3ª Experiência: Energia cinética na rotação

4320254 - Laboratório de Mecânica - 1º Semestre/2015

1.Introdução

Nesta experiência, é estudada a *transferência de energia mecânica* de uma massa m para um rotor com momento de inércia I. O arranjo experimental é mostrado na figura. A massa m é ligada ao rotor por meio de um fio de massa desprezível, enrolado no eixo do rotor. Ao cair de uma altura h, a massa m adquire velocidade v e o rotor adquire velocidade angular ω.

A energia potencial mgh é convertida em energia cinética da massa m ($\frac{1}{2}mv^2$), em energia cinética de rotação do rotor ($\frac{1}{2} I\,\omega^2$) e ainda em outras formas de energia. Assim, resulta

$$mgh = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2 + S \qquad (1)$$

onde S é a energia que não é mantida como energia mecânica do sistema massa-rotor. Isto é, a energia convertida em outras formas de energia tais como energia térmica devida ao atrito nos encostos do rotor, ao atrito com ar, energia de vibração de suportes, energia da onda sonora e outras.

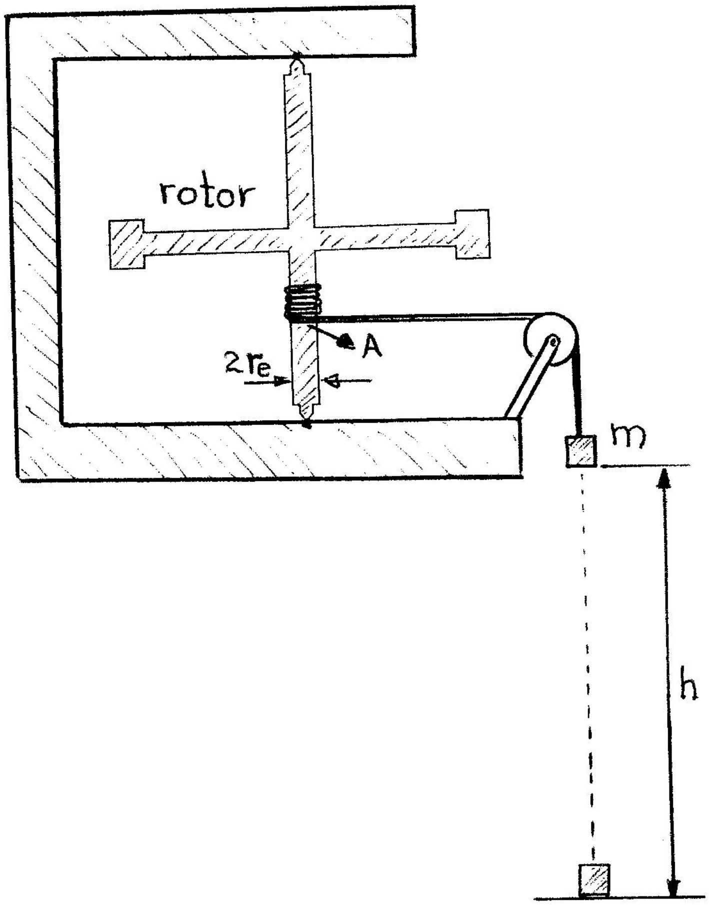

Figura 1. Arranjo experimental

A velocidade angular ω é diretamente relacionada com a velocidade v do fio, que por sua vez, é igual à velocidade da massa m. Considerando o fio no ponto A, o raio efetivo de rotação é

$$r = r_e + r_f$$ onde r_e é o raio do eixo e r_f é o raio do fio.

A velocidade do fio é dada por
$$v = \omega r \qquad (2)$$

A energia S é muito difícil de ser medida *diretamente*. Pode-se admitir que esta energia "dissipada" se deva a *forças não conservativas*, tais como forças de atrito. Indicando por τ o *torque* devido a essas forças, a energia ΔS dissipada num giro de um ângulo $\Delta\theta$ do rotor é

$$\Delta S = \tau\,\Delta\theta \qquad (\text{ângulo } \Delta\theta \text{ em radianos}) \qquad (3)$$

Na experiência será admitido como modelo que o torque τ seja constante. O ângulo total de giro na queda da massa m é $\theta_q = h/r$. A energia dissipada S durante a queda é dada por

$$S = \tau\,\theta_q = \frac{h}{r}\tau \qquad (4)$$

Experimentalmente, a velocidade v pode ser determinada a partir da velocidade média v_m de queda da massa m que é obtida diretamente: $v_m = h/t$, onde t é o tempo de queda. Para forças constantes, pode ser mostrado que:

$$v = 2\,v_m \qquad \text{e assim} \qquad v = \frac{2\,h}{t} \tag{5}$$

Substituindo as Equações 2, 4 e 5 na Eq. 1 e rearranjando os termos, obtém-se

$$t^2 = a\,h \qquad \text{onde} \qquad a = \frac{2\,(\,m + \frac{I}{r^2}\,)}{(\,mg - \frac{\tau}{r}\,)} \tag{6}$$

Esta equação mostra que $y \equiv t^2$ em função de $x \equiv h$ é uma reta passando pela origem com coeficiente angular que depende de I e τ.

Em princípio, I e τ podem ser obtidos a partir de *duas ou mais* determinações do coeficiente angular a (Eq. 6), mas para massas m diferentes. Na prática, a força de atrito τ/r é muito pequena ($\tau/r << mg$) e a precisão das medições não é suficiente para determinar o torque τ pela Eq. 6. Por isso, esse procedimento, além de trabalhoso é quase inútil, de modo que o torque τ será determinado por um método independente, exposto a seguir.

A energia dissipada S na queda da massa m também pode ser escrita como

$$S = \tau\,\theta_q = 2\pi\,n_q\,\tau \tag{7}$$

onde n_q é o número de voltas do rotor durante a queda da massa m, que pode ser medido diretamente (ou obtido de $2\pi\,n_q = h/r$).

No final da queda da massa m o rotor terá uma energia cinética de rotação U_0 e, a seguir, vai realizar N rotações até parar. Assim,

$$U_0 = \tau\,\theta_o = 2\pi\,N\,\tau \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 = 2\pi\,N\,\tau \tag{8}$$

Substituindo Equações 7 e 8 na Equação 1 e resolvendo para τ, obtém-se

$$\tau = \frac{m}{2\,\pi\,N_t}\,(\,g\,h - \frac{2\,h^2}{t^2}\,) \qquad \text{onde } N_t = (n_q + N) \text{ é o n}\underline{\text{o}}\text{ total de rotações do rotor} \tag{9}$$

Assim, o torque τ pode ser obtido a partir do valor de referência $g = 9,7864\,m/s^2$ e de quantidades medidas. Uma vez que τ seja conhecido, o momento de inércia I pode ser determinado a partir do coeficiente angular da Equação 6.

Observações:

- Nesta experiência deve ser usado o mesmo rotor utilizado na Experiência 2.
- As Equações 8 e 9 mostram que o momento de inércia I poderia ser determinado a partir destas equações. Entretanto, nesta experiência, o momento de inércia será determinado pela Equação 6.
- O relatório desta experiência é do tipo completo, com Introdução teórica (com demonstrações das equações usadas), Descrição experimental do arrranjo e procedimentos, Resultados das medições, Análise de dados e Conclusões (principalmente comparações entre os valores obtidos para I).

2. Procedimento experimental e análise de dados

O arranjo experimental tem um sistema de contagem do número de voltas do rotor. Entretanto, o sistema só conta número inteiro de voltas e o sistema pode falhar se o rotor estiver excessivamente lento. Pode-se considerar $\sigma_N = \sigma_{nq} \approx 1$, como estimativa.

2.1. Medições preliminares e dados iniciais

• Anotar dados sobre o rotor, diâmetro do eixo $2r_e$, diâmetro do fio $2r_f$ e raio efetivo r. Na medição de $2r_f$, deve-se evitar "esmagar" o fio com o micrômetro ou paquímetro.

2.2. Determinação de τ

• Ajustar os apoios do rotor de forma que o movimento de rotação seja o mais suave possível (sem trancos, vibrações e com o mínimo de atrito).

• Enrolar o fio no rotor e deixar a massa m cair da maior altura h possível ($\sim 80\,cm$), cronometrando o tempo t de queda. Anotar o número rotações n_q até a massa m atingir o piso e o número total de rotações N_t até a parada do rotor.

Obs.: É importante que o fio seja enrolado no eixo numa única camada e que o fio ainda esteja ligado ao eixo de rotação quando a massa atingir o piso.

• Repetir a medição anterior mais 5 vezes apenas para a cronometragem do tempo de queda. Isso permite fazer uma estimativa do desvio padrão para o tempo t e obter a incerteza padrão em $\bar{t}$.

• Calcular τ (Eq. 9) e respectiva incerteza.

2.3. Medições de t em função de h

• Medir os tempos de queda da massa m para diferentes alturas h (cerca de 10 alturas diferentes, por exemplo, variando a altura de 7 em 7 cm). É importante que o fio ainda esteja firmemente ligada ao rotor, no instante em que a massa chega ao piso.

• Montar tabela resumindo valores de $x \equiv h$, t, $y \equiv t^2$ e σ_y.

• Usando a notação $x \equiv h$ e $y \equiv t^2$, ajustar uma reta $y = a\,x + b$ aos pontos experimentais (conforme ítens 11.6 da Apostila de erros), ignorando a incerteza[1] em $x \equiv h$. Isto é, devem ser obtidos os melhores valores para a e b e respectivas incertezas.

• Fazer gráfico dos pontos experimentais $y \times x$ e reta ajustada.

• Calcular I e respectiva incerteza, a partir de a (Eq. 6) e do resultado anterior para τ, ignorando as incertezas em r e τ.

3. Discussão de resultados e conclusões

Entre outras coisas, este ítem final deve conter:

• Comparação entre os 2 valores obtidos para I (no ítem 2.3 e na Experiência 2).

• Comparação entre a força de atrito τ/r com $m\,g$, para verificar se a hipótese de atrito pequeno é justificada.

• Comparação entre o valor do coeficiente b com 0, que é o valor esperado teoricamente.

---

[1] Isto se justifica porque a incerteza relativa em h é, no geral, razoavelmente menor que a incerteza relativa em t^2 e também para simplificar um pouco o problema. A rigor, deveria ser seguido o procedimento descrito no ítem 11.3 da Apostila de erros, que consiste em transferir para y a incerteza em x.

Folha de dados - Experiência 3

Equipe : .... Turma :...............
.... Data : ....
.... Rotor No : ....

Medições preliminares e dados iniciais

No do rotor : .... $I_{Exp2} = (\qquad \pm \qquad)\, kg\, m^2$ $m = (\qquad \pm \qquad)\, g$

$2\, r_e = (\qquad \pm \qquad)\, mm$ $2\, r_f = (\qquad \pm \qquad)\, mm$ $r = (\qquad \pm \qquad)\, mm$

Medições para determinação de τ

$h = (\qquad \pm \qquad)\, cm$ $n_q = (\qquad \pm \qquad)$ $N_t = (\qquad \pm \qquad)$

$t\,(s)$						

$\bar{t} =$ $\sigma =$ $\sigma_{\bar{t}} =$

Medições de $t \times h$

$h\,(cm)$										
$t\,(s)$										

$\sigma_h =$ $\sigma_t = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} =$

Observações :

- Como estimativa para a incerteza estatística σ_A no tempo, pode-se considerar o **desvio padrão das medidas** σ obtido nas medições anteriores (ítem 2.2). Uma estimativa razoável para a incerteza sistemática residual é $\sigma_B \approx 0,05\, s$.
- Uma estimativa razoável para o limite de erro em h nas condições da experiência é $L \approx 2\, mm$ resultando $\sigma_h = L/3 = 0,7\, mm$.