Eletromagnetismo II

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 1° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 9

Solução da Equação de Onda para os Potenciais $\vec{A}$ e ϕ

Na aula passada vimos que quando os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são expressos em termos dos potenciais escalar, ϕ, e vetor $\vec{A}$, isto é,

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

estes satisfazem as seguintes equações.

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \qquad \nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} + \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

Mostramos que os potenciais podem ser transformados, utilizando as transformações de calibre

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda; \quad \phi' = \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \qquad \lambda(\vec{r}, t): \text{ função escalar}$$

que preservam os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Finalmente vimos que uma escolha útil é o chamado calibre de Lorentz,

$$\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

que transforma as equações para ϕ e $\vec{A}$ em equações de onda do mesmo tipo, com fontes, isto é,

$$\boxed{\nabla^2\phi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}}$$

Equação de Onda para Fontes Variáveis do Tempo: Equação de Helmholtz

De fato, a equação para $\vec{A}$ se divide em três equações para suas componentes, que em coordenadas cartesianas são

$$\nabla^2 A_i - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = -\mu_0 j_i; \qquad \imath = x, y, z$$

ou seja, o mesmo tipo de equação para ϕ

$$\nabla\phi^2 - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Portanto, basta encontrar a solução para uma delas e substituir o termo de fonte apropriado (ρ ou j_i) para as soluções das outras. Vamos fazer isso para a equação para ϕ, como exemplo.

No caso geral, as fontes dependem do tempo, isto é, $\rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{j}(\vec{r}, t)$. O primeiro passo da solução é representá-las, e também e também os potenciais, através da transformada temporal de Fourier,

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$j_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} j_{i\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$A_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_{i\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

onde $\rho_\omega(\vec{r})$, $j_{i\omega}$, $\phi_\omega(\vec{r})$ e $A_{i\omega}(\vec{r})$ são as componentes de Fourier de $\rho(\vec{r}, t)$, $j_i(\vec{r}, t)$, $\phi(\vec{r}, t)$ e $A_i(\vec{r}, t)$, respectivamente. Agora vamos prosseguir considerando somente a equação de onda para ϕ. Aplicando os operadores ∇^2 e $\partial^2/\partial t^2$ a $\phi(\vec{r}, t)$, temos

$$\nabla^2\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2\phi_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega$$

e

$$\frac{\partial^2\phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-\omega^2)\phi_\omega(\vec{r})e^{-i\omega t}d\omega$$

Substituindo estas expressões e a para $\rho(\vec{r},t)$ na equação de onda, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\nabla^2\phi_\omega + \mu_0\epsilon_0\omega^2\phi_\omega + \frac{\rho}{\epsilon_0}\right]e^{-i\omega t}d\omega = 0$$

Como a integral tem que ser nula para qualquer valor arbitrário de t, o integrando tem que se anular. Portanto a equação de onda para as componentes de Fourier fica

$$\boxed{\nabla^2\phi_\omega + k^2\phi_\omega = -\frac{\rho_\omega}{\epsilon_0}}$$

onde

$$\boxed{k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{\omega}{c}}$$

Esta equação é denominada Equação de Helmholtz, cuja solução veremos a seguir.

Solução da Equação de Helmholtz pelo Método da Função de Green

Numa forma geral, a equação de Helmholtz pode ser escrita como

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = -g$$

onde $\phi(\vec{r})$ é uma função escalar e $g(\vec{r})$ é outra função que representa a fonte. Suponhamos que conheçamos uma outra função escalar, $G(\vec{r},\vec{r}')$, que satisfaça a seguinte equação diferencial

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}') + k^2 G(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}'),$$

onde

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

Como a função $\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \delta(\vec{r}'-\vec{r})$, a função $G(\vec{r},\vec{r}')$ também deve ser uma função simétrica. Esta função é denominada Função de Green.

Vamos multiplicar a equação para $\phi(\vec{r})$ por $G(\vec{r},\vec{r}')$ e para $G(\vec{r},\vec{r}')$ por $\phi(\vec{r})$ e subtrair uma da outra; obtemos então

$$G(\vec{r},\vec{r}')\nabla^2\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r})\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}') = \phi(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}') - G(\vec{r},\vec{r}')g(\vec{r})$$

Integrando ambos os lados dessa equação num volume V, temos

$$\int_V \left[G(\vec{r},\vec{r}')\nabla^2\phi - \phi(\vec{r})\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}')\right] d\tau = \int \phi(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}')d\tau - \int G(\vec{r},\vec{r}')g(\vec{r})d\tau$$

A integral do lado esquerdo dessa equação pode ser transformada numa integral de superfície usando a Segunda Identidade de Green, que já vimos,

$$\int_V \left(\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi\right) d\tau = \int_S \left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS$$

Tomando $\psi \to G(\vec{r},\vec{r}')$, obtemos

$$\int_V \left[G(\vec{r},\vec{r}')\nabla^2\phi(\vec{r}) - \phi\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}')\right] d\tau = \int_S \left[G\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial G}{\partial n}\right] dS$$

Como queremos a solução da equação de Helmholtz em todo o espaço, tomamos $S \to \infty$. Por outro lado, lembrando que ϕ é um potencial, podemos escolher $\phi = 0$ ou $G = 0$ em $S \to \infty$. Portanto, o lado esquerdo da equação acima se anula. Por outro lado,

$$\int \phi(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}')d\tau = \phi(\vec{r}')$$

e temos

$$\phi(\vec{r}') = \int_V G(\vec{r},\vec{r}')g(\vec{r})d\tau$$

Em geral se utiliza $\vec{r}'$ para a variável muda de integração. Como $G(\vec{r},\vec{r}')$ é uma função simétrica, podemos trocar a notação acima escrevendo

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r},\vec{r}')g(\vec{r}')d\tau'}$$

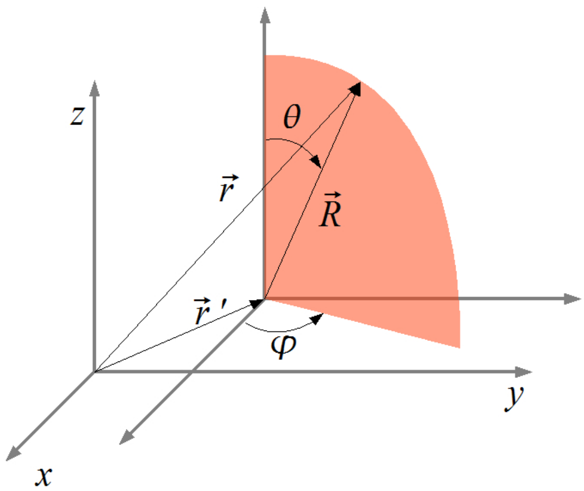
Este é um resultado extremamente importante. Para calcular $\phi(\vec{r})$, não é necessário resolver a equação original; basta resolver a equação para a função de Green e fazer a integral. Este método é, na realidade, óbvio do ponto de vista físico. Consideremos, por exemplo, que $\phi(\vec{r})$ seja o potencial escalar e $g(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$. A expressão para $\phi(\vec{r})$ acima significa que primeiro calculamos o potencial $G(\vec{r},\vec{r}')$ para uma carga unitária (na realidade uma densidade de carga unitária) localizada em $\vec{r}'$ e depois somamos o efeito (integral) devido a todas as cargas localizadas em diferentes posições $\vec{r}'$.

Solução da Equação Diferencial para a Função de Green

Vamos agora resolver a equação para $G(\vec{r},\vec{r}')$, ou seja,

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r},) + k^2 G(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

sujeita à condição de contorno $G(\vec{r},\vec{r}') \to 0$ quando $|\vec{r}-\vec{r}'| \to \infty$. Como $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ é uma função simétrica e a condição de contorno está no infinito, a função de Green só deve depender do módulo de $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}'$, ou seja, deve ser esfericamente simétrica num sistema de coordenadas centrado em $\vec{r}'$ (ou em $\vec{r}$, tanto faz). Portanto, vamos resolver a equação no sistema de coordenadas esférico (R,θ,φ) mostrado na figura. Neste sistema, $G(\vec{R})$ não depende das coordenadas θ e φ e, portanto,



$$\nabla^2 G = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial G}{\partial R}\right) = \frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG)$$

Exercício: Mostrar essa igualdade.

Portanto, a equação para $G(\vec{R})$ fica

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG)+k^2G=-\delta(\vec{R})$$

Inicialmente vamos considerar pontos fora da origem; neste caso a equação fica

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG)+k^2G=0 \qquad\qquad \therefore\ \frac{d^2}{dR^2}(RG)=-k^2(RG)$$

$$\therefore\ RG=Ae^{\pm ikR} \qquad\qquad G(\vec{R})=\frac{A}{R}e^{\pm ikR},$$

onde A é uma constante. Para determinar a constante A, temos que considerar a contribuição do termo de fonte na origem, onde $G(R)$ parece divergir. Na realidade, a divergência está associada com a função $\delta(\vec{R})$, como veremos a seguir. Para isto, vamos substituir a expressão encontrada para G na equação original, mas calculando com cuidado $\nabla^2 G$ para incluir apropriadamente a origem em $R=0$. Temos que

$$\begin{aligned}
\nabla^2 G &= \nabla\cdot\nabla\left(\frac{A}{R}e^{\pm ikR}\right)=A\nabla\cdot\left[\frac{1}{R}\nabla e^{\pm ikR}+e^{\pm ikR}\nabla\frac{1}{R}\right]\\
&= \frac{A}{R}\nabla^2 e^{\pm ikR}+2A\left(\nabla e^{\pm ikR}\right)\cdot\left(\nabla\frac{1}{R}\right)+Ae^{\pm ikR}\nabla^2\frac{1}{R}\\
&= \cancel{2(\pm ik)\frac{A}{R^2}e^{\pm ikR}}-\frac{Ak^2}{R}e^{\pm ikR}-\cancel{2(\pm ik)\frac{A}{R^2}e^{\pm ikR}}+Ae^{\pm ikR}\nabla^2\frac{1}{R}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \nabla^2 G=Ae^{\pm ikR}\nabla^2\frac{1}{R}-k^2\frac{A}{R}e^{\pm ikR}$$

Substituindo este resultado na equação de Helmholtz original, obtemos

$$Ae^{\pm ikR}\nabla^2\frac{1}{R}\underbrace{-k^2\frac{\cancel{A}}{\cancel{R}}e^{\pm ikR}+k^2\frac{\cancel{A}}{\cancel{R}}e^{\pm ikR}}_{\text{solução para } R\neq 0!}=-\delta(\vec{R})$$

$$\therefore\ Ae^{\pm ikR}\left[-4\pi\delta(\vec{R})\right]=-\delta(\vec{R})$$

Como $\delta(\vec{R})\neq 0$ somente para $R=0$ $(e^{\pm ikR}=1)$, temos $A=1/4\pi$.

Concluindo, a função de Green para a equação de Helmholtz e para a condição de contorno $G \to 0$; $R \to \infty$, é dada por

$$\boxed{G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

e a solução da equação de Helmholtz fica

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{g(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau'}$$

É interessante notar que a equação de Poisson é um caso particular da equação de Helmholtz com $k = 0$ e $g(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$; então da solução geral acima obtemos

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau'$$

que é exatamente a expressão para o potencial escalar eletrostático. Para o potencial não eletrostático, temos então que $(g(\vec{r}) = \rho_\omega/\epsilon_0)$

$$\phi_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_\omega(\vec{r}\,')e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau'$$

A expressão para $\phi(\vec{r},t)$ será então

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_\omega(\vec{r})e^{-\omega t}d\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \rho_\omega(\vec{r}\,')e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|-i\omega t}d\omega\right]$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\omega e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|-i\omega t}d\omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\omega(\vec{r}\,')e^{-i\omega t'}d\omega; \qquad t' = t \mp \frac{k}{\omega}|\vec{r}-\vec{r}\,'| \\
&= \rho(\vec{r},t'); \qquad\qquad t' = t \mp \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right)
\end{aligned}$$

Portanto, a expressão pra $\phi(\vec{r},t)$ fica

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\tau'$$

Matematicamente, tanto o sinal negativo como o positivo são válidos na expressão para t'. No entanto, pela discussão que fizemos anteriormente sabemos que o tempo

$$t' = t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

é o tempo retardado, cujo sentido físico é simples: o sinal detectado em um ponto $\vec{r}$ num instante t, produzido por uma fonte em $\vec{r}'$, depende da intensidade que a fonte tinha no instante $t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$, devido ao tempo finito de propagação do sinal (notar que este é um argumento clássico, independente da Teoria da Relatividade). Se o sinal positivo fosse escolhido (tempo avançado), o efeito seria observado antes da causa o que não tem sentido físico. Portanto, usando o tempo retardado, a solução geral da equação de onda para o potencial escalar é

$$\boxed{\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'}$$

A expressão para o potencial vetor é da mesma forma:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'}$$