Problemas resolvidos– Compósitos – Análise

1. Demonstre que um material tal que as suas propriedades satisfaçam as relações, $E_1 = E_2$ e $G_{12} = E_1/(2(1+\nu_{12}))$ é isotrópico.

Solução:

Um material isotrópico tem as suas propriedades elásticas independentes da orientação. Portanto, basta provar isto.

Note que se $E_1 = E_2$ então:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \Longrightarrow \quad \nu_{21} = \nu_{12}$$

Portanto os componentes da matriz que relaciona deformações com tensões (matriz de flexibilidade) ficam:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \qquad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \qquad S_{22} = \frac{1}{E_1} \qquad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} = \frac{2\left(1+\nu_{12}\right)}{E_1}$$

Para uma mudança de coordenadas arbitrária γ, a matriz de transformação é:

$$S_{xx} = m^4 S_{11} + n^4 S_{22} + 2m^2n^2 S_{12} + m^2n^2 S_{66}$$
$$S_{yy} = n^4 S_{11} + m^4 S_{22} + 2m^2n^2 S_{12} + m^2n^2 S_{66}$$
$$S_{xy} = m^2n^2 S_{11} + m^2n^2 S_{22} + \left(m^4 + n^4\right) S_{12} - m^2n^2 S_{66}$$
$$S_{ss} = 4m^2n^2 S_{11} + 4m^2n^2 S_{22} - 8m^2n^2 S_{12} + \left(m^2 - n^2\right)^2 S_{66}$$
$$S_{xs} = 2m^3n S_{11} - 2mn^3 S_{22} + 2\left(mn^3 - m^3n\right) S_{12} + \left(mn^3 - m^3n\right) S_{66}$$
$$S_{ys} = 2mn^3 S_{11} - 2m^3n S_{22} + 2\left(m^3n - mn^3\right) S_{12} + \left(m^3n - mn^3\right) S_{66}$$

onde $m = \cos(\gamma)$ e $n = \sin(\gamma)$.

Substituindo:

$$S_{xx} = \frac{1}{E_1}\left(m^4 + n^4 - 2m^2n^2\nu_{12} + 2m^2n^2\left(1+\nu_{12}\right)\right) = \frac{1}{E_1}\left(m^4 + n^4 + 2m^2n^2\right) = \frac{1}{E_1}\left(m^2 + n^2\right)^2 = \frac{1}{E_1}$$

$$S_{yy} = \frac{1}{E_1}\left(n^4 + m^4 - 2m^2n^2\nu_{12} + 2m^2n^2\left(1+\nu_{12}\right)\right) = \frac{1}{E_1}\left(m^4 + n^4 + 2m^2n^2\right) = \frac{1}{E_1}\left(m^2 + n^2\right)^2 = \frac{1}{E_1}$$

$$S_{xy} = \frac{1}{E_1}\left(m^2n^2 + m^2n^2 - \left(m^4 + n^4\right)\nu_{12} - 2m^2n^2\left(1+\nu_{12}\right)\right) = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\left(m^4 + n^4 + 2m^2n^2\right) = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$$

e

$$S_{ss} = \frac{1}{E_1}\left(4m^2n^2 + 4m^2n^2 - 8m^2n^2\nu_{12} + 2\left(m^2 - n^2\right)^2\left(1+\nu_{12}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{E_1}\left(8m^2n^2 - 8m^2n^2\nu_{12} + 2\left(m^4 + n^4 - 2m^2n^2\right)\left(1+\nu_{12}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{E_1}\left(2\left(m^4 + n^4 + 2m^2n^2\right) + 2\left(m^4 + n^4 + 2m^2n^2\right)\nu_{12}\right) = \frac{2\left(1+\nu_{12}\right)}{E_1}$$

e

$$S_{xs} = \frac{1}{E_1}\left(2m^3n - 2mn^3 - 2\left(mn^3 - m^3n\right)\nu_{12} + 2\left(mn^3 - m^3n\right)\left(1+\nu_{12}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{E_1}\left(2\left(m^3n - mn^3 + mn^3 - m^3n\right) - 2\left(mn^3 - m^3n + mn^3 - m^3n\right)\nu_{12}\right) = 0$$
$$S_{ys} = \left(2mn^3 - 2m^3n - 2\left(m^3n - mn^3\right)\nu_{12} + 2\left(m^3n - mn^3\right)\left(1+\nu_{12}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{E_1}\left(2\left(mn^3 - m^3n + m^3n - mn^3\right) - 2\left(m^3n - mn^3 + m^3n - mn^3\right)\nu_{12}\right) = 0$$

Portanto, todos os termos se mantém, inclusive os termos de acoplamento iguais a zero.

2. Dados os valores de resistência F_1, F_2 e F_6, determine a resistência ao cisalhamento F_s aplicado a 45º da direção da fibra segundo o critério de Tsai-Hill.

Solução:

A mudança de coordenadas das tensões para as direções principais da lâmina é:

$$\sigma_1 = 2mn\tau_s = \tau_s$$
$$\sigma_2 = -2mn\tau_s = -\tau_s$$
$$\tau_6 = \left(m^2 - n^2\right)\tau_s = 0$$

Substituindo no critério de Tsai-Hill:

$$\frac{\tau_s^2}{F_1^2} + \frac{\tau_s^2}{F_2^2} + \frac{\tau_s^2}{F_1^2} = 1$$

Na falha, $F_s = \tau_s$, portanto:

$$F_s^2\left(\frac{1}{F_1^2}+\frac{1}{F_2^2}+\frac{1}{F_1^2}\right)=F_s^2\left(\frac{2}{F_1^2}+\frac{1}{F_2^2}\right)=1$$

Portanto:

$$\frac{1}{F_s^2}=\frac{2}{F_1^2}+\frac{1}{F_2^2}$$

Como F_1 >> F_2:

$$F_s \simeq F_2$$

Ou seja, a resistência é dominada pela matriz e não pela fibra.

3. Considere uma lâmina unidirecional sob um carregamento bi-axial $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$ a um ângulo θ em relação à direção da fibra. Calcule a resistência F_0 segundo o critério de Tsai-Wu.

Solução:

As tensões transformadas no sistema principal da lâmina são:

$$\sigma_1 = \sigma_x m^2 + \sigma_y n^2 = \sigma_0$$
$$\sigma_2 = \sigma_x n^2 + \sigma_y m^2 = \sigma_0$$
$$\tau_6 = \left(\sigma_y - \sigma_x\right)mn = 0$$

Note que as tensões são independentes do ângulo θ. Na falha $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0 = F_0$. Substituindo no critério de Tsai-Wu:

$$F_0\left(f_1+f_2\right)+F_0^2\left(f_{11}+f_{22}+2f_{12}\right)=1$$

Essa equação do segundo grau pode ser resolvida para determinar F_0.

4. Determine o módulo de Young $\overline{E}_x$ de uma laminado $\left[\pm 45\right]_{ns}$ em termos dos componentes Q_{ij} na direções principais da lâmina.

Solução:

A equação é:

$$\overline{E}_x = \frac{1}{t}\left(A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}}\right)$$

onde:

$$A_{xx} = \sum_{k=1}^{4n} \left(Q_{xx}\right)_k t_k = tQ_{xx}$$

$$A_{xy} = \sum_{k=1}^{4n} \left(Q_{xy}\right)_k t_k = tQ_{xy}$$

$$A_{yy} = \sum_{k=1}^{4n} \left(Q_{yy}\right)_k t_k = tQ_{yy}$$

onde t_k é a espessura de cada camada e t é a espessura total do laminado.

Das mudanças de coordenadas:

$$\left(Q_{xx}\right)_{\theta=\pm45^o} = \left(Q_{yy}\right)_{\theta=\pm45^o} = \frac{1}{4}\left(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}\right)$$

$$\left(Q_{xy}\right)_{\theta=\pm45^o} = \frac{1}{4}\left(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} - 4Q_{66}\right)$$

Portanto:

$$A_{xx} = A_{yy} = \frac{t}{4}\left(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}\right)$$

$$A_{xy} = \frac{t}{4}\left(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} - 4Q_{66}\right)$$

Substituindo:

$$\overline{E}_x = \left(Q_{xx} - \frac{Q_{xy}^2}{Q_{yy}}\right)_{\theta=\pm45^o} = \left(Q_{xx} - \frac{Q_{xy}^2}{Q_{xx}}\right)_{\theta=\pm45^o} = \left(\frac{\left(Q_{xx} + Q_{xy}\right)\left(Q_{xx} - Q_{xy}\right)}{Q_{xx}}\right)_{\theta=\pm45^o}$$

Portanto:

$$\overline{E}_x = \frac{4\left(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12}\right)Q_{66}}{Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}}$$

5. Determine as constantes de engenharia do um laminado quase-isotrópico $\left[0/\pm45/90\right]_s$.

Solução:

Para esse laminado:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} Q_{ij}^k t_k = t_k \sum_{k=1}^{n} Q_{ij}^k = \frac{t}{n} \sum_{k=1}^{n} Q_{ij}^k$$

Os componentes Q_{xx} para cada lâmina são:

$$\left(Q_{xx}\right)_{\theta=0^o} = Q_{11}$$

$$\left(Q_{xx}\right)_{\theta=90^o} = Q_{22}$$

$$\left(Q_{xx}\right)_{\theta=45^o} = \left(Q_{xx}\right)_{\theta=-45^o} = \frac{Q_{11}+Q_{22}+2Q_{12}+4Q_{66}}{4}$$

Portanto:

$$A_{xx} = A_{yy} = \frac{t}{8}\left(3Q_{11}+3Q_{22}+2Q_{12}+4Q_{66}\right)$$

Analogamente:

$$\left(Q_{xy}\right)_{\theta=0^o} = \left(Q_{xy}\right)_{\theta=90^o} = Q_{12}$$

$$\left(Q_{xy}\right)_{\theta=45^o} = \left(Q_{xy}\right)_{\theta=-45^o} = \frac{Q_{11}+Q_{22}+2Q_{12}-4Q_{66}}{4}$$

Portanto:

$$A_{xy} = \frac{t}{8}\left(Q_{11}+Q_{22}+6Q_{12}-4Q_{66}\right)$$

Também:

$$\left(Q_{ss}\right)_{\theta=0^o} = \left(Q_{ss}\right)_{\theta=90^o} = Q_{66}$$

$$\left(Q_{xy}\right)_{\theta=45^o} = \left(Q_{xy}\right)_{\theta=-45^o} = \frac{Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}}{4}$$

Resultando:

$$A_{ss} = \frac{t}{8}\left(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}+4Q_{66}\right)$$

Substituindo:

$$\bar{E}_x = \frac{1}{A_{xx}}\left(A_{xx}+A_{xy}\right)\left(A_{xx}-A_{xy}\right) = \frac{\left(Q_{11}+Q_{22}+2Q_{12}\right)\left(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}+4Q_{66}\right)}{3Q_{11}+3Q_{22}+2Q_{12}+4Q_{66}}$$

6. Determine a resistência à tração axial F_{xt} de um laminado $\left[\pm 45\right]_{ns}$ usando o critério de Tsai-Hill para falha da primeira camada.

Solução:

As tensões médias no laminado são:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N_x}{t}$$

$$\bar{\sigma}_x = \bar{\tau}_s = 0$$

As deformações do laminado no plano são:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{E}_x}$$

$$\varepsilon_y^0 = -\bar{\nu}_{xy}\frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{E}_x}$$

$$\gamma_s^0 = 0$$

As deformações na lâmina a -45º são:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0\right)$$

$$\gamma_6 = \varepsilon_x^0 - \varepsilon_y^0$$

Portanto:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\bar{\sigma}_x}{2\bar{E}_x}\left(1 - \bar{\nu}_{xy}\right)$$

$$\gamma_6 = \frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{E}_x}\left(1 + \bar{\nu}_{xy}\right)$$

Do problema anterior:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\bar{\sigma}_x}{Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12}}$$

$$\gamma_6 = \frac{\bar{\sigma}_x}{2Q_{66}}$$

Calculando as tensões na lâmina:

$$\sigma_1 = \varepsilon_1\left(Q_{11} + Q_{12}\right) = \frac{Q_{11} + Q_{12}}{Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12}}\bar{\sigma}_x$$

$$\sigma_2 = \varepsilon_1\left(Q_{12} + Q_{22}\right) = \frac{Q_{12} + Q_{22}}{Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12}}\bar{\sigma}_x$$

$$\tau_6 = \gamma_6 Q_{66} = \frac{\bar{\sigma}_x}{2}$$

Substituindo esses valores no critério de Tsai-Hil calcula-se a resistência do laminado.