}} \cdot C_{D\infty} A_p$$

Resulta:

$$W_{cr} = (2mg)^{\frac{3}{2}} (\rho A_p)^{-\frac{1}{2}} (\pi R A)^{-\frac{3}{4}} C_{D\infty}^{\frac{1}{4}} A_p$$

b) A potência máxima será:

$$W_{\max} = \frac{1}{2} \rho U_{\max}^3 C_D A_p$$

Substituindo o coeficiente de arrasto na expressão acima:

$$W_{\max} = \frac{1}{2} \rho U_{\max}^3 \left(C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi R A} \right) A_p$$

Por outro lado, a sustentação tem que contrabalançar o peso:

$$C_L = \frac{2mg}{\rho U_{\max}^2 A_p}$$

Substituindo esta última expressão na anterior:

$$W_{\max} = \frac{1}{2} \rho U_{\max}^3 \left(C_{D\infty} + \frac{4m^2 g^2}{\rho^2 \pi R A A_p^2 U_{\max}^4} \right) A_p$$

Assim:

$$W_{\max} = \frac{1}{2} \rho C_{D\infty} A_p U_{\max}^3 + \frac{2m^2 g^2}{\rho \pi R A A_p} \frac{1}{U_{\max}}$$