Mecânica dos Fluidos II (PME 2330)
Gabarito Prova Substitutiva - 2015

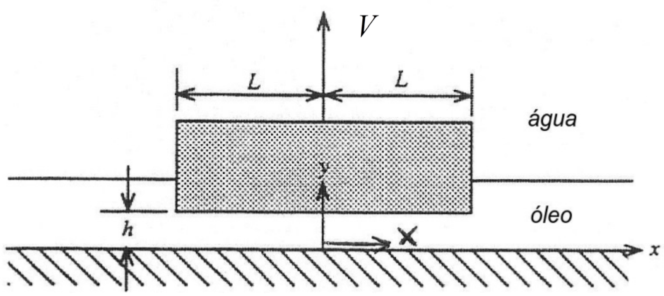
1. (4 pontos) Um bloco retangular de comprimento $2L$ e largura muito grande b (na direção ortogonal ao plano da figura), de modo que $b >> L$, está parcialmente imerso numa piscina de óleo de massa específica ρ e viscosidade μ, separado do fundo por uma distância h, $h << L$. Ele se eleva lentamente com uma velocidade constante V.

a) Obtenha uma expressão para a vazão volumétrica que entra por baixo do bloco à medida que este se eleva, $Q = Q(x, V, b)$ numa seção qualquer localizada a uma distância x do plano de simetria.

b) Desprezando a gravidade e assumindo que a inércia do óleo é desprezível (escoamento muito lento, podemos desprezar acelerações), obtenha uma expressão para a força vertical F causada pela distribuição de pressões na base inferior do bloco, $F = F(h, V, \mu, b, L)$.

Equações de continuidade e Navier-Stokes, regime permanente:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0 \qquad u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}\right)$$



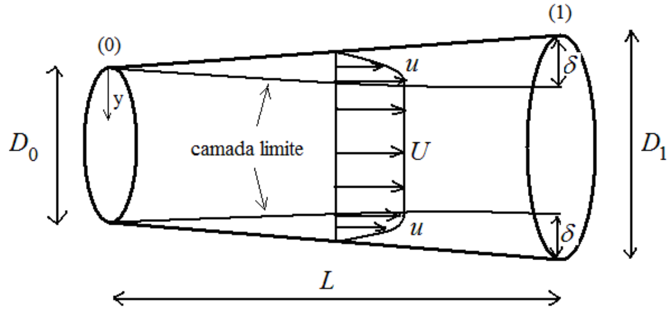
2. (3 pontos) O escoamento numa camada limite laminar pode ser representado pelo perfil de velocidades:

$$\frac{u}{U}=f(\eta)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\eta\right), \text{ onde } \eta=\frac{y}{\delta}$$

a) Para uma placa plana paralela a corrente (sem gradiente de pressão) obtenha, usando a equação integral de von Kármán, os resultados para a espessura da camada limite δ/x, espessura de deslocamento δ^*/x e para o coeficiente de atrito local c_f.

b) A seção de testes de um túnel de vento de baixa velocidade (escoamento incompressível) tem uma seção transversal que aumenta ligeiramente de diâmetro para compensar o crescimento da camada limite, de modo a garantir que a velocidade U na linha de centro fique constante ao longo do comprimento. Mostre que, se considerarmos $\delta(x) << D(x)$, onde $D(x)$ é o diâmetro de uma seção qualquer ao longo do túnel, a vazão Q no túnel pode ser escrita como $Q=U\dfrac{\pi D^2(x)}{4}-U\,\pi D(x)\,\delta(x)+\pi D(x)\displaystyle\int_0^{\delta(x)} u\,dy$.

c) Mostre que, para mantermos U constante na linha de centro, o diâmetro $D(x)$ do conduto deve variar de acordo coma equação $D^2(x)-4D(x)\delta^*(x)=D_0^2$, sendo que D_0 é o diâmetro em $x=0$, onde temos o início da camada limite.



Equação integral de von Kármán, espessura de deslocamento, espessura de momento, coeficiente de atrito de filme:

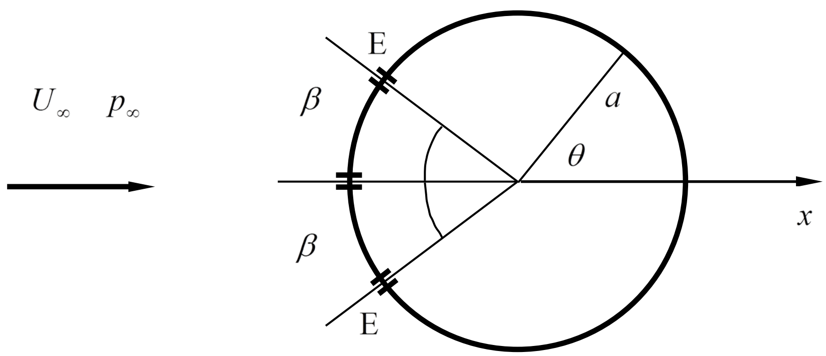
$$\frac{c_f}{2}=\frac{d\theta}{dx}+\left(2+\frac{\delta^*}{\theta}\right)\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx} \quad ; \; \delta^*=\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{U}\right)dy \; ; \quad \theta=\int_0^\delta\left[\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)\right]dy \; ; \quad c_f=\frac{2\tau_o}{\rho U^2}$$

Ajudas para o cálculo:

$$\int[1-\operatorname{sen}(a\,x)]dx=x+\frac{1}{a}\cos(a\,x) \; ; \qquad \int\operatorname{sen}(a\,x)[1-\operatorname{sen}(a\,x)]dx=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{a}\cos(a\,x)+\frac{1}{4a}\operatorname{sen}(2\,a\,x)$$

3. (3 pontos) É possível utilizar como indicador da direção do escoamento o tubo cilíndrico de raio a da figura, onde os três orifícios radiais estão equiespaciados. Sempre que a pressão nos orifícios laterais seja igual , o orifício central indicará a direção de escoamento e medirá a pressão de estagnação.

a) Considerando que o escoamento é potencial, calcular o erro na velocidade $\varepsilon=\dfrac{U_E-U_\infty}{U_\infty}$, onde U_E é a velocidade no orifício lateral (tomada de pressão estática E) em função da posição angular θ.
b) Para que os orifícios laterais meçam a pressão da corrente livre p_∞, em que posição angular β deverão ser localizados?
c) Considerando que o escoamento é real, comente o desempenho do dispositivo se os orifícios estiverem localizados na região trasseira do cilindro ($0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$).



Função corrente para corrente livre e dipolo, velocidade, Bernoulli:

$$\psi=U_\infty\, r\operatorname{sen}\theta-\frac{\lambda\operatorname{sen}\theta}{r}, \qquad u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}; \; p+\frac{1}{2}\rho U^2=cte$$

Solução:

a) A distribuição de velocidade resulta:

$$u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=U_\infty\cos\theta\left(1-\frac{\lambda}{U_\infty r^2}\right) \quad ; \quad u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r}=-U_\infty\operatorname{sen}\theta\left(1+\frac{\lambda}{U_\infty r^2}\right)$$

Para ter um contorno circular de raio a, deve ser $u_r(a,\theta)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = U_\infty a^2$. A velocidade resulta:

$$u_r = U_\infty \cos\theta \left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) \quad ; \quad u_\theta = -U_\infty \operatorname{sen}\theta \left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)$$

Na superfície do cilindro, $u_{rs}=0$ e $u_{\theta s} = -2U_\infty \operatorname{sen}\theta$. O módulo da velocidade na tomada de pressão lateral resulta $U_E = |u_{\theta s}| = 2U_\infty |\operatorname{sen}\theta|$, de maneira que $\varepsilon = \dfrac{U_E - U_\infty}{U_\infty} = \dfrac{U_E}{U_\infty} - 1 = 2U_\infty |\operatorname{sen}\theta| - 1$

b) Quando os orifícios laterais meçam a pressão da corrente livre p_∞, o erro será zero, de maneira que $2U_\infty |\operatorname{sen}\theta| - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{sen}\theta| = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}$. A tomada lateral na frente corresponde a $\beta = \dfrac{\pi}{6}$, enquanto a tomada na trasseira corresponde a $\beta = \dfrac{5\pi}{6}$.

c) Na região trasseira o dispositivo não funciona em um escoamento real pois a camada limite se descola e a pressão na superfície não se recupera. As medições nas tomadas laterais são insensíveis à direção do escoamento.