AULA 20/06

A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL DEFINIDA

Toda integral definida possui um valor definido. Esse valor da *Integral Definida* pode ser interpretado geometricamente como uma área sob uma dada curva.

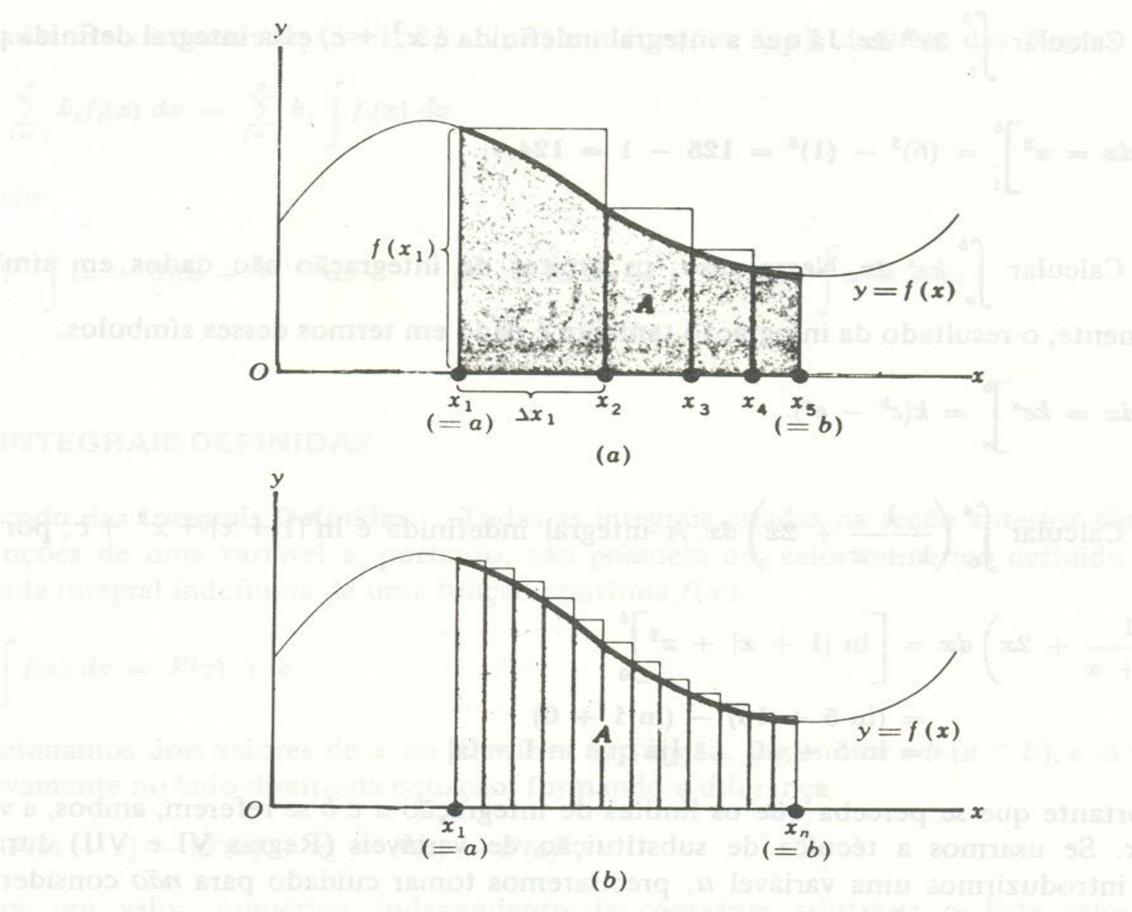

Figura 13.1

Na Figura 13.1 a (livro: Alpha Chiang, pg 386), temos a representação gráfica de uma função contínua *y=f(x).* Se queremos mediar a área sombreada A, delimitada pela curva, pelo eixo x e pelos dois pontos a e b do domínio, podemos fazê-lo da seguinte maneira: primeiro dividimos o intervalo [a,b] em *n* subintervalos. Cada um desses subintervalos representa uma mudança em x, podemos escreve-los como Δx_1, ..., Δx_4. Depois, nos subintervalos construímos quatro blocos retangulares tais que a altura de cada um seja igual ao valor mais alto alcançado pela função, o que ocorre no limite esquerdo de cada retângulo. O primeiro bloco possui altura $f(x_1)$ e largura Δx_1, e o i-ésimo bloco altura $f(x_i)$ e largura Δx_i.

$$A^* = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Observe na figura 13.1a que esta não é exatamente a área que buscamos, mas uma aproximação da mesma. O que faz A* se desviar do verdadeiro A são as porções não sombreadas dos blocos retangulares, estes fazem com que A* seja uma superestimação de A.

Mas, se dividirmos o intervalo [a,b] em segmentos cada vez menores, aumentando *n* e reduzindo indefinidamente Δx_i, conforme Figura 13.1b, então os blocos se tornarão cada vez mais finos e numerosos e as saliências além da curva diminuirão de tamanho. Tomando o limite dessa soma quando $n \to \infty$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} A^* = A$$

Podemos escrever $f(x_i)\,\Delta x_i$ como $f(x)dx$ e, como $\sum_{i=1}^{n}$ representa a soma de um número infinito de termos, quando $n \to \infty$, a notação $\sum_{i=1}^{n}$ não é mais adequada e deve ser substituída por $\int_a^b$, onde o símbolo S alongado indica novamente uma soma e a e b indicam os limites inferior e superior dessa soma. Assim, podemos verificar que a Integral definida representa um modo abreviado de escrever a expressão de limite do somatório:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \text{área } A$$

Portanto, a Integral definida, conhecida como *Integral de Riemann*, possui agora, além de uma conotação de área, uma de soma, pois $\int_a^b$ é a contrapartida, para o caso contínuo, do conceito de $\sum_{i=1}^{n}$

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Nem sempre é possível obter a integral indefinida de uma função usando-se as fórmulas de integração das principais funções. Algumas vezes temos de recorrer a algumas técnicas específicas como a integração por substituição.

Integração por Substituição

A integral de multiplicação ou divisão de funções não pode ser resolvida de maneira imediata como é válido para a integral de uma soma, por exemplo, que é a soma das integrais. Para casos como este, utilizam-se dois métodos: integração por substituição e por partes.

A Integração por substituição consiste em dividir a variável da função a ser integrada de modo a obtermos uma integral imediata, ou que seja mais simples de calcular.

A ideia baseia-se na relação:

$$\int \left[f(u) \frac{du}{dx} \right] dx = \int f(u) du$$

Assim, seja g uma primitiva de *f*, logo: $\frac{d}{du}[g(u)].\frac{du}{dx} = f(u)\frac{du}{dx}$

Consequentemente: $\int \left[f(u) \frac{du}{dx} \right] dx = g(u)du$

Das duas relações acima temos: $\int \left[f(u) \frac{du}{dx} \right] dx = \int fudu$

Exemplo: $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$.

Fazendo $u = 1+x^2$, então $\frac{du}{dx} = 2x$

Assim, a integral acima pode ser escrita como:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|x^2+1| + c = \ln(x^2+1) + \mathrm{c}$$

Exemplo 2:

$$\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \ln(x^2+3)+c$$

Considerando $u = x^2 + 3$, então:

$\frac{du}{dx} = 2x$, ainda: $du = 2xdx$

A integral pode ser reescrita como:

$$\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln u + c = \ln(x^2+3)+c$$

Exemplo 3:

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}+c$$

Fazendo: $u = 3x$, então $du / dx = 3$, ou: $dx = du / 3$. Assim:

$$\int e^{3x}dx = \int \frac{e^u}{3}du = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{3x}+c$$

Exemplo 4:

$$\int (3x+4)^{10}dx = \frac{(3x+4)^{11}}{33}+c$$

Fazendo: $u = 3x + 4$, então $du / dx = 3$, ou: $dx = du / 3$. Assim:

$$\int (3x+4)^{10}dx = \int u^{10}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^{10}du = \frac{1}{3}.\frac{u^{11}}{11}+c = \frac{(3x+4)^{11}}{33}+c$$