

Mecânica Quântica — 7600022

Décima Lista — Para praticar para a prova de 3/7/2017

1. Um elétron está sujeito ao campo magnético $\vec{B} = B_0 \hat{k} + B_1 \hat{i}$, onde $B_1 \ll B_0$. Poderíamos calcular diretamente as energias que o elétron pode ter, devido ao acoplamento entre o seu spin e o campo magnético, mas o objetivo, aqui, é calcular perturbativamente. Para isso, considere o Hamiltoniano não perturbado $H_0 = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$ e a perturbação $W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_1$.

- (a) Quais são os autovalores e autovetores não perturbados? Vamos chamar o autovalor mais alto de E_1^0 e o mais baixo de E_2^0 , e os autovetores de $|1\rangle$ e $|2\rangle$, respectivamente.
- (b) Os autovalores são degenerados?
- (c) Considere agora o autovalor mais alto e seu autovetor. Calcule a correção perturbativa em primeira ordem $\langle 1|W|1\rangle$ e mostre que ela é nula.
- (d) Calcule então a correção de energia de segunda ordem (note que neste caso a soma sobre todos os outros estados se reduz a um único termo):

$$E_1^2 = \frac{|\langle 1|W|2\rangle|^2}{E_1^0 - E_2^0}$$

- (e) Repita o procedimento para encontrar, aproximadamente, o autovalor com energia mais baixa.

2. Considere agora o elétron no estado $|1s\rangle$ do átomo de hidrogênio e leve o spin em consideração, isto é, considere os estados $|1\rangle = |1s \uparrow\rangle$ e $|2\rangle = |1s \downarrow\rangle$. Aplica-se o campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$. O Hamiltoniano que descreve o átomo é, portanto,

$$H = H_0 + W,$$

onde

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r},$$

e

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}.$$

Este é um caso em que os estados não perturbados são degenerados (ambos têm energia $E_1^0 = E_2^0 = -(1/2)Ha$).

- (a) Construa a matriz

$$[W] = \begin{bmatrix} \langle 1|W|1\rangle & \langle 1|W|2\rangle \\ \langle 2|W|1\rangle & \langle 2|W|2\rangle \end{bmatrix}$$

Calcule os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz $[W]$. As energias dos autoestados perturbados são $-(1/2)Ha + \lambda_1$ e $-(1/2)Ha + \lambda_2$.

- (b) Faça um gráfico mostrando os dois autovalores em função do campo magnético.
 - (c) Os autoestados de $[W]$ são os autoestados perturbados, isto é, as duas combinações de $|1\rangle$ e $|2\rangle$ que se tornam especiais sob a ação do campo magnético. Encontre esses dois autoestados.
 - (d) Repita o problema para $\vec{B} = B\hat{i}$.
3. Um oscilador harmônico está sujeito a um campo elétrico $\mathcal{E}$. Seu Hamiltoniano é

$$H = H_0 + W,$$

onde

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

onde

$$W = e\mathcal{E}x.$$

- (a) Quais são o autovalor mais baixo E_1^0 e seu autovetor $|1\rangle$?
- (b) Esse autovalor é degenerado?
- (c) Calcule a correção de primeira ordem $\langle 1|W|1\rangle$. Para isso, lembre-se de que $x = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}(a + a^\dagger)$.
- (d) Calcule em seguida a correção de segunda ordem (somente um termo é diferente de zero na soma abaixo):

$$E_1^2 = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|\langle 1|W|m\rangle|^2}{E_1^0 - E_m^0}.$$

4. Considere agora o átomo de hidrogênio na presença de um campo elétrico $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\vec{k}$. Vamos deixar de lado o spin para calcular a correção perturbativa nos estados $|1\rangle = |2s\rangle$, $|2\rangle = |2p1\rangle$, $|3\rangle = |2p0\rangle$, $|4\rangle = |2p\bar{1}\rangle$.
- (a) Uma vez que os quatro estados são degenerados, é necessário calcular a matriz $[W]$, que é 4×4 . Os elementos de $[W]$ são $\langle 1|W|1\rangle$, $\langle 1|W|2\rangle$, $\langle 1|W|3\rangle$ etc.. Os únicos dois elementos não nulos são $\langle 1|W|3\rangle$ e $\langle 3|W|1\rangle$. Calcule-os (em coordenadas esféricas). Você não precisa calcular as integrais radiais

$$I_r = \int R_{2s}(r)r^3 R_{2p} dr,$$

mas precisa calcular as integrais angulares. Para isso, lembre-se de que

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

e

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta.$$

5. Uma vez que a maioria de seus elementos é nula, é fácil diagonalizar a matriz $[W]$. Encontre os autovalores e a partir deles encontre as energias do átomo no campo elétrico até primeira ordem em $\mathcal{E}$.