

PROVA SUBSTITUTIVA DE PME2330 – MECÂNICA DOS FLUIDOS II - 2013

1ª Questão(3,0 pontos) Considere o escoamento potencial ao redor de um cilindro girando. Pergunta-se:

- a) Qual a intensidade λ do dipolo e Γ de um vórtice ideal para se obter num cilindro de 2,0 metros de diâmetro imerso numa corrente de ar com velocidade uniforme de 50 m/s, pontos de estagnação a 30° e 150° ? (1,0 pto.)
 b) Se o escoamento ao longe possui uma pressão $p_o = 1,02 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ e a massa específica $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$, qual a pressão nos pontos de estagnação? (1,0 pto.)
 c) Qual a velocidade e a pressão estática a 90° e a 270° ? (0,5 pto.)
 d) Qual o valor teórico da sustentação por unidade de comprimento (módulo, direção e sentido) que age sobre o cilindro? (0,5 pto.). Dados:

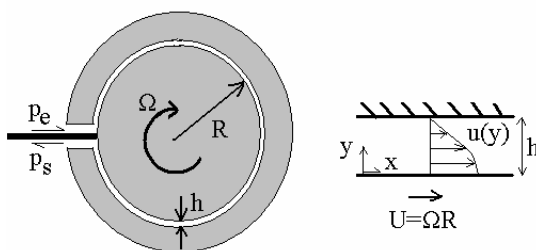
Movimento Uniforme: $\phi = U_\infty r \cos \theta$; $\psi = U_\infty r \sin \theta$ Dipolo: $\phi = \frac{\lambda}{r} \cos \theta$; $\psi = -\frac{\lambda}{r} \sin \theta$

Vórtice Ideal: $\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \theta$; $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}$ $u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}$ $u_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$ $\frac{L}{b} = -\rho U_\infty \Gamma$

2ª Questão (3,0 pontos): Uma bomba de fricção consiste em um cilindro sólido de raio R e comprimento b (normal ao plano da figura) que gira em sentido horário com velocidade angular Ω constante dentro de um cilindro oco de raio interno $R+h$. O fluido de viscosidade dinâmica μ escoa dentro da bomba arrastado pelo movimento de rotação do cilindro interno. As passagens de entrada e saída são separadas. Na entrada temos uma pressão p_e e na saída uma pressão p_s , sendo que $p_s > p_e$. Imaginando que, como $h \ll R$, o problema pode ser resolvido como um escoamento entre duas placas planas paralelas, uma delas imóvel e a outra se movendo com velocidade ΩR , e fazendo as hipóteses de fluido incompressível, regime permanente e efeitos gravitacionais desprezíveis, determine, como função de R , h , Ω , p_s , p_e e μ , expressões para:

- a) O perfil de velocidades $u(y)$ do escoamento entre os dois cilindros (1,0 ponto).
 b) A vazão volumétrica por unidade de largura Q/b (1,0 ponto).
 c) O torque T/b por unidade de largura para manter o cilindro girando com velocidade angular constante (1,0 ponto).

Dica: considere um gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_s - p_e}{2\pi R}$ constante ao longo do comprimento da circunferência.



Continuidade: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ Navier-Stokes: $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}$

3ª Questão(4,0 pontos): Considere um escoamento permanente com uma camada limite laminar numa placa plana. Em uma determinada posição, a espessura da camada é δ , enquanto a velocidade na corrente livre é U . Utilizando a equação integral de Von Karman:

- a) Determinar o gradiente de pressão $\frac{dp}{dx}$ necessário para que a espessura da camada limite não mude com a posição (2,0 pto.).

b) Para um óleo com $\mu = 8 \times 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$ e $\rho = 0,8 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\delta = 0,1 \text{ mm}$ e $U = 1,0 \text{ cm s}^{-1}$, calcular a espessura de deslocamento, a espessura de deslocamento de quantidade de movimento, a tensão na parede e $\frac{dp}{dx}$ (2,0 pto.).

Para a velocidade utilizar o perfil parabólico: $\frac{u}{U} = 2\eta \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right)$ onde $\eta = \frac{y}{\delta}$

Dados: $\frac{\tau_p}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \theta) + U \delta^* \frac{\partial U}{\partial x}$; $\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$; $\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$; $\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$.

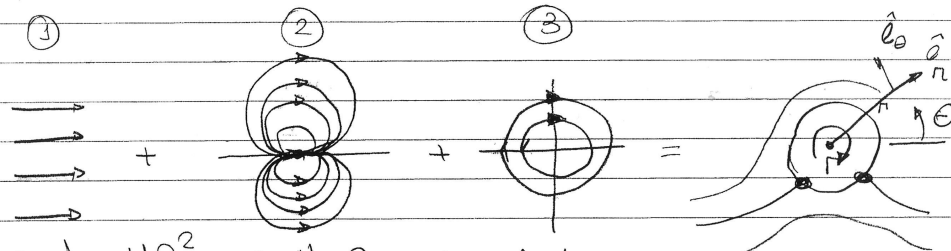
GABARITO

1ª Questão

Data

1

1ª Questão



(1) + (2) $\Rightarrow \lambda = UR^2 \Rightarrow \psi = 0$ na sup. cilindro

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow \psi = U \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}$

$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$

$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r}$

$R = 2\text{m} ; U = 50\text{m/s} ;$

Nos pts de estagnação: $V_r = V_\theta = 0$ e $r = R$

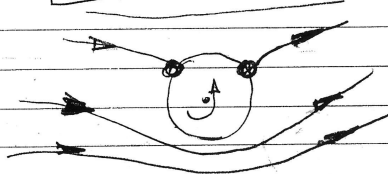
$0 = U \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{R^2}\right) \quad 0 = 0 \text{ (trivial!)}$

$0 = -U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{R^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{R}$

$\frac{\Gamma}{4\pi R} = -U \sin \theta \Rightarrow \Gamma = -4\pi R U \sin \theta$

a)

$\Gamma = -4\pi \times 1 \times 50 \times \sin 30 = 314 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$



$\lambda = UR^2$

$\lambda = 50 \text{ m}^3/\text{s}$

b) Bernoulli:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \frac{p_e}{\rho} = \frac{1,02 \times 10^5}{1,2} + \frac{50^2}{2} = 86250$$

$$\therefore \boxed{p_e = 86250 \times 1,2 = 1,035 \times 10^5 \frac{N}{m^2}}$$

c) No alindos, $V_2 = 0$

$$V_\theta \Big|_{r=R} = - \left(1 + \frac{R^2}{R^2} \right) U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 1} =$$

$$= -2U \sin \theta + \frac{314}{2\pi \times 1}$$

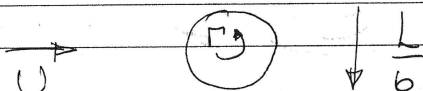
$$\theta = 90^\circ \Rightarrow V_\theta \Big|_{\substack{r=R \\ \theta=90^\circ}} = -2 \times 50 + \frac{314}{2\pi \times 1} = -50 \text{ m/s}$$

$$\theta = 270^\circ \Rightarrow V_\theta \Big|_{\substack{r=R \\ \theta=270^\circ}} = +2 \times 50 + \frac{314}{2\pi \times 1} = -150 \text{ m/s}$$

$$\boxed{p \Big|_{\substack{r=R \\ \theta=90^\circ}} = p_0 + \left(\frac{U^2}{2} - \frac{V_{\theta=90^\circ}^2}{2} \right) \rho = 1,02 \times 10^5 \frac{N}{m^2}}$$

$$\boxed{p \Big|_{\substack{r=R \\ \theta=90^\circ}} = p_0 + \left(\frac{U^2}{2} - \frac{V_{\theta=270^\circ}^2}{2} \right) \rho = 0,90 \times 10^5 \frac{N}{m^2}}$$

$$d) \boxed{L/b = \rho U \Gamma = -1,2 \times 50 \times 314 = -18,84 \frac{N}{m}}$$



2ª Questão

a) Perfil de velocidades $u(y)$:

Como $v \approx 0$, da equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

As equação de Navier-Stokes (componente x), lembrando que temos regime permanente:

$$\rho \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_0 + \rho u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_0 + \rho v \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_0 + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \underline{\underline{-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}}$$

Podemos integrar a equação diferencial simplificada resultante com duas condições de contorno: para $y=0$, $u=U$, e para $y=h$, $u=0$. Fazendo a integração e aplicando as condições de contorno:

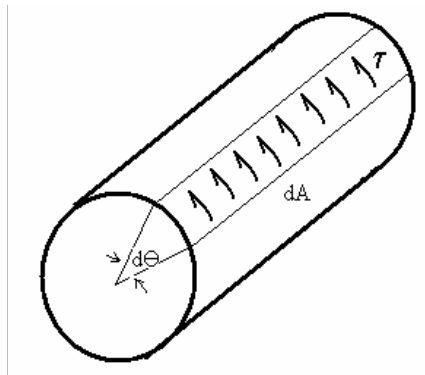
$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} - \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} + \frac{U}{h} \right) y + U \quad ; \quad \text{lembrando que } \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_s - p_e}{2\pi R} \quad e \quad U = \Omega R$$

$$\underline{\underline{u = \frac{1}{\mu} \frac{p_s - p_e}{2\pi R} \frac{y^2}{2} - \left(\frac{1}{\mu} \frac{p_s - p_e}{2\pi R} \frac{h}{2} + \frac{\Omega R}{h} \right) y + \Omega R}}$$

b) Vazão Q/b :

$$\underline{\underline{\frac{Q}{b} = \int_0^h u \, dy \Rightarrow \frac{Q}{b} = \frac{\Omega R h}{2} - \frac{1}{\mu} \frac{p_s - p_e}{2\pi R} \frac{h^3}{12}}}$$

c) Torque T/b :



A força tangencial que atua no elemento da área dA da figura é $\tau \, dA$. Logo, o torque sobre o elemento é $\tau \, R \, dA$. Como $dA = R \, b \, d\theta$, resulta:

$$\underline{\underline{\frac{T}{b} = \int_0^{2\pi} \tau R^2 \, d\theta \quad ; \quad \text{como } \tau = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} \quad \text{resulta} \quad \frac{T}{b} = \left(\frac{p_s - p_e}{2\pi R} \frac{h}{2} + \mu \frac{\Omega R}{h} \right) 2\pi R^2}}}$$

3ª Questão

Perfil parabólico: $\frac{u}{U} = 2\eta \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right)$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{1}{3} \delta$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{2}{15} \delta$$

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 2\mu \frac{U}{\delta}$$

Substituindo na eq. de von Kármán:

$$\frac{2\tau U}{\delta} = \frac{d}{dx} \left(U^2 \frac{2\delta}{15} \right) + U \frac{1}{3} \delta \frac{dU}{dx}$$

Admitindo $\delta = \text{cte}$ (dado do problema):

$$\frac{2\tau U}{\delta} = \frac{4}{15} \delta \frac{dU}{dx} + \frac{1}{3} \delta \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{2\tau}{\delta} = \frac{3}{5} \delta \frac{dU}{dx} \Rightarrow \frac{dU}{dx} = \frac{10\tau}{3\delta^2}$$

De Bernoulli:

$$\frac{dp}{dx} + \rho U \frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}$$

a) $\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{10}{3} \frac{\tau}{\delta^2} = -\frac{10}{3} \frac{\mu U}{\delta^2}$

Dados:

b) $\mu = 8 \times 10^{-3} \text{ N s/m}^2$ $\rho = 0,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$$\delta = 1 \times 10^{-4} \text{ m}; \quad U = 1 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

$$\delta^* = \frac{1}{3} \times 1 \times 10^{-4} \approx 3,3 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$\theta = \frac{2}{15} \times 1 \times 10^{-4} \approx 1,3 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$p_p = \frac{2 \times 8 \times 10^{-3} \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-4}} = 1,6 \text{ N/m}^2$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{10}{3} \frac{8 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^{-2}}{(1 \times 10^{-4})^2} \approx -2,6 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2 \cdot \text{m}}$$