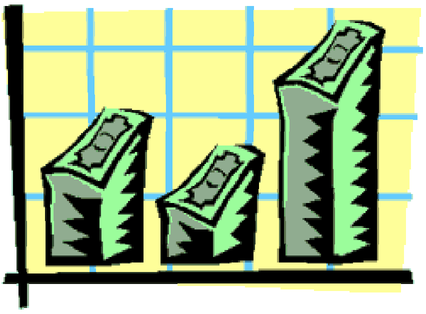
COMO DETERMINAR O PREÇO DE UMA OPÇÃO - PARTE II



- **Modelo Cox-Ross Rubinstein**
- **Árvore recombinante de 3 passos**

Autores: Francisco Cavalcante(f_c_a@uol.com.br)

- Administrador de Empresas graduado pela EAESP/FGV.
- É Sócio-Diretor da Cavalcante & Associados, empresa especializada na elaboração de sistemas financeiros nas áreas de projeções financeiras, preços, fluxo de caixa e avaliação de projetos. A Cavalcante & Associados também elabora projetos de capitalização de empresas, assessora na obtenção de recursos estáveis e compra e venda de participações acionárias.
- O consultor Francisco Cavalcante já desenvolveu mais de 100 projetos de consultoria, principalmente nas áreas de planejamento financeiro, formação do preço de venda, avaliação de empresas e consultoria financeira em geral.

Paulo Dragaud Zeppelini(f_c_a@uol.com.br)

- Administrador de Empresas com MBA em finanças pelo Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais - IBMEC.
- Executivo financeiro com carreira desenvolvida em instituições financeiras do segmento de mercado de capitais. Atualmente é consultor da Cavalcante & Associados, empresa especializada na elaboração de sistemas financeiros nas áreas de projeções financeiras, preços, fluxo de caixa e avaliaçºao de projetos.

Cristiane Ribeiro Perini(f_c_a@uol.com.br)

- Estudante de Administração de Empresas da FGV – Fundação Getúlio Vargas.

ÍNDICE

O MODELO COX-ROSS RUBINSTEIN

Os cálculos apresentados no **Up-To-Date® 141** são muito úteis quando se possui as perspectivas de preços futuros para o ativo negociado e quando a árvore é composta por apenas 1 passo. Entretanto, em virtude da complexidade que as opções representam no mundo real, nem sempre o modelo intuitivo pode ser utilizado. Por essa razão, foi desenvolvido um modelo genérico, capaz de chegar a resultados precisos para qualquer número de passos e para qualquer variação no preço das ações. Iremos, a seguir, apresentá-lo utilizando a mesma situação acima descrita. Com isso, provaremos que esse modelo é realmente útil e funcional.

Considere novamente uma ação cujo preço hoje, determinado por S seja de \$20. Caso ocorra alta, seu preço será alterado para Su e caso ocorra baixa, ele será dado por Sd. Para chegarmos aos valores de Su e Sd, deveremos, primeiramente, determinar que:

$Sd = S \text{ X } d$

$Su = S \text{ X } u$

Nessas duas pequenas equações, temos que os valores da ação na alta ou na baixa são determinados por um fator (u ou d) que deverá ser multiplicado pelo preço da ação hoje. U representa o fator de alta e d representa o fator de baixa.

Consideremos os seguintes valores:

$U = 1{,}1$ e $d = 0{,}9$

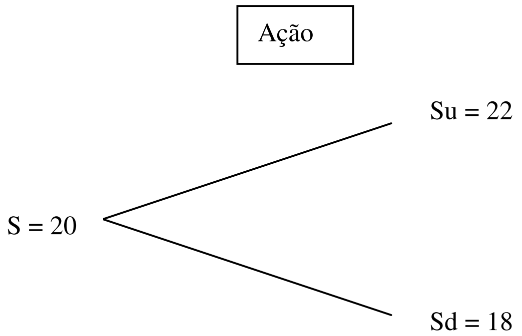
Assim sendo, temos que:

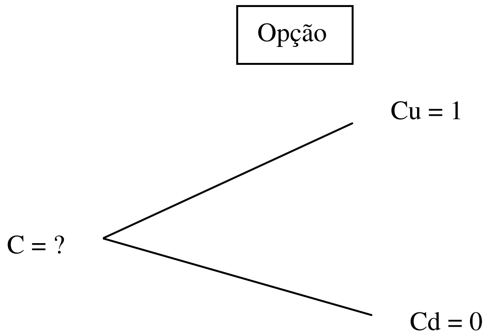
$Su = 20 \times 1{,}1 = 22$

$Sd = 20 \times 0{,}9 = 18$

Esses são, então, os valores da ação na alta e na baixa, como já havíamos observado no cálculo intuitivo. Os valores de u e d são determinados pela volatilidade da ação. Posteriormente, aprenderemos como calculá-los.

De posse desses valores, teremos os mesmos cenários anteriormente apresentados:





O Modelo Cox-Ross Rubinstein lida com as probabilidades de alta ou baixa. Ele determina que a probabilidade da ação subir é dada por:

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Como conseqüência, a probabilidade da ação cair é dada por 1-p. Não iremos, entretanto, mostrar os procedimentos utilizados para chegar a essa fórmula pois esses envolvem uma seqüência muito longa. Já que o objetivo deste texto é o de ensinar ao leitor como utilizar o modelo, iremos apenas continuar a resolução do exercício acima introduzido.

Para que calculamos essas probabilidades? Para podermos calcular o valor presente da opção diretamente, sem precisar calcular o valor presente da carteira como um todo.

Já possuímos os valores esperados para a opção no futuro, na situação de alta e queda das ações.

É importantíssimo que nos recordemos nesse momento de um conceito estatístico muito utilizado. Ele determina que o valor esperado de determinado evento é determinado pela soma de seus valores esperados ponderados pela probabilidade de ocorrerem. Veja:

$$E(x) = \sum p_i \, x_i$$

Assim sendo, o valor esperado da ação no futuro é determinado pela soma dos valores esperados encontrados de 0 e 1 ponderados pela probabilidade de ocorrerem. Uma vez que estamos tratando de um derivativo (cujo valor deriva de outro ativo), o que ocorrer com a ação ocorrerá também com a opção. Daí, tem-se que a probabilidade da opção valer 1 daqui a três meses é a mesma da ação subir para $22. Analogamente, a probalidade da opção valer 0 daqui a três meses é a mesma da ação cair para $18.

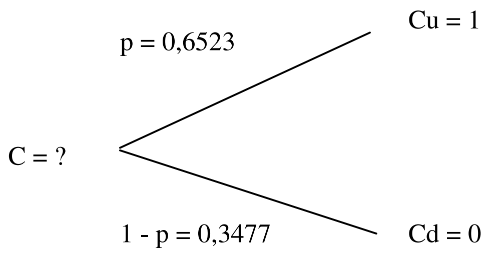
Vamos aos cálculos.

A probabilidade de alta no preço da ação será determinada utilizando-se os valores para u e d que já havíamos apresentado. Esses valores, recordando, são de u = 1,1 e d = 0,9. Serão necessários, também, os seguintes valores: r = 12% ao ano e T = 3 meses ou 0,25 ano. Por conseqüência, a probabilidade da ação subir daqui a três meses é dada por:

$$p = \frac{e^{0,12 \text{ X } 0,25} - 0,9}{1,1 - 0,9} = 0,6523$$

Se a probabilidade da ação subir é de 0,6523, a probabilidade dela cair é de 1 – 0,6523 = 0,3477.

Vamos ver o que acontecerá, então, com a árvore recombinante da opção:



A probabilidade da opção valer $1 daqui a três meses é de 65,23% enquanto que a probabilidade dela valer 0 é de 34,77%.

De acordo com o que havíamos mostrado a respeito do valor esperado, podemos dizer que, no momento T = 3, ou seja, <u>daqui a três meses</u>, o valor esperado de C será:

C(E) = (Cu X p) + (Cd X 1-p)

Substituindo os valores temos que:

C(E) = (1 X 0,6523) + (0 x 0,3477) = 0,6523

O último passo é trazermos o valor esperado de C para a data de hoje, ou seja, para seu Valor Presente (VP). Isso será feito da mesma forma que foi feito anteriormente: através da capitalização contínua.

Portanto, temos que:

$$VF = VP\ e^{rT}$$

Substituindo os valores, chegamos à seguinte resposta:

$$0{,}6523 = VP\ e^{0{,}12 \times 0{,}25}$$

O VP encontrado para C é, então, C = 0,633, que é exatamente o mesmo valor encontrado anteriormente para C através da carteira livre de risco.

ÁRVORE RECOMBINANTE DE 3 PASSOS

Iremos agora aumentar o número de etapas da árvore recombinante, de modo a aprofundar um pouco mais o assunto. Iremos também, nesta última etapa, introduzir as fórmulas para o cálculo de u e d.

Considere uma opção de compra com preço de exercício igual a $49 com vencimento em três meses. Considere também uma ação que vale hoje $50 e uma taxa de juros livre de risco de 6% ao ano (capitalizada continuamente).

Em primeiro lugar, devemos mostrar as possíveis evoluções da ação para os próximos três meses. Isso será feito projetando seu valor atual, sempre considerando as possibilidades de alta e de queda.

De acordo com o Modelo Cox-Ross Rubistein, essas projeções dependem da volatilidade da ação, ou seja, como ela altera seu preço ao longo do tempo. Quanto menos volátil a ação, menos arriscada. Quanto mais volátil, mais arriscada.

Vamos considerar que a volatilidade da ação em questão seja de 30% ao ano.

Devemos, então, descobrir de quanto será sua alteração ao longo de três meses tendo em vista tal volatilidade.

Como já havíamos abordado, u representa um fator que indica em quanto o preço da ação irá aumentar . Ao mesmo tempo, d indica em quanto ele irá cair.

Como esses dois fatores dependem da volatilidade da ação, Cox-Ross Rubistein os definem como:

$$u = e^{\varphi\sqrt{T}}$$

$$d = e^{-\varphi\sqrt{T}}$$

Nessas equações, φ representa a volatilidade da ação e T representa o período de tempo para o qual se deseja determinar sua variação.

Como iremos, posteriormente, construir a árvore binomial baseada em meses, vamos calcular os fatores u e d mensais. Para isso, basta utilizarmos T = 1/12, ou seja, T equivalente a 1 mês, ajustado para um ano, já que a volatilidade é definida para 1 ano.

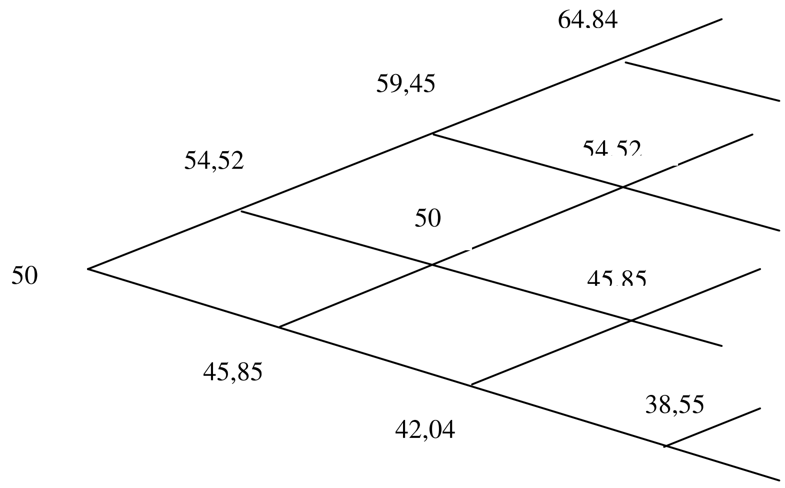
É importante que sempre estejamos atentos para prazos pois eles devem estar sempre na mesma base para que os cálculos sejam feitos corretamente.

Desse modo, temos que:

$$u = e^{0,3\sqrt{1/12}} = e^{0,0866} = 1,0905$$

$$d = e^{-0,3\sqrt{1/12}} = e^{-0,0866} = 0,917$$

Para encontrarmos os preços da ação no futuro, basta multiplicarmos o preço atual por cada um desses fatores acima calculados. Por exemplo, ao final do primeiro mês, temos que o preço da ação pode subir para Su = 54,525 ou cair para Sd = 45,85. Esses valores foram encontrados apenas multiplicando-se o preço da ação à vista, que é de $50 por u e d, respectivamente. Cada um dos valores encontrados devem então ser multiplicados novamente por u e d assim sucessivamente até o terceiro mês. Veja como construímos a árvore binomial para essa ação:



Assim sendo, os valores encontrados nos dois primeiros nós da árvore representam os possíveis preços da ação ao final do primeiro período, considerados para a possibilidade de alta ou queda. Caminhando um pouco mais à direita, encontramos mais três nós que indicam os possíveis preços da ação ao final do segundo período. Note que o valor do meio é exatamente igual ao preço inicial da ação. Isso porque ele foi encontrado multiplicando-se o preço inicial da ação por u e, em seguida, por d e vice-versa, fazendo com que ele retorne ao seu valor inicial.

Devemos agora focar nossa atenção na terceira coluna de nós. Ela representa os possíveis preços ao final do terceiro mês. É neste momento que a opção poderá ser exercida ou não. Vamos, então, avaliar o que irá ocorrer:

Lembrando que o preço de exercício da opção é de $49 e considerando que trata-se de uma opção do tipo européia (que só pode ser exercida no vencimento), ela será ou não exercida?

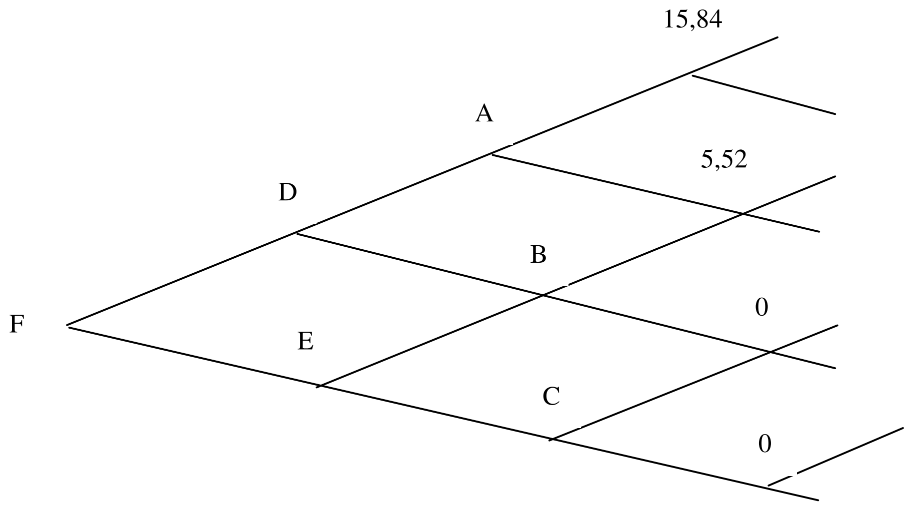
Vamos observar a terceira coluna de nós da árvore acima. O primeiro possível valor para a ação é de $64,84. Como a opção é de compra, tem-se o direito de comprar a ação por $49. Uma vez que seu preço de mercado é $64,84, o titular provavelmente irá exercer seu direito, comprando algo que vale $64,84 por apenas $49. Nesse caso, ele aufere um “lucro” de $15,84. Esse é o valor da opção ao final do terceiro mês.

O próximo valor da ação é de $54,52. Temos, então, uma situação bem próxima da anterior. Como o titular possui o direito de comprar por $49 algo que vale $54,52, ele provavelmente também irá exercer esse direito. O “lucro” auferido neste caso é de $5,52.

Considere agora o terceiro valor, de $45,85. Agora, o titular tem o direito de comprar por $49 algo que vale somente $45,85. Ele provavelmente não irá exercer esse direito, pois não quer perder dinheiro. Seu “lucro”, neste caso, é igual a $0.

O último possível valor para a ação ao final do terceiro mês é de $38,55. Mais uma vez, o titular não irá exercer seu direito, pois não irá optar por pagar $49 num ativo que vale $38,55. Seu lucro, mais uma vez, é igual a $0.

Veja como iniciamos a construção da árvore recombinante para a opção:



Agora que já possuímos os possíveis valores futuros para a opção (ao final do terceiro mês), iremos trazê-los ao valor presente. Para isso, utilizaremos o mesmo procedimento feito anteriormente, ou seja, iremos calcular os valores esperados para cada par de valores e, em seguida, traze-los ao valor presente.

Primeiramente, entretanto, devemos calcular qual a probabilidade de alta e queda das ações. A fórmula da probalidade é a mesma já definida anteriormente:

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Substituindo os valores, temos que:

$$p = \frac{e^{0,06 \text{ X } 1/12} - 0,917}{1,0905 - 0,917} = \mathbf{0,5072}$$

Consequentemente, 1 – p será igual a **0,4928.**

Veja, agora, como serão construídos os nós indicados por A, B e C na figura anterior:

- ✓ **A:** será calculado através do valor esperado dos valores \$15,84 e \$5,52. Recordando que na fórmula do valor esperado, devemos ponderar os dois valores pela probabilidade de ocorrerem, temos então que: E (x) = 15,84 x 0,5072 + 5,52 x 0,4928 = 10,752.

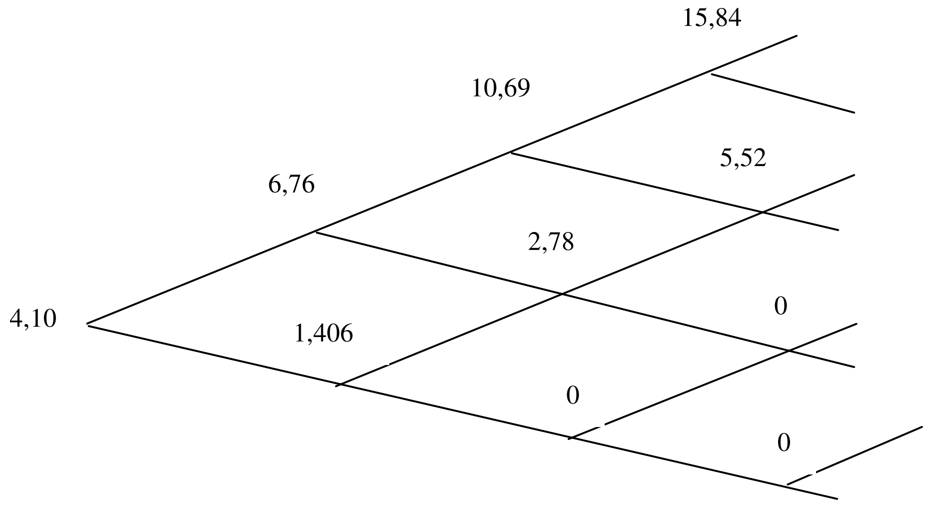
  O próximo e último passo será trazer ao valor presente (de um ano atrás somente) esse valor encontrado e assim chegarmos ao nó anterior. Através da capitalização contínua e considerando a mesma taxa de retorno de 6%, ele será de: $VF = VP\ e^{rT} = 10{,}752 = VP\ e^{0{,}06 \times 1/12} = 10{,}698$. Esse é o valor do ponto A.

- ✓ **B:** os procedimentos serão os mesmos agora utilizando os valores de \$5,52 e \$0. O valor esperado desses dois valores será: E(x) = 5,52 X 0,5072 + 0 X 0,4928 = 2,7997. Esse valor trazido ao valor presente será de: $VF = VP\ e^{0{,}06 \times 1/12} = 2{,}7997 = VP\ e^{0{,}005} = VP = 2{,}7858$. Esse é o valor do ponto B.

- ✓ **C:** os procedimentos serão os mesmos utilizando agora os valores de \$0 e \$0. Assim sendo, o valor esperado será \$0 e, consequentemente, o valor presente também. Portanto, o valor do ponto C é \$0.

Os valores encontrados para A, B e C serão os novos valores utilizados para se calcular os pontos D e E. Em seguida, os valores encontrados para D e E serão utilizados para, finalmente, encontrar o ponto F que é o valor da opção hoje!

Veja como será o formato final da árvore para a opção:



Chegamos, então, a um preço para a opção de $4,10.

CONCLUSÃO

O objetivo deste texto não foi o de esgotar o assunto mais sim de mostrar como ferramentas como o Modelo Cox-Ross Rubistein podem facilitar o dia a dia das operações e contribuir para a evolução do mercado financeiro.

Além disso, é importante mostrarmos também como esse tipo de operação contribui para a eficiência da economia em geral, uma vez que cria mecanismos capazes de proteger os investidores das variações do mercado.

Isso faz com que as opções sejam vistas como importantes instrumentos na administração do risco pois são capazes de proteger ativos de eventuais alterações futuras.

Entretanto, devemos lembrar que o Modelo Cox-Ross Rubinstein apresentado constitui apenas uma das maneiras possíveis de se determinar o preço de uma opção. Como já havíamos citado, existem inúmeros métodos, cada qual apresentando pequenas diferenças em relação a este aqui apresentado.