Disciplina 4300303 1

Eletromagnetismo II

Primeiro Semestre 2015

Segunda Série de Exercícios

1. O campo elétrico de uma onda se propagando em um meio condutor, com condutividade σ é dado por

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{e}_x$$

onde a constante de propagação é complexa, isto é,

$$k = \alpha + i\beta,$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_0}{2}}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right)^2}\right]^{1/2} \;;\; \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_0}{2}}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right)^2}\right]^{1/2}$$

a) Determine a expressão para a <u>velocidade de fase da onda</u>, $\vec{v}_f$.

b) Calcule a expressão para a energia média armazenada por unidade de volume na onda,

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{4}\left(\epsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E}^* + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\vec{B}^*\right).$$

c) Determine o vetor de Poynting médio da onda

$$\langle S_z\rangle = \frac{1}{2}Re\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right).$$

d) Definindo a <u>velocidade de grupo</u> $\vec{v}_g$ pela relação

$$\langle\vec{S}\rangle = \vec{v}_g\langle\varepsilon\rangle,$$

determine sua expressão em termos de $\omega, \mu_0, \epsilon_0, \sigma$.

e) A expressão para a velocidade de grupo obtida no item anterior concorda com a expressão usual $v_g = \partial k/\partial\omega$, onde, neste caso $k = \alpha$?

f) Qual é a relação entre a velocidade de fase e a de grupo para meios condutores?

2. Vimos em aula que em um meio dispersivo, próximo de uma ressonância isolada, $\omega \approx \omega_0$ as partes reais e imaginárias da constante dielétrica relativa são dadas por

$$Re\epsilon_r \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0}\frac{(\omega_0-\omega)}{(\omega_0-\omega)^2+\frac{\gamma^2}{4}}\,, \qquad Imag\epsilon_r \approx \frac{\omega_p^2}{2\omega_0}\frac{\gamma/2}{(\omega_0-\omega)^2+\frac{\gamma^2}{4}}$$

a) Usando estes resultados, determine as expressões para a constante de propagação α e de amortecimento β, isto é, $k = \alpha + i\beta$, na região de dispersão anômala, $\omega_0 - \gamma/2 \leq \omega \leq \omega_0 + \gamma/2$.

b) Determine a expressão para o índice de refração na mesma região.

c) Determine as expressões para as velocidades de fase e de grupo na região de dispersão, utilizando a expressão convencional $v_g = \partial k/\partial \omega$.

3. Para materiais transparentes, as ressonências ocorrem tipicamente no ultravioleta. Desta forma, na faixa do visível, podemos considerar $\omega^2 \ll \omega_0^2$. Neste caso, mostre que a expressão aproximada para o índice de refração é dada pela expressão de Cauchy

$$n \cong 1 + A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right)$$

onde *A* e *B* são constantes.

4. Faça os cálculos completos da relação de dispersão e dos campos para o modo TM em um guia de onda retangular, seguindo os seguintes passos.

a) Mostre que as relações entre as componentes dos campos e a componente E_z são dadas por

$$E_x = \frac{ik}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}\frac{\partial E_z}{\partial x};\ E_y = \frac{ik}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}\frac{\partial E_z}{\partial y};\ H_x = -\frac{\epsilon_0 \omega}{k} E_y;\ H_y = \frac{\epsilon_0 \omega}{k} E_x.$$

b) Resolva a equação de onda para E_z ,

$$\nabla_\perp^2 E_z + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) E_z = 0,$$

no guia de onda retangular.

c) Mostre que a relação de dispersão é a mesma que para os modos TE, isto é,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right).$$

No entanto, para os modos TM os valores mínimos dos números de onda m e n são diferentes que para os modos TE. Que valores mínimos são estes e porque?

d) Faça os gráficos, em função de x e y, das componentes E_x e E_y para os modos TE_{11} e TM_{11}.

5) Vimos em aula que as frequências ressonantes para uma cavidade condutora de lados *a*, *b* e *c* são dadas por

$$\omega_{mnl} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}}$$

a) Faça um gráfico em duas dimensões para cada componente do campo elétrico, E_x, E_y e E_z, em função de y e z, no plano $x = a/2$, para o modo $m = 0, n = 1, l = 1$.

b) Determine as expressões para a densidade superficial de carga, σ, e de corrente, $\vec{K}_s$, na face $x = 0$ da cavidade.

6) Determine os valores limites da largura a de um guia de ondas de seção reta quadrada que transmite uma onda de comprimento de onda λ no modo TE_{10}, porém não nos modos TE_{11} ou T_{11}.

7) Procure informação sobre a frequência de operação dos fornos de micro ondas residenciais e, tomando as dimensões de um forno comercial, determine os modos que nele são excitados.

<u>Problemas do livro texto</u> (Cap 9)

8. (9.18)

9. (9.19)

10. (9.27)