

CAPÍTULO 3. INSTABILIDADES HIDRODINÂMICAS E TRANSIÇÃO PARA A TURBULÊNCIA

3.1. Preliminares

No capítulo 2 discutiu-se a equação da vorticidade, assim como o fenômeno de *vortex stretching* e de difusão/advecção de vorticidade. A camada limite dos escoamentos é plena de vorticidade, oriunda dos gradientes de velocidades, que se difundem para as regiões adjacentes ou em outras palavras, as camadas limites dos escoamentos são regiões prolíficas para a geração de grande parte da vorticidade dos escoamentos turbulentos. Os escoamentos potenciais são raros na natureza e no caso de escoamentos internos, e com a interação fluido-estrutura, eles nunca acontecem.

Os escoamentos permanentes em condutos forçados constituem-se em um dos mais importantes capítulos de estudo dos escoamentos internos. Para o cálculo da perda de carga nesses escoamentos, qualquer que seja a forma da seção transversal, a fórmula de Darcy – Weisbach, também conhecida por Fórmula Universal da Perda de Carga, é a mais indicada:

$$\Delta H = f \frac{L}{D_H} \frac{U^2}{2g} \quad (3.1)$$

sendo U a velocidade média na seção. Pela definição da velocidade média:

$$U = \frac{Q}{A} \quad (3.2)$$

Substituindo-se a equação (3.2) na equação (3.1), resulta:

$$\Delta H = \frac{8fL}{g\pi^2 D_H^5} Q^2 = KQ^2 \quad (3.3)$$

No caso de escoamento laminar permanente em condutos forçados, cilíndricos de seção circular, sabe-se que o perfil de velocidades é parabólico, com velocidade máxima no centro da tubulação e velocidade nula nas paredes, de acordo com o princípio da aderência completa para fluidos reais, sendo:

$$u_{m\acute{a}x} = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (3.4)$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (3.5)$$

ou, utilizando a equação (3.2):

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{8\mu}{\pi R^4} Q = KQ \quad (3.6)$$

É interessante observar que Hagen e Poiseuille, trabalhando separadamente, em uma mesma época (1838-1842) obtiveram as evidências experimentais de que o fluxo é proporcional à queda de pressão, a quarta potência do raio e inversamente proporcional ao comprimento do tubo, conforme equação (3.6).

Hagen estudou, na metade do século dezenove, o escoamento da água em tubulações retas de seção circular, com pequenos raios, e estabeleceu que, com o gradual decréscimo na viscosidade da água (obtido através do aumento da temperatura), a velocidade do escoamento, para a mesma queda de pressão, primeiro aumentava até algum limite e então começava a decrescer novamente. O jato de água saindo do tubo antes de atingir o limite tinha uma forma lisa, mas depois que se ultrapassava o limite sofria acentuadas flutuações (*figura 3.1*). Hagen explicou o fenômeno argumentando que para valores de viscosidade suficientemente baixos, movimentos internos e vórtices (correntes secundárias) são produzidos, levando a um aumento da resistência e, conseqüentemente, a uma diminuição da velocidade do escoamento. Todavia, não conseguiu propor nenhum critério geral para a “transição” de escoamento laminar para escoamento turbulento. A *figura 3.1* reproduz a experiência a partir do escoamento de uma mistura de água e glicerina escoando em um tubo de 4 m de comprimento e 3 cm de diâmetro. Pode-se ver na *figura 3.1 a*, que para alta viscosidade da mistura o escoamento do jato é laminar na saída do tubo. Quando a viscosidade da mistura é

diminuída, ficando abaixo de um valor mínimo, a transição para a turbulência ocorre no escoamento do jato (*figura 3.1 b*).

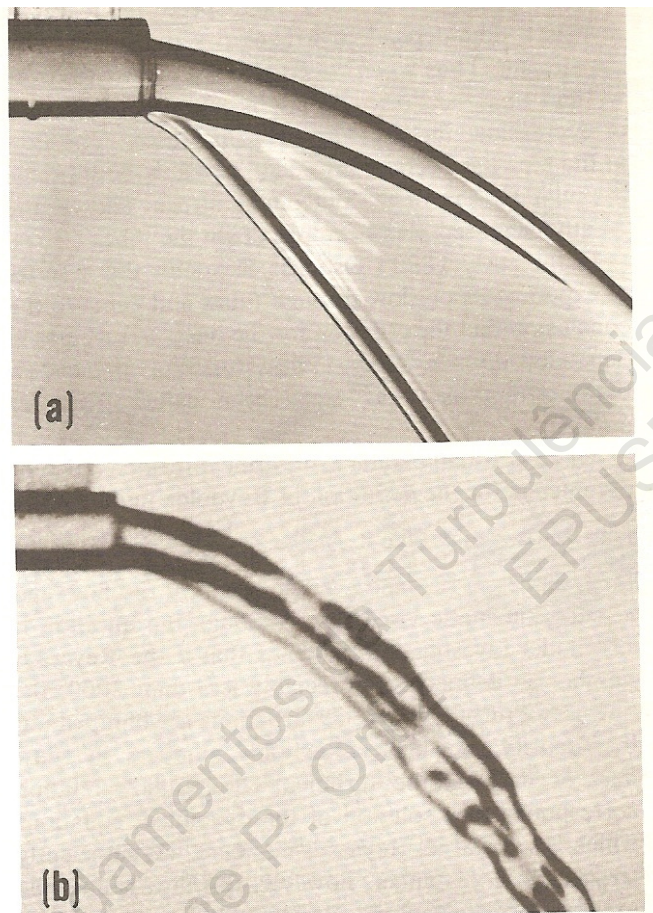


Figura 3.1 Saída de um jato laminar de uma tubulação com passagem para escoamento turbulento: (a) escoamento laminar; (b) transição para a turbulência (Fonte: THE NCFMF BOOK OF FILM NOTES, 1980).

Enquanto Hagen trabalhava com tubos grosseiros de cobre, na mesma época Poiseuille que era físico e médico, executava seus trabalhos com capilares de vidro, chegando a resultados mais precisos. O objetivo de Poiseuille era estudar o fluxo sanguíneo nos vasos arteriais e na impossibilidade de se usar sangue, utilizou a própria água como fluido de escoamento. Portanto, após Da Vinci no século XVI, surgiam, no século XIX, novas incursões científicas na área da Engenharia Biomédica. Pela equação (3.6) percebe-se que a queda de pressão Δp , varia inversamente com a quarta potência do raio R da tubulação. A carga de pressão na entrada da circulação sistêmica do ser humano é da ordem de 100mmHg e a resistência ao escoamento aumenta drasticamente a medida que se atingem as “arteríolas”, conforme discutiremos no capítulo 9.

Mais de 40 anos após Hagen-Poiseuille, surgiu a experiência de Reynolds, detalhadamente descrita no capítulo 1, que comprovou que a transição do escoamento laminar para o escoamento turbulento é acompanhada por uma notável mudança na lei de resistência.

Se retomarmos a equação (3.3) e lembrarmos que para o escoamento laminar em condutos forçados: $f = 64/Re$, substituindo-se esta última formulação na equação mencionada, recaímos na equação (3.6) de Poiseuille, onde a queda de pressão no escoamento laminar é diretamente proporcional a vazão volumétrica, diferentemente do que ocorre no escoamento turbulento, onde a queda de pressão é diretamente proporcional ao quadrado da vazão.

O valor crítico do número de Reynolds obtido em sua experiência foi da ordem de 2400.

Para: $Re < Re_c \Rightarrow$ escoamento laminar $\Rightarrow \Delta p \propto Q$

Para $Re > Re_c \Rightarrow$ escoamento turbulento $\Rightarrow \Delta p \propto Q^2$.

De acordo com a teoria de Kolmogorov da turbulência, o número de Reynolds crítico poderia ser definido como $Re_c = \rho u D / \mu \cong 1$, com o número de Reynolds caracterizando a importância relativa dos efeitos não-lineares sobre os efeitos viscosos na equação de Navier-Stokes.

É, portanto, difícil estabelecer uma base teórica firme e universal para o conceito de Re_c . Na verdade os experimentos mostram que o número de Reynolds de transição para a turbulência depende do nível de perturbação do escoamento de entrada. Por outro lado, não existe, até agora, uma teoria de análise de estabilidade que seja satisfatória para o estabelecimento do Re_c de transição para a turbulência nos escoamentos gerais da natureza.

3.2. Conceito de Estabilidade de Escoamentos Sujeitos a Pequenas Perturbações

Os esquemas representados na *figura 3.2*, conforme descrito em White, 2006, que mostram uma esfera para diversas situações de repouso, são bastante didáticos para introduzir o conceito de estabilidade de escoamentos.

- a) **Equilíbrio Estável:** a esfera está em situação incondicionalmente estável, pois retornará a sua posição inicial, mesmo sujeita a grandes deslocamentos.

- b) **Equilíbrio Instável:** qualquer perturbação (deslocamento) da esfera faz com que ela perca, definitivamente, a estabilidade.
- c) **Equilíbrio Indiferente:** a esfera permanecerá em repouso potencial qualquer que seja o lugar em que seja colocada (estabilidade neutra).
- d) Nesse caso, para pequenos deslocamentos, o **equilíbrio é estável**, e, para grandes deslocamentos, o **equilíbrio é instável**.

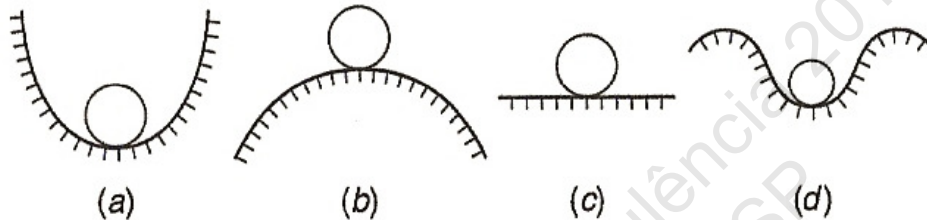
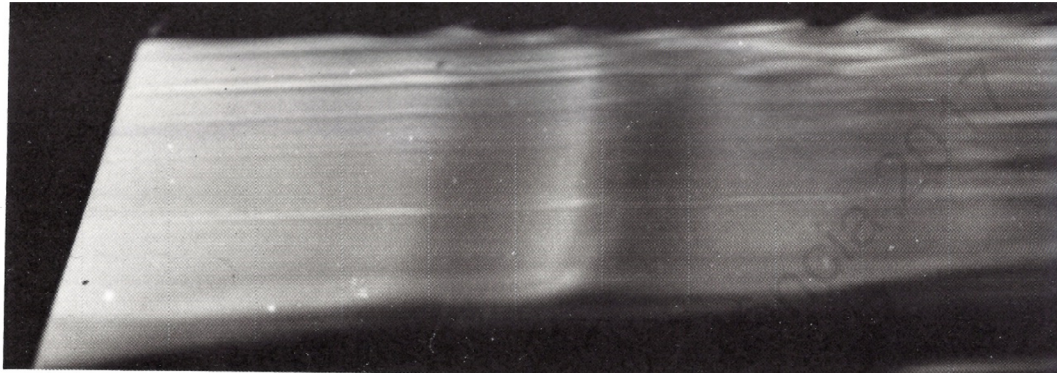


Figura 3.2. Representação esquemática do equilíbrio de uma esfera apoiada sobre uma superfície lisa (Fonte: WHITE, 2006).

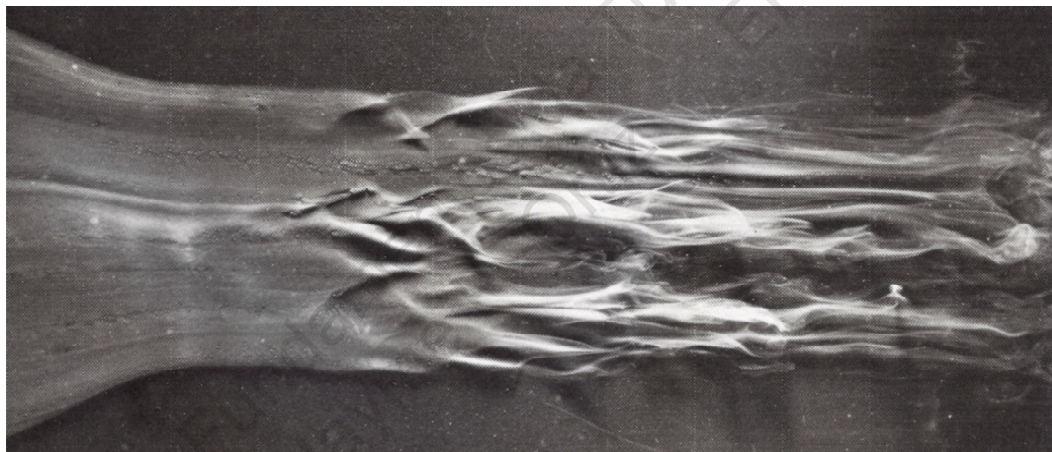
A partir do exemplo da esfera, poderíamos estabelecer uma analogia com um escoamento laminar (portanto paralelo), sujeito a pequenas perturbações. Para a análise das pequenas perturbações atuando no escoamento, os seguintes passos são previstos:

- Assumimos que existe uma solução conhecida (S_0) para a equação diferencial do movimento; no caso (S_0) seria solução da equação de Navier-Stokes (**N-S**) para escoamento de Poiseuille, ou solução de camada limite (Blasius, por exemplo).
- Assumimos uma pequena perturbação S' , fazendo-se a variável se transformar em $S_0 + S'$.
- Como os termos para a solução (S_0) satisfazem as equações do movimento (escoamento laminar), escrevem-se as equações em termos da perturbação S' . O comportamento de S' , de amplificação ou amortecimento (no tempo ou no espaço) é que define se o movimento é estável ou instável.
- As equações de S' , são agora linearizadas, já que os termos não-lineares da equação de **N-S**, são ainda difíceis de trabalhar, sendo muitas vezes necessário assumir hipóteses, com escoamento paralelo e com variação em uma única direção (y). Sendo assim a perturbação S' pode assumir a forma de uma onda unidimensional viajando na direção do escoamento, conhecida por onda de **Tollmien-Schlichting (T-S)**, representada na *figura 3.3*.

Portanto, dependendo da perturbação que esta associada ao número de Reynolds do escoamento, e pensando ainda em teoria linear, as perturbações podem ser amortecidas ou amplificadas, podendo-se estabelecer uma região neutra (curva de estabilidade neutra) associada ao número de Reynolds de instabilidade do escoamento.



(a)



(b)

Figura 3.3. Visualização fotográfica de formação de onda T-S em torno de placa plana (a) com ângulo de incidência zero e $R_x = 20000$ (número de Reynolds local); (b) placa inclinada de 1° com $R_x = 100000$, mostrando a transição para a turbulência (Fonte: VAN DIKE – 1982).

3.2.1. Exemplo de Escoamento Absolutamente Instável Sujeito a Pequenas Perturbações

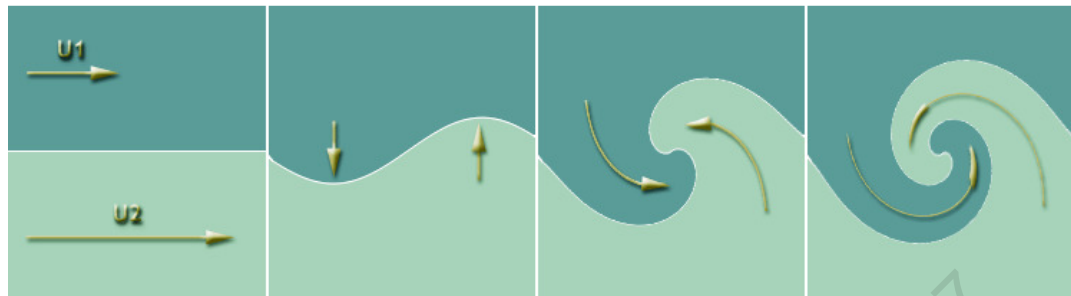
Considerem-se duas camadas de fluidos perfeitos compostas de mesma massa específica, uma deslizando sobre a outra com velocidades iguais e opostas. Considere-se ainda que, sob a ação de uma pequena perturbação, na forma de onda sobre a superfície de descontinuidade formada entre as camadas, a onda deve progredir em amplitude, admitindo-se a priori, por simplicidade, onda não progressiva na direção x-x. Dessa forma, as linhas de corrente sobre a crista da onda deverão se aproximar (com aumento

de velocidade e diminuição de pressão de acordo com a equação de Bernoulli), ao passo que as linhas de corrente no cavado da onda deverão se afastar (com diminuição de velocidade e aumento de pressão de acordo com a equação de Bernoulli), gerando-se, portanto, uma seqüência instável de linhas de escoamento. Esse é um dos exemplos mais simples de escoamento absolutamente instável que ocorre próximo de uma superfície de descontinuidade de velocidades, e é conhecido como instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

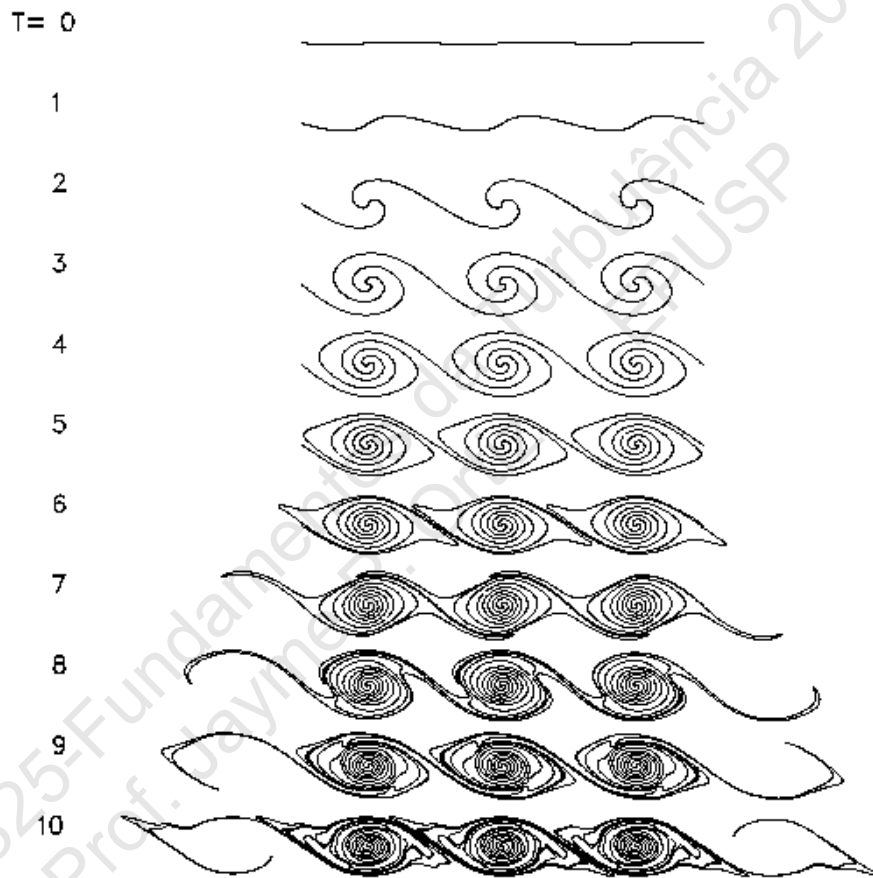
A instabilidade de Kelvin-Helmholtz é representada experimentalmente para um escoamento estratificado em Van Dike (1982). Nesse caso a experiência está mostrada para um canal retangular inicialmente horizontal, com camadas de água (superior) e solução de corante (inferior), estratificadas. Esses líquidos estão em repouso até que o canal é inclinado de 6 graus, iniciando-se o processo de movimento dos líquidos. A solução de corante acelera uniformemente para cima penetrando na camada de água, ao passo que a água acelera para baixo, ocorrendo assim uma instabilidade de uma onda senoidal na interface e que se amplifica com a formação de vórtices. A instabilidade de Kelvin-Helmholtz está ilustrada na *figura 3.4*.

Verifica-se, portanto, que um gradiente de pressão transversal origina-se aumentando a amplitude de onda. O fluido se põe em movimento da região de maior pressão para a região de menor pressão, o que significa ondulação cada vez mais acentuada da superfície de separação. As sucessivas evoluções dessa superfície levam a uma desintegração em vórtices individuais e a formação de “*spots*” de turbulência.

Como a viscosidade do fluido não pode ser nula (fluido real), a descontinuidade brusca da velocidade não é possível. Todavia, quando maior o gradiente da velocidade ou da massa específica, tanto mais o fluido real se aproximará das condições de fluido perfeito. Por outro lado, quanto maior a viscosidade, tanto mais a tensão de cisalhamento se oporá a que se acentuem as diferenças de velocidade e, portanto, que se formem superfícies de descontinuidade.



(a)



(b)

Figura 3.4. (a) Geração de instabilidade de Kelvin-Helmholtz; (b) formação de “spots” de turbulência, (Fonte: <http://www.brockmann-consult.de/CloudStructures>).

3.3. Teoria Linear da Estabilidade. Equação de Orr-Sommerfeld

A teoria da estabilidade de escoamentos laminares parte da decomposição do movimento em um escoamento médio (cuja estabilidade é o motivo da investigação) e de uma perturbação bidimensional superposta. Em um sistema cartesiano tri-ortogonal as variáveis podem ser expressas como:

$$\begin{aligned}
 u &= U + u' \\
 v &= V + v' \\
 p &= P + p'
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

A aplicação do método das pequenas perturbações à teoria da estabilidade consiste em determinar se essas perturbações se amplificam ou se amortecem ao longo do espaço e do tempo, para um dado escoamento médio, podendo o escoamento ser instável ou estável, respectivamente.

Partindo-se das equações do movimento (Navier-Stokes e Continuidade) para um escoamento incompressível, sem empuxo ou gradiente de temperatura, já apresentadas no capítulo 2, pode-se escrever:

- na forma vetorial:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \frac{d \vec{V}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} \\
 \frac{d \vec{V}}{dt} &= \nabla \cdot \vec{V} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

- em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Substituindo as equações (3.7) nas equações (3.9), e, sabendo-se a priori, que, para o escoamento médio, as equações do movimento são obedecidas, e, por outro lado, desprezando-se os termos de maior ordem (produtos de velocidade, por exemplo), resultam as equações do movimento para as perturbações:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \\
\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

Essas equações são normalmente normalizadas, em termos das perturbações:

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{v'}{U_0} & \bar{u} &= \frac{u'}{U_0} \\
\bar{p} &= \frac{p'}{\frac{1}{2} \rho U_0^2}
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

Substituindo as equações 3.11 nas equações 3.10, resultam as equações para as perturbações normalizadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial U}{\partial y} &= -U_0 \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \right) \\
\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} &= -U_0 \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} \right) \\
\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

para as seguintes condições de contorno:

- escoamento paralelo com $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \ll \mathbf{U}(\mathbf{y})$;
- $\mathbf{V} = \mathbf{W} = \mathbf{0}$;
- escoamento incompressível com perturbações bidimensionais;
- gravidade desprezível.

Demonstra-se através do teorema de Squire (1933) (apud WHITE, 2006), que uma perturbação na forma de uma onda propagando-se obliquamente com relação ao escoamento, é mais estável do que no caso de uma perturbação que se propaga paralelamente ao escoamento, o que significa que o mínimo \mathbf{Re}_c para instabilidade

ocorre para o caso de uma perturbação bidimensional se propagando ao longo da direção do escoamento.

Sendo assim a teoria linear admite perturbações bidimensionais na forma de uma onda bidimensional com as seguintes características:

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \hat{u}(y)e^{i\alpha(x-Ct)} \\ \hat{v} &= \hat{v}(y)e^{i\alpha(x-Ct)} \\ \hat{p} &= \hat{p}(y)e^{i\alpha(x-Ct)}\end{aligned}\tag{3.13}$$

Sendo: $\alpha \rightarrow$ número de onda definido como o inverso do comprimento de onda ($\lambda = 2\pi/\alpha$), número real.

$C \rightarrow$ celeridade da onda ($C = C_r + iC_i$), número complexo:

C_r (parte real), que corresponde a velocidade de propagação da onda na direção \mathbf{x} ;

C_i (parte imaginária), que corresponde a variação temporal de amplitude da onda, descrita pelo fator $e^{\alpha C_i t}$,

Com: $C_i < 0 \Rightarrow$ amortecimento da amplitude de onda;

$C_i > 0 \Rightarrow$ amplificação da amplitude de onda;

$C_i = 0 \Rightarrow$ estabilidade neutra.

Substituindo-se as equações (3.13) nas equações (3.12), resulta:

$$\begin{aligned}i\alpha\hat{u} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial y} &= 0 \\ i\alpha(U - c)\hat{u} + \hat{v}\frac{\partial U}{\partial y} &= i\alpha\hat{p}U_0 + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2\right)\hat{u} \\ i\alpha(U - c)\hat{v} &= -U_0\frac{\partial\hat{p}}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2\right)\hat{v}\end{aligned}$$

(3.14)

Manipulando-se adequadamente as equações 3.14 (WHITE, 2006 e LANDAHL & MOLLO-CHRISTENSEN, 1987), obtém-se uma única equação diferencial ordinária de quarta ordem, deduzida pela primeira vez e independentemente por Orr (1907) e

Sommerfeld (1908) e conhecida por equação de Orr-Sommerfeld, a qual escreve-se abaixo:

$$(U - C) \left(\frac{d^2 \hat{v}}{dy^2} - \alpha^2 \hat{v} \right) - \hat{v} \frac{d^2 U}{dy^2} = \frac{\nu}{i\alpha} \left(\frac{d}{dy^2} - \alpha^2 \right)^2 \hat{v}$$

ou

$$(U - C) \left(\frac{d^2 \hat{v}}{dy^2} - \alpha^2 \hat{v} \right) - \hat{v} \frac{d^2 U}{dy^2} = \frac{1}{i\alpha \text{Re}} \left(\frac{d}{dy^2} - \alpha^2 \right)^2 \hat{v}$$

(3.15)

A dedução da equação de Orr-Sommerfeld, **O-S**, permite transformar as equações de derivadas parciais que regem o escoamento de fluido real em uma única equação de derivadas totais, que apesar de ser uma equação de quarta ordem, é uma equação linear, que permite apenas prever o início da perda de estabilidade do escoamento.

Se agregarmos a essa equação as condições de fronteira, no caso mais simples de escoamento em torno de placa plana com ângulo de incidência zero:

$$\hat{v}(y) = \frac{d\hat{v}}{dy} \rightarrow 0 \rightarrow \text{nas fronteiras sólidas};$$

$$\hat{v}(y) = \frac{d\hat{v}}{dy} \rightarrow 0 \rightarrow \text{no infinito}.$$

E desde que o escoamento potencial $U(y)$ seja especificada, a equação de **O-S**, que relaciona quatro parâmetros (α , Re , Cr , Ci), conduz, para cada par de valores (α, Re), um par de valor (Cr, Ci), que traduzem as condições de estabilidade do escoamento.

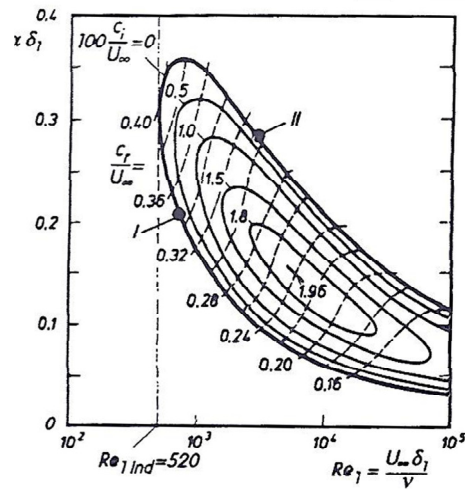


Figura 3.5. Curvas de taxas constantes de amplificação temporal para a camada limite de uma placa plana com ângulo de incidência zero (Fonte: SCHLICHTING E GERSTEN, 2000)

A figura 3.5 é uma representação da aplicação da equação de **O-S**, para placa plana com ângulo de incidência zero, com α normalizado em termos da espessura de deslocamento δ_1 e $Re_{\delta_1} = U_0 \delta_1 / \nu$ (número de Reynolds definido a partir da espessura de deslocamento da placa).

Tollmien em 1931 foi o primeiro a aplicar a teoria linear de **O-S** para verificar a estabilidade da camada limite em torno de placa plana com ângulo de incidência zero, assumindo perfil de Blasius como solução da camada limite. De acordo com os resultados da figura 3.5, têm-se:

$$Re_{\text{crítico}} = U \delta_1 / \nu = 520 \quad \text{e} \quad \alpha_r \delta_1 = (2\pi / \lambda_{\text{mín}}) \delta_1 = 0,36$$

Portanto: $\lambda_{\text{mín.}} = 17,5 \delta_1 \approx 5,5 \delta$ (sendo δ a espessura local da camada limite), donde se conclui:

- O $\lambda_{\text{mín.}}$ que causa instabilidade é de aproximadamente 6δ , o que implica que as ondas de **T-S** são surpreendentemente longas.
- O mínimo **Re** para amplificação é de **520**, que se aproxima daquele apresentado por Tollmien de 420.
- A máxima velocidade de fase das ondas instáveis vale $Cr/U_0 = 0,4$, de modo que as ondas instáveis viajam lentamente.
- O ponto de instabilidade $Re_1 = 520$ corresponde a $Re_x \approx 9,1 \times 10^4$.

Observa-se, portanto, a partir destes resultados, que, de acordo com a teoria linear, o mínimo comprimento de onda que causa instabilidade, é bem maior que a espessura da camada limite.

Historicamente é importante observar que Lord Rayleigh [1878 a 1915] propôs uma teoria não-viscosa de estabilidade, cuja curva de estabilidade neutra aparece, comparada com a teoria viscosa de **O-S**, na figura 3.6. Observe-se que, para a perda da estabilidade, de acordo com a teoria não-viscosa, é condição necessária que haja ponto de inflexão no perfil de velocidades:

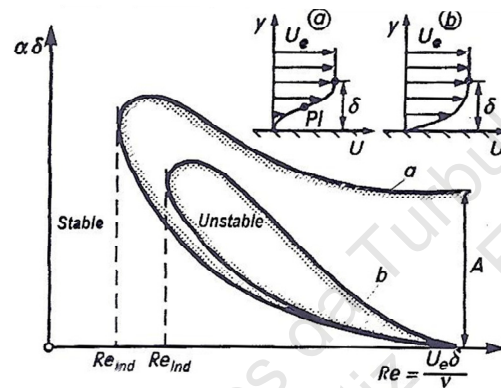


Figura 3.6. Representação gráfica das curvas de estabilidade neutra considerando-se ou não ponto de inflexão no perfil de velocidade (Fonte: SCHLICHTING E GERSTEN, 2000).

Pela análise da figura 3.6, no caso de estabilidade não-viscosa (curva a), mesmo para $\mathbf{Re} \rightarrow \infty$, existe ainda uma faixa de comprimento de onda instável e na direção e sentido de decréscimo de \mathbf{Re} , a zona de instabilidade é separada da zona estável através da curva de estabilidade neutra. Por outro lado, a curva (b) representa o caso de instabilidade viscosa (equação de **O-S**), e nesse caso, para $\mathbf{Re} \rightarrow \infty$, a faixa de comprimento de ondas instáveis tende a um ponto e o domínio de oscilações instáveis existe apenas para uma faixa finita de \mathbf{Re} . Portanto a teoria de Rayleigh superestima as amplificações, quando considera como condição necessária para instabilidade a existência de ponto de inflexão no perfil de velocidades. Sabe-se, todavia, que mesmo perfis sem ponto de inflexão (como perfis de Blasius em placa plana), podem ser conduzidos a escoamentos instáveis, através da atuação da própria viscosidade para certos valores de α e \mathbf{Re} .

3.4. Amplificações Espaciais. Critério de Jaffe/Wazzan /Okamura

As amplificações temporais das perturbações lineares, representadas na *figura 3.5*, partem das equações 3.13, onde têm-se:

$$\hat{v} = \hat{v}(y)e^{i\alpha(x-Ct)} = \hat{v}(y)e^{i\alpha x - i\alpha(Ct - iCi)t} = \hat{v}(y)e^{\alpha Ci t} e^{i\alpha(x-Ct)} \quad (3.16)$$

Sendo a amplificação, proporcional a $e^{\alpha Ci t}$, com α e C complexos.

No caso de amplificações espaciais de perturbações lineares, representadas na *figura 3.6*, para placa plana, com ângulo de incidência zero, a equação acima passa a ser escrita como:

$$\hat{v} = \hat{v}(y)e^{i\alpha(x-Ct)} = \hat{v}(y)e^{i[(\alpha r + i\alpha i)x - (\alpha r + i\alpha i)(Cr + iCi)t]} = \hat{v}(y)e^{-\alpha i x} e^{i(\alpha r x - \alpha i t)} \quad (3.17)$$

sendo a amplificação, proporcional a $e^{-\alpha i x}$ e, neste caso:

$\alpha C = \omega$, é um número real (frequência angular)

para: $\alpha i < 0 \rightarrow$ amplificação da amplitude de onda;

$\alpha i > 0 \rightarrow$ amortecimento da amplitude de onda;

$\alpha i = 0 \rightarrow$ estabilidade neutra.

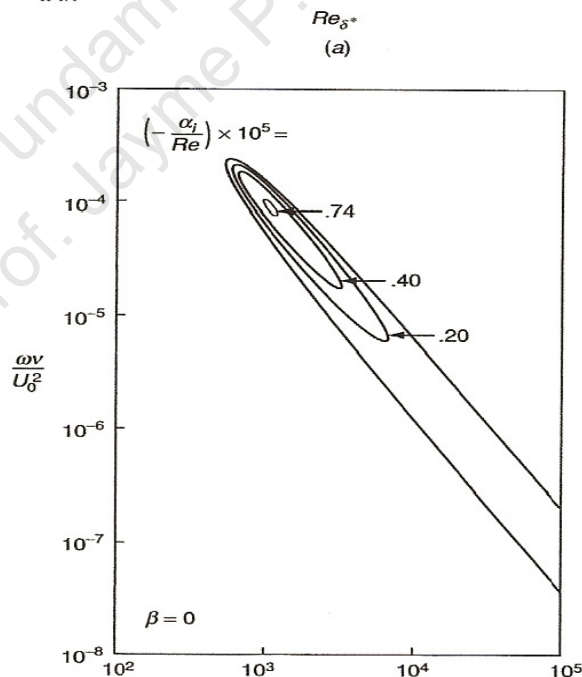


Figura 3.7. Representação esquemática de onda bidimensional se propagando na direção x , com amplificação espacial da perturbação (Fonte: WHITE 2006).

Nos trabalhos clássicos de Jaffe et al (1970) e de Wazzan et al (1968) utiliza-se o conceito de amplificação espacial para a previsão de transição para a turbulência e com aplicação específica a perfis de asa (NACA), tendo em vista estudar escoamento de baixa turbulência em velocidades de cruzeiro de aeronaves.

3.5. Comparação entre a Aplicação da Teoria da Estabilidade e a Análise Experimental

A teoria linear da estabilidade não recebeu a mesma aceitação geral como no caso do trabalho de Reynolds em 1883, fartamente comentado no capítulo 1. Nos experimentos de Burgers em 1924 e de Van Der H. Zijnen 1924 (apud WHITE, 2006) fala-se em $\text{Rex}_{tr} \approx 3,5 \times 10^5$ (para placa plana), mas não se detectaram perturbações do tipo *T-S*. Depois que a teoria da estabilidade foi proposta, Dryden em 1934 fez medidas cuidadosas com um anemômetro de ponta quente que confirmaram a existência das flutuações turbulentas, mas, novamente, não se detectaram as amplificações seletivas previstas pela teoria. O próprio Taylor em 1938 era de opinião que a teoria da estabilidade tinha pouco ou nenhuma relação com a transição da camada limite. Somente os alemães que propuseram a teoria e apresentaram dados qualitativos razoáveis, através de experimentos com métodos de visualização no túnel de água de Prandtl em 1933, em Gottingen, davam importância a esta teoria.

Os primeiros experimentadores não puderam detectar as ondas de *T-S* devido a problemas de ruídos associados à medição de turbulência em túneis da época.

Em 1940 o *U.S. National Bureau of Standard*, sob direção de Dryden construiu um novo túnel de vento com turbulência muito baixa na seção de teste $T = 0,02\%$, comparada com $T = 1,2\%$ no túnel de Burgers em 1924. Nesse túnel, no período da segunda guerra mundial foram feitas as famosas experiências de Schubauer & Skramstad (1947) (apud SCHLICHTING E GERSTEN, 2000). Esses pesquisadores, usando uma placa plana similar àquela representada na *figura 3.7*, fizeram medições com anemômetro de fio quente para determinar a transição em placa plana na presença de flutuações aleatórias na corrente livre. Os resultados extraídos de White (1980) estão mostrados na figura abaixo:

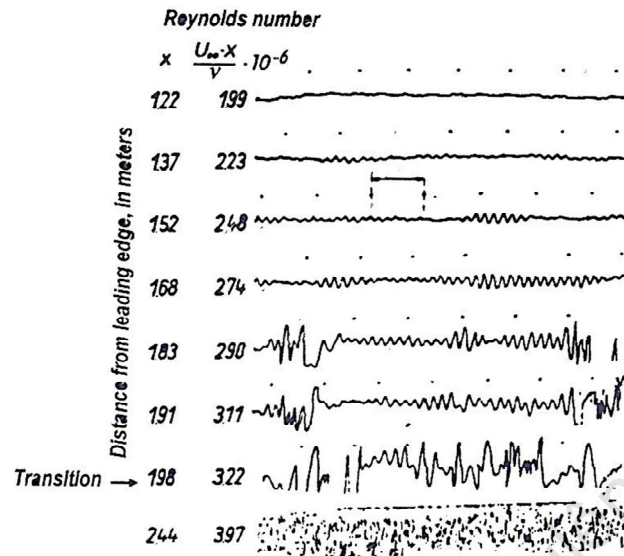


Figura 3.8. Resultados da experiência de Schubauer & Skramstad mostrando as amplificações seletivas (Fonte: WHITE, 1980).

A análise da figura 3.8 mostra que no início da placa, para $x < 7$ pés (2,1 m), as oscilações de velocidade são desprezíveis. Para $x = 8$ pés (2,4 m), amplitudes de certos componentes senoidais amplificam-se. Para $x = 10$ pés (3,0 m), inicia-se um processo não linear, e as oscilações de velocidade tornam-se mais acentuadas. Para $x = 11$ pés (3,3 m) o escoamento é plenamente turbulento e a escala do movimento, assim como suas frequências, mudam drasticamente. Frequências relevantes passam a ser encontradas em 1000 Hz, em vez de 10 Hz. Esse detalhamento de informação seria perdido se na corrente fluida fosse induzido ruído proveniente da instalação. Nos túneis de vento anteriores que eram sujeitos a ruídos na seção de teste, um processo não-linear induzia uma transição para turbulência quase que de imediato.

Para determinar o efeito de componentes senoidais específicas, Schubauer & Skramstad colocaram tiras de metal de 0,1 pol. (0,25 cm) de largura e 0,002 pol. (0,005 cm) de espessura ao longo da seção transversal de uma placa plana e a uma distância de 0,005 pol. (0,013 cm) do início da placa e fazendo-as vibrar eletromagneticamente. Dessa forma, puderam introduzir perturbações de uma certa frequência na camada limite, ou seja, para um número de Reynolds do escoamento fixado, iam aumentando lentamente a frequência de oscilação do diapásio. Primeiramente os anemômetros mostraram apenas oscilações naturais insignificantes, até que se alcançasse uma frequência, onde as componentes senoidais definidas apareciam, o que corresponde à

fronteira inferior da curva de estabilidade neutra. À medida que as frequências aumentavam, as oscilações senoidais cresciam até uma amplitude máxima e então decresciam, finalmente desaparecendo para altas frequências finitas, o que corresponde a fronteira superior da curva de estabilidade neutra. Essa análise experimental foi repetida para uma faixa de Reynolds que corresponde ao processo de aparecimento das amplificações lineares seletivas até o seu desaparecimento.

3.6. Transição Para a Turbulência

A teoria linear da estabilidade, apresentada no item anterior, prevê, portanto, a instabilidade de um escoamento laminar. Seus resultados práticos, até recentemente, se restringiam aos escoamentos de camada limite em placa plana; mais recentemente, resultados interessantes têm aparecido na literatura para escoamento livre de camada de mistura e para escoamento de jatos planos e esteiras.

No caso de escoamento livre de camadas de mistura, Betchov & Szewczuk (1963) (apud LESIEUR, 1990), propuseram uma solução numérica da equação de **O-S** considerando amplificações temporais. Nesse caso o número de onda de maior amplificação calculado por Michalke em 1964 é de $\alpha = 0,44 \delta_0^{-1} \Rightarrow \lambda = 14 \delta_0$.

No caso de jato plano laminar descarregando de uma fonte singular, a estabilidade linear do perfil de velocidade foi investigada por Drazin & Howard em 1966, com base na equação de Rayleigh.

Simulações numéricas diretas de escoamento bidimensional com amplificações temporais de camada de mistura, têm sido apresentadas na literatura mais recente, (apud LESIEUR, 1990), conforme mostrado na sequência fotográfica representada na *figura 3.9*.

A *figura* mostra claramente a evolução das instabilidades de Kelvin – Helmholtz, e a transição para a turbulência. Observa-se claramente a intrusão do fluido azul dentro da camada do fluido vermelho, podendo-se observar a evolução das maiores escalas que caracterizam o escoamento turbulento. No entanto, as simulações são para Reynolds baixos, não se caracterizando o espectro das pequenas escalas superpostas às grandes escalas.

A análise da *figura 3.9* dá uma idéia clara do processo de formação de vórtices na transição para a turbulência. Quando temos uma perturbação infinitesimal, a teoria

prevê (**O-S**) e a experimentação verifica (**S-S**) que as instabilidades iniciais ocorrem como ondas bidimensionais de **T-S** viajando na direção do escoamento. Todavia a tridimensionalidade logo aparece, a medida que as ondas de **T-S** começam a mostrar variações na direção transversal. Existe, portanto, uma forte tendência à deformação com a amplificação da distância entre vales e picos, sendo o processo de transição tipicamente não-linear.

Em seguida apresenta-se uma análise bastante breve de discussão do processo de transição para a turbulência baseado em uma abordagem não linear, longe, portanto, de querer esgotar o assunto que tem sido tratado em diversas publicações mais especializadas (CHEVRAY & MATHIEU, 1993).

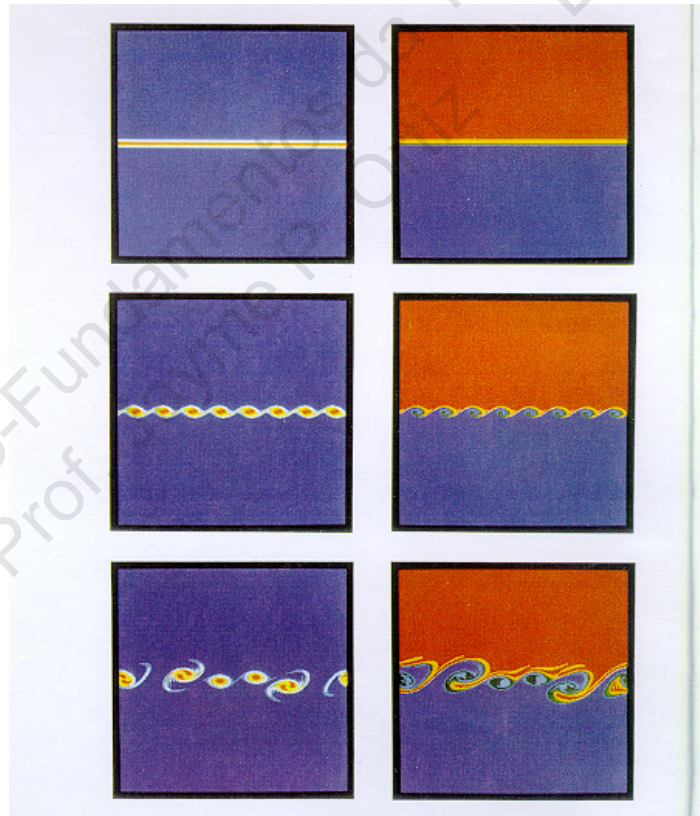


Figura 3.9 Simulação numérica direta de um escoamento bidimensional de camada de mistura com amplificação temporal: lado esquerdo – campo de vorticidade; lado direito – campo escalar. (Fonte: LESIEUR -1990).

3.7. Análise Não-Linear no Processo de Transição

Conforme visto anteriormente, a instabilidade do escoamento sujeito a pequenas perturbações, baseada em equações lineares, é o primeiro estágio na complicada sequência de eventos que levam a transição para um escoamento plenamente turbulento. Seguindo o processo de perturbações lineares, inicia-se o estágio de perturbações não-lineares na transição. A figura abaixo representa o processo de evolução de um escoamento em placa plana com ângulo de incidência zero de uma condição linear para uma condição não-linear e de tridimensionalidade.

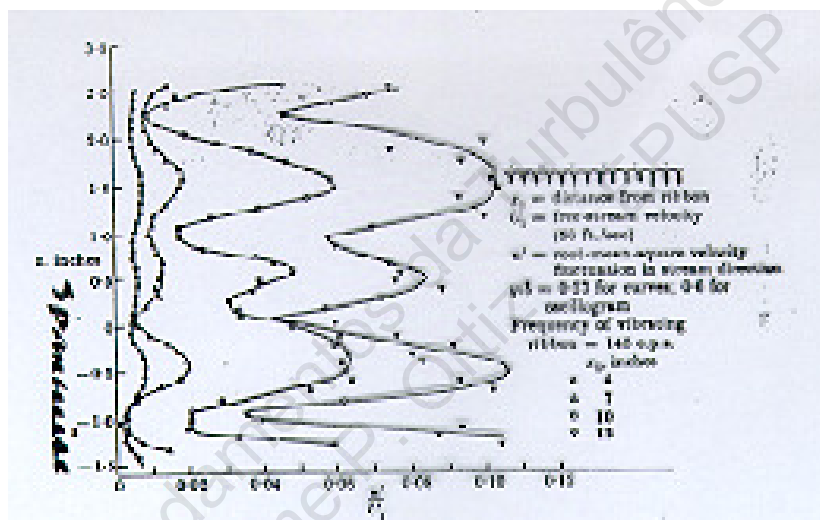


Figura 3.10. Escoamento em placa plana com ângulo de incidência zero - Amplificações não lineares levam a tridimensionalidade. (Fonte: SCHLICHTING E GERSTEN, 2000).

O processo é bastante complexo, pois mesmo que se parta de um escoamento muito simples, em torno de placa plana, o comportamento da transição vai depender da natureza e do nível preexistente de perturbações no escoamento o que vai influenciar no caminho da transição. Desse modo poderia se pensar na Teoria do Caos para prever o processo de transição para turbulência. A aplicação desta teoria surgiu como uma aplicação para sistemas dinâmicos com um pequeno número de graus de liberdade, situações muito mais simples do que no caso de escoamentos em que o meio é contínuo. A maneira pela qual, sistemas não-lineares, relativamente simples, se tornam caóticos, tem sido o tema de inúmeras publicações da atualidade. Neste ponto seria interessante a definição de “CAOS” em sistemas dinâmicos.

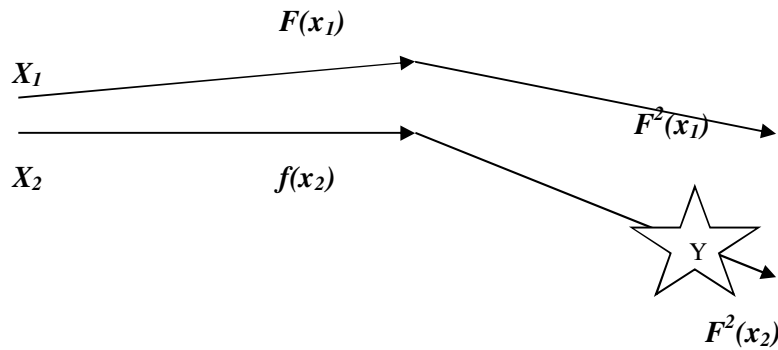


Figura 3.12. Representação esquemática de um sistema dinâmico caótico. (Fonte: PALIS, 1999)

Lorenz em 1963 em seus estudos numéricos de movimento convectivo da atmosfera resolveu um sistema de três equações de derivadas parciais não-lineares, descrevendo o problema de Rayleigh-Benard de fluido aquecido de baixo para cima em uma caixa retangular (ver Chevray e Mathieu – 1993). As equações foram as seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(r - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned} \quad (3.22)$$

Os parâmetros σ , b e r correspondem ao número de Prandtl, ao fator geométrico e ao número de Rayleigh, respectivamente. Dentre as diversas soluções obtidas pela variação destes parâmetros, Lorenz escolheu estudar a solução correspondente a $\sigma = 10$ e $b = 8/3$, com r tomando valores positivos. A solução correspondente a este sistema particular tornou-se famosa e é conhecida como atrator de Lorenz (ou efeito borboleta), representado na figura abaixo:

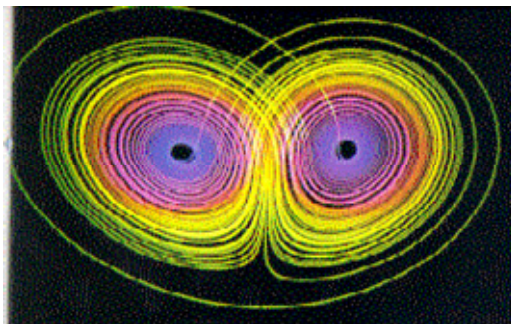


Figura 3.13. Atrator de Lorenz (Fonte: CHEVRAY E MATHIEU, 1993).

Observa-se, pela análise da *figura 3.13* que todas as trajetórias são espirais em torno de um dos dois pontos atratores durante um intervalo de tempo, e então as espirais passam a ser em torno do outro ponto, parecendo respeitar uma lógica determinística e o fato é que as duas trajetórias que estão inicialmente muito perto, separem-se exponencialmente (atrator estranho). Portanto, se o movimento de um sistema dinâmico é determinístico, no sentido matemático da palavra, mas imprevisível, no sentido experimental, este movimento é dito *caótico* e evidentemente ele é fortemente sensível às condições iniciais. Essa sensibilidade às condições iniciais do efeito borboleta foi o que motivou a conclusão de Lorenz, que trabalhava com dados meteorológicos, no sentido de que, é muito difícil a previsão do tempo com precisão para períodos muito longos, já que há uma forte influência das perturbações iniciais do sistema, no comportamento a longo prazo do mesmo. Embora o sistema seja determinístico, a longo prazo, exhibe um grau de incerteza que corresponde ao diâmetro do atrator.

De acordo com o cenário de *Feigenbaum em 1980*, o processo não linear de transição para o caos ocorre como uma sucessão de bifurcações antes que o processo caótico se estabeleça abruptamente e neste sentido *Feigenbaum* estabeleceu algumas constantes universais. Sendo assim, acima de um valor crítico (por exemplo, Número de Reynolds crítico nos escoamentos laminares em torno de placas planas) as perturbações lineares tendem a se amplificar, bifurcando-se as curvas, com soluções estáveis não-lineares. O processo de bifurcação se repete três ou quatro vezes antes do estabelecimento do regime caótico. A literatura matemática apresenta o processo de bifurcação acima descrito como bifurcação de Pitchfork.

É interessante salientar que este cenário é bem diferente daquele proposto por *Landau em 1944* que argumentava na época que o processo caótico surgia após uma sequência infinita de bifurcações que levava um espectro inicial de frequência discreto de um sinal para um espectro de frequências infinitas.

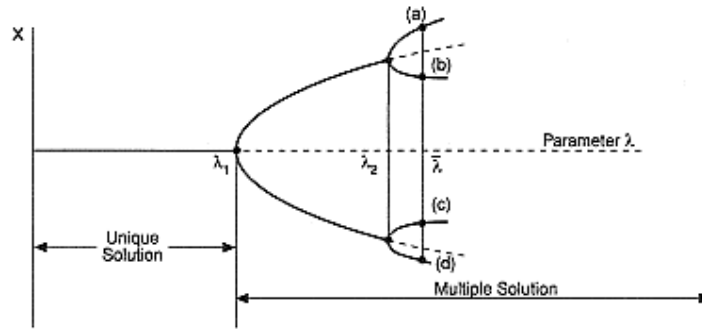


Figura 3.14. Representação gráfica da bifurcação de Pitchfork.

3.7.2. O Processo de Intermitência no Caminho para a Turbulência

As figuras 3.15 e 3.16 ilustram o processo de transição para a turbulência em escoamento em camada limite de parede, podendo-se observar a formação dos chamados *spots de turbulência*, também conhecidos por *spots de Emmons* (VAN DIKE – 1982). Nota-se que o escoamento no interior do *spot* é tipicamente turbulento e nas vizinhanças ainda é laminar, o que caracteriza um escoamento de intermitência. Nota-se ainda que a parte anterior do *spot* caminha mais rapidamente que a parte posterior, dando ao *spot* uma forma geométrica deformada, quase triangular. No caso do exemplo da figura abaixo, reproduz-se o escoamento de transição em placa plana com número de Reynolds da placa variando entre 100.000 e 400.000.

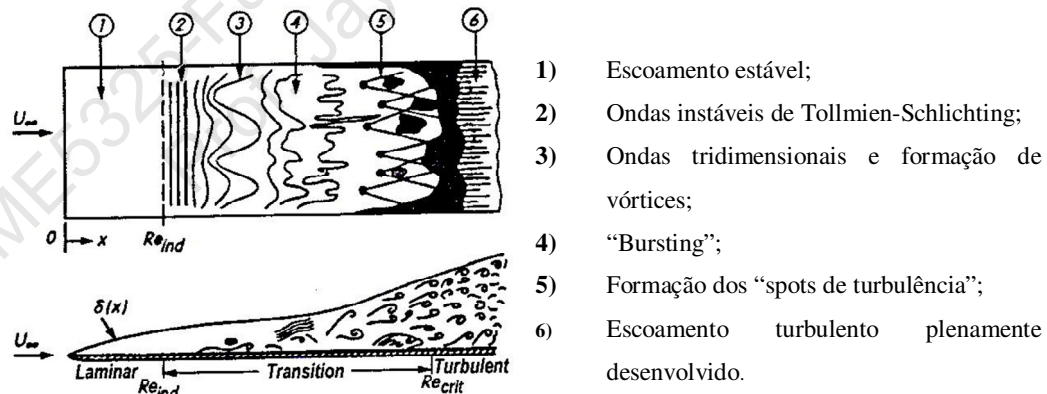
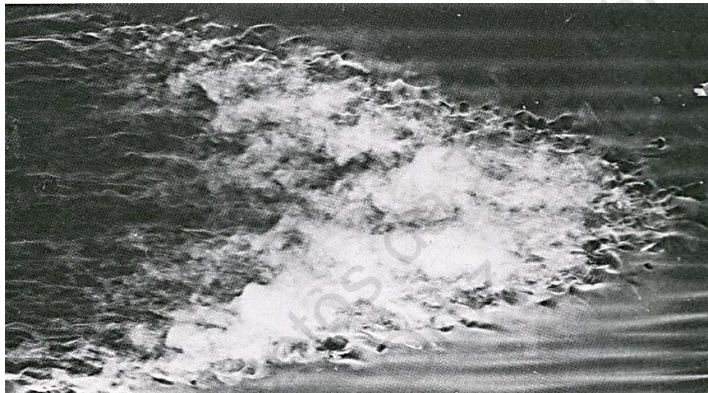


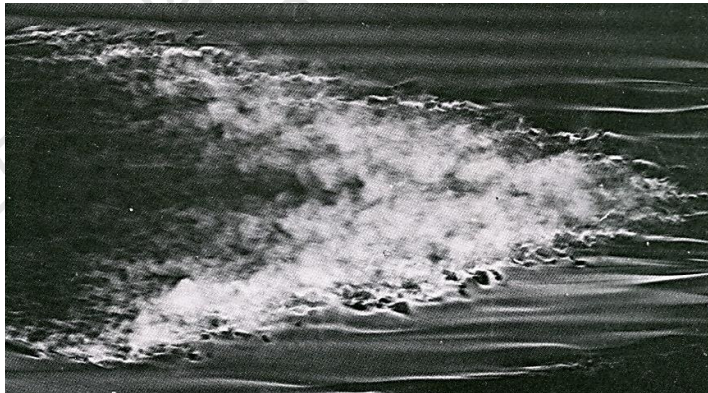
Figura 3.15. Ilustração esquemática em placa plana do processo de transição de escoamento laminar para turbulento (Fonte: VAN DIKE – 1982).



Re = 100.000



Re = 200.000



Re = 400.000

Figura 3.16. Visualização fotográfica dos spots de Emmons (Fonte: VAN DIKE – 1982).

A figura a seguir mostra um registro típico de medição de flutuações de velocidade utilizando anemômetro de fio quente em que o processo de intermitência é claramente representado através da medição da componente u de velocidade em função da distância radial da parede, notando-se a geração da turbulência de parede.

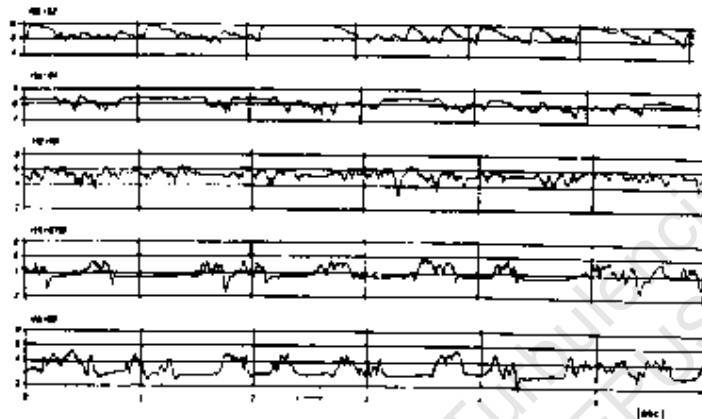


Figura 3.17. Variação de velocidade em tubulação mostrando o processo de intermitência para diferentes valores de distância radial r com relação ao eixo do conduto (medições de J. Rotta – Fonte: SCHLICHTING, 1979).

Será que caberia um processo de intermitência nos escoamentos de pequenas escalas? Talvez *Da Vinci* já procurasse responder a esse tipo de indagação, no período da Renascença, reproduzindo em suas pinturas o escoamento através de filetes, orifícios, buscando semelhanças com o processo fisiológico humano.

Sabe-se que o escoamento turbulento se caracteriza por estruturas de coerência, apesar de ser considerado aleatório. Será que nas pequenas escalas (escalas de Kolmogorov) o processo não é o mesmo? Será que uma estrutura fractal essencialmente probabilística para descrever a turbulência não poderia ser também adotada para descrever o movimento das pequenas escalas?

Segundo Frisch (1995) crescem as evidências de que existem estruturas com geometria não trivial nas pequenas escalas, da ordem de grandeza das escalas de Kolmogorov e a elas estão associados filamentos de vórtices turbulentos de diâmetros da ordem da escala dissipativa de Kolmogorov e comprimento entre a escala de Taylor e a escala integral.

A equação de Euler para fluidos ideais é reversível no tempo, mas tem pouca aplicação na natureza. Os fluidos reais, todavia, tem viscosidade e, sendo assim, a

equação de Navier-Stokes, diferentemente da equação de Euler, é irreversível no tempo. Independentemente de quão pequena seja a viscosidade do fluido, os efeitos viscosos exercem um papel fundamental no comportamento das linhas de vórtices nas pequenas escalas, o que não ocorre para fluido ideal. Através da termodinâmica introduziu-se o conceito de “flecha do tempo” associado ao processo de irreversibilidade devido, por exemplo, ao processo de dissipação de energia que ocorre nos escoamentos de fluidos reais, em particular nos escoamentos turbulentos. De acordo com a segunda lei da termodinâmica, há uma tendência nos fenômenos físicos da ordem para a desordem. Prigogine, no entanto (apud *CAPRA, 1996*), advoga que os fenômenos naturais em que se encaixam os organismos vivos, obedecem a um estado de não equilíbrio em uma dimensão e um estado de equilíbrio em outra dimensão e a ordem proveniente desse não equilíbrio é muito mais evidente, manifestando-se na riqueza, na diversidade e na beleza da vida em todo o seu redor (ver *CAPRA, 1996*).

Nesse ponto pode-se estabelecer uma analogia com a transição do escoamento laminar para turbulento passando-se por um processo caótico que conduz a um estado turbulento, que embora imprevisível e irreversível no tempo, apresenta um considerável grau de ordem na sua estrutura de escalas de escoamento. Sendo assim, a transição caracteriza-se por um movimento molecular desordenado, sob o ponto de vista microscópico que migra para um movimento mais organizado, sob o ponto de vista macroscópico e, nesse sentido, Klimontovich (1996) procura demonstrar que a reorganização na passagem de escoamento laminar para turbulento ocorre com a diminuição da entropia. Em outras palavras, no escoamento turbulento a transferência de quantidade de movimento deixa de seguir um processo individual molecular para seguir um processo coletivo, com o aumento da viscosidade turbulenta (propriedade do escoamento) que passa a substituir a viscosidade molecular (propriedade do fluido).

Essa riqueza de conexões e de estabelecimento de padrões de ordem em outra dimensão aplicada aos processos naturais e fisiológicos é o que Capra (1996) chama de “Teia da Vida”.