

Conclusão do estudo de cavidades ressonantes (Prob. 9.38)

Na aula passada vimos que a solução da equação de ondas para o campo elétrico em uma cavidade ressonante

$$\nabla^2 E_i + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 E_i = 0; \quad i = x, y, z$$

em uma cavidade cúbica de lados a, b e c , é dada por

$$E_i = X(x) Y(y) Z(z),$$

$$X(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x),$$

$$Y(y) = C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y)$$

$$Z(z) = E \sin(k_z z) + F \cos(k_z z),$$

onde

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$$

Naturalmente as constantes k_x, k_y e k_z tem que ser as mesmas para as três componentes de $\vec{E}$. Para determiná-las, basta impor a condição de contorno para as componentes tangenciais de $\vec{E}$, ou seja, em qualquer das paredes da cavidade $E_{\text{tang}} = 0$. Tomemos, por exemplo, a componente E_x ; ela será tangente às superfícies $y = \text{const}$ e $z = \text{const}$. Então

$$y=0 \Rightarrow E_x(x, 0, z) = 0 \Rightarrow X(x) D Y(z) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$y=b \Rightarrow E_x(x, b, z) = 0 \Rightarrow X(x) C \sin(k_y b) Z(z) \neq 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}; \quad n=1, 2, 3,$$

$$z=0 \Rightarrow E_x(x, y, 0) = 0 \Rightarrow C X(x) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) F = 0 \Rightarrow F = 0$$

$$z=c \Rightarrow E_x(x, y, c) = 0 \Rightarrow C E_x(x) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(k_z c) = 0$$

$$\Rightarrow k_z = \frac{l\pi}{c}; l=1, 2, 3, \dots$$

Assim, a expressão para E_x fica

$$E_x(x, y, z) = [A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)] \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{c}\right)$$

$$n=1, 2, 3, \dots; l=1, 2, 3, \dots$$

Vamos escrever esta expressão como $E_x(x, y, z) = E_x f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{c}\right)$; $f_1(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + B \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

A constante k_x não pode ser determinada a partir de E_x , porque esta componente é normal e não tangencial às superfícies $x = \text{const.}$

Mas as outras duas componentes são tangentes às superfícies $x = \text{const.}$; tomamos, por exemplo, a componente E_y

$$x=0 \Rightarrow E_y(0, y, z) = 0 \Rightarrow B \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{c}\right) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$x=a \Rightarrow E_y(a, y, z) = 0 \Rightarrow A \sin(k_x a) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{c}\right) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a};$$

$$m=1, 2, \dots$$

Podemos fazer o mesmo para $z=0$ e $z=c$, e obtemos

$$E_y(x, y, z) = E_2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) f_2(y) \sin\left(\frac{l\pi z}{c}\right); f_2(y) = C \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + D \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

e, igualmente

$$E_z(x, y, z) = E_3 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) f_3(z); f_3(z) = E \sin\left(\frac{l\pi z}{c}\right) + F \cos\left(\frac{l\pi z}{c}\right)$$

Mas, como não há carga dentro da cavidade, temos que

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \left[E_1 \frac{df_1}{dx} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{c}\right) + E_2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \frac{df_2}{dy} \sin\left(\frac{l\pi z}{c}\right) + E_3 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \frac{df_3}{dz} \right] = 0$$

$$\Rightarrow f_1(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right); f_2(y) = \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right); f_3(z) = \cos\left(\frac{l\pi z}{c}\right)$$

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right) E_1 + \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right) E_3 = 0 \Rightarrow k_x E_1 + k_y E_2 + k_z E_3 = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E} \text{ dentro}$$

da cavidade!

As frequências possíveis de serem excitadas, são dadas por

$$\omega_{mnl} = \frac{\pi c}{a} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}}$$

Se $a=b=c$, temos

$$\omega_{mnl} = \frac{\pi c}{a} \sqrt{m^2 + n^2 + l^2}$$

Alguns problemas do capítulo 9

9.20 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\beta \vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i(\alpha \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$; $\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)^2} \right]}^{1/2}$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)^2 \right]^{1/4} e^{i\phi} \hat{k} \times \vec{E} ; \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)^2} \right]}^{1/2}$$

$$\tan \phi = \frac{\beta}{\alpha}$$

Seguindo a ~~prop~~ ~~proposta~~ proposta do livro, vamos supor $\hat{k} = \hat{e}_z$, então

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-\beta z} e^{i(\alpha z - \omega t)} \hat{e}_x$$

$$\vec{B}(z, t) = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)^2 \right]^{1/4} e^{i\phi} E_0 e^{-\beta z} e^{i(\alpha z - \omega t)} \hat{e}_y$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4} (\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}^*)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{E}^* = E_0^2 e^{-2\beta z}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}^* = \frac{1}{\mu_0} \mu_0 \epsilon_0 \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)^2 \right]^{1/2} E_0^2 e^{-2\beta z}$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4} \left[\epsilon_0 \epsilon_0^2 e^{-2\beta z} + \epsilon_0 \epsilon_0^2 \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)^2 \right]^{1/2} \epsilon_0^2 e^{-2\beta z} \right]$$

$$\therefore \langle E \rangle = \frac{1}{4} \left[1 + \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)^2 \right]^{1/2} \right] \epsilon_0 \epsilon_0^2 e^{-2\beta z}$$

—————

$$= \frac{2\alpha}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0}$$

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{\alpha^2}{2\mu \omega^2} \epsilon_0^2 e^{-2\beta z}}$$

b) Calcular $\langle S \rangle_z$.

—————

9.24 Encontrar a largura da região de dispersão anômala para $\delta \ll \omega_0$.

$$Re \epsilon_r = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2 \omega^2}$$

$$\frac{\partial Re \epsilon_r}{\partial \omega} = - \frac{[2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2\delta^2 \omega] \omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2 \omega^2]^2}$$

$$- \frac{2\omega \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2 \omega^2} = 0$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) [2(\omega_0^2 - \omega^2) - \delta^2] - (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \delta^2 \omega^2 = 0$$

$$\therefore (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \delta^2 (\omega_0^2 - \omega^2 + \omega^2) = 0$$

$$\therefore (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \delta^2 \omega_0^2 \quad \therefore \omega_0^2 - \omega^2 = \delta / \omega_0 \pm \delta \omega_0$$

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{\delta}{2}$$

completar o problema com relação ao índice de refração

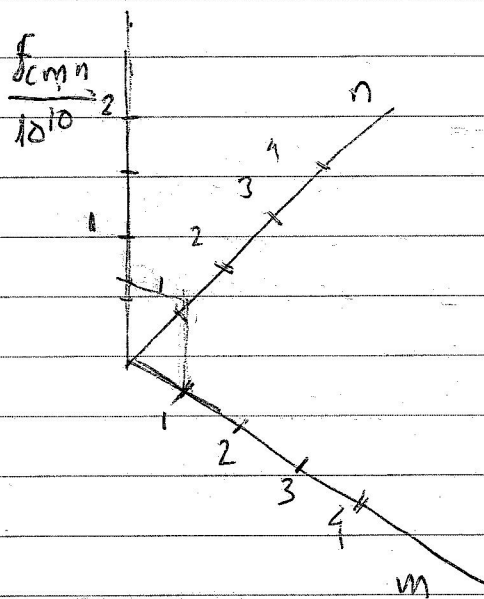
928

$$a = 2,28 \text{ cm}; b = 1,01 \text{ cm}$$

$$f = 1,70 \times 10^9 \text{ Hz}$$

$$f_{c,mn} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} = \frac{c}{2a} \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2}$$

$$\therefore f_{c,mn} = \frac{3 \times 10^{10}}{2 \times 2,28} \sqrt{m^2 + \left(\frac{2,28}{1,01}\right)^2 n^2} \approx 65 \times 10^9 \sqrt{m^2 + 5n^2}$$



(completar problema)

Problema Extra

Determinar as densidades ^{superficial} de corrente e de carga nas paredes de um guia retangular para o modo $TM_{1,1}$, tal que

$$E_z(x, y, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

A densidade superficial de carga é dada pela componente normal do vetor $\vec{D}$, ou seja,

$$D_n = \sigma \Rightarrow \epsilon_0 E_n = \sigma$$

Já a densidade ~~de~~ superficial de corrente é dada pela componente tangencial de $\vec{H}$, ou seja,

$$H_t = K_s$$

Para calcular essas componentes, utilizamos as relações entre $\vec{E}$ e $\vec{H}$ decorrentes da terceira e quarta equações de Maxwell, como vimos para o modo TE:

$$\nabla \times \vec{E} = i\mu_0 \omega \vec{H} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} = ikE_y + i\mu_0 \omega H_x; -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -ikE_x + i\mu_0 \omega H_y$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\epsilon_0 \omega \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y} = ikH_y - i\epsilon_0 \omega E_x; -\frac{\partial H_z}{\partial x} = -ikH_x - i\epsilon_0 \omega E_y$$

Como, no modo TM, $H_z = 0$, temos, destas duas últimas equações, que

~~$$E_x = \frac{\mu_0 \omega}{k} H_y; E_y = -\frac{\mu_0 \omega}{k} H_x$$~~

$$E_x = \frac{k}{\omega \epsilon_0} H_y; E_y = -\frac{k}{\omega \epsilon_0} H_x$$

Substituindo estes dois resultados nas outras duas equações, temos

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -ik \frac{k}{\omega \epsilon_0} H_x + i\mu_0 \omega H_x = -\frac{i}{\omega \epsilon_0} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right] H_x \quad (c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0})$$

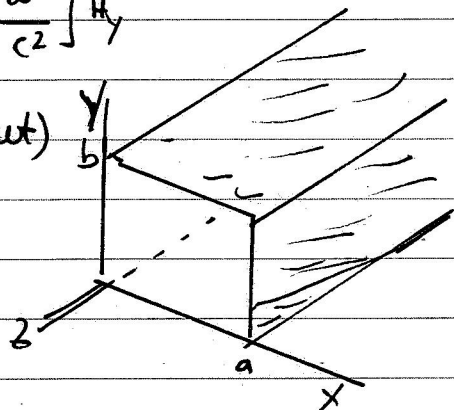
$$\therefore H_x = \frac{i \omega \epsilon_0}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} E_0 \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\therefore H_x = -i \frac{\pi \omega \epsilon_0}{b \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)}$$

Da mesma forma, da segunda equação, temos

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -ik \frac{k}{\omega \epsilon_0} H_y + i\mu_0 \omega H_y = -\frac{i}{\omega \epsilon_0} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right] H_y$$

$$\therefore H_y = i \frac{\pi \omega \epsilon_0}{a \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)} E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)}$$



A componente H_x é tangente às faces $y=0$ e $y=b$ do guia; então:

$$y=0 \Rightarrow K_s = H_x(y=0) \therefore K_s = -i \frac{\pi \omega \epsilon_0}{b \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\text{Já, na superfície } y=b, \quad K_s = i \frac{\pi \omega \epsilon_0}{b \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(kz - \omega t)}$$

[Qual o sentido de fluxo de K_s ?]

Complete o problema encontrando a expressão para K_s nas faces $x=0$ e $x=a$ e a densidade de carga superficial σ em todas as faces.