

Monografia de Eletromag II

---

**DESCRIÇÃO LAGRANGIANA DO  
ELETROMAGNETISMO, TEORIAS DE  
CALIBRE E YANG-MILLS**

---

21 de Junho de 2017

Pedro Eduardo Harunari, 8944918  
pedro.harunari@usp.br  
Renan Nobuyuki Hirayama, 8945325  
renan.hirayama@usp.br

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Teorias de Calibre</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Lagrangiana, Equações de Maxwell e Força de Coulomb-Lorentz</b>	<b>3</b>
3.1	Conservação de Carga . . . . .	5
3.2	Formulação Covariante . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Teoria de Yang-Mills</b>	<b>7</b>
4.1	História e relevância . . . . .	7
4.2	Intuição por Geometria Diferencial . . . . .	8
4.3	Uma teoria simples . . . . .	9
4.4	Equações de Maxwell não-Abelianas em $SU(n)$ . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>12</b>

# 1 Introdução

Esta monografia, escrita para a disciplina de Eletromagnetismo II, tem como objetivo abordar algum aspecto da eletrodinâmica moderna e mostrar alguma aplicação recente. Optamos por detalhar o formalismo de Lagrange no eletromagnetismo, ressaltar a importância do calibre e introduzir a teoria de Yang-Mills.

A formulação lagrangiana é bastante presente em diversas áreas da física, pois muitas vezes consegue descrever o movimento do sistema sem exigir muito esforço, porém ela não surge no estudo de eletromagnetismo a nível de graduação.

O calibre também tem propriedades muito importantes que não são exploradas nos cursos. Até então ele era tratado mais como uma ferramenta para simplificar alguns problemas específicos, porém a simetria de calibre nesse estudo revelou-se como uma das propriedades mais importantes do eletromagnetismo.

A teoria de Yang-Mills tem ligação com estes dois temas citados e é bastante presente na física atual, procuramos introduzir suas ideias e discutir um pouco sobre sua importância.

## 2 Teorias de Calibre

Uma teoria de calibre é uma teoria descrita por um modelo que não muda sobre um certo grupo de transformações matemáticas chamadas invariantes de calibre.

O eletromagnetismo é um exemplo, pois se fizermos as seguintes transformações nos potenciais:

$$\varphi'(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \quad \text{e} \quad \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \Lambda(\mathbf{r}, t),$$

na hora de calcular os observáveis temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla \varphi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \varphi + \nabla \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Lambda = \mathbf{E}, \\ \mathbf{B}' &= \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \Lambda = \mathbf{B}, \end{aligned}$$

que são os mesmos campos antes da transformação. Podemos então dizer que os campos elétricos e magnéticos são invariantes de calibre da transformação aplicada para qualquer função escalar  $\Lambda$ .

O calibre ao primeiro contato tem a função de simplificar alguns problemas, como o uso do calibre de Coulomb para estudar a dinâmica dos potenciais escalar e vetor, mas ele pode carregar propriedades mais intrínsecas como a conservação da carga elétrica (seção 3.1).

## 3 Lagrangiana, Equações de Maxwell e Força de Coulomb-Lorentz

A Lagrangiana de um sistema não é única, pois

$$L' = L + \frac{d\Lambda}{dt}$$

produz as mesmas equações do movimento que a lagrangiana  $L$  qualquer que seja a função escalar  $\Lambda$  dependente das coordenadas generalizadas do modelo e do tempo. Uma forma de escrever a lagrangiana do eletromagnetismo no limite não-relativístico é

$$L_{EM} = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2}_{\text{partículas}} + \underbrace{\int d^3r (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} - \rho \varphi)}_{\text{interação}} + \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3r (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}_{\text{campos}}, \quad (1)$$

em que o primeiro termo é referente a partículas livres, o segundo é referente a interação entre campos e partículas e o terceiro é referente a campos livres.

Uma forma de mostrar que a lagrangiana (1) é boa para descrever o eletromagnetismo é ver se suas equações do movimento para os campos reproduzem as equações de Maxwell e as equações do movimento para as partículas reproduzem a lei de Coulomb.

Representando os campos pelos potenciais vetor e escalar

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

automaticamente ficam satisfeitas as equações de Maxwell

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}} \quad \text{e} \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}.$$

Usando os potenciais a (1) fica

$$L_{EM} = \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2 + \int d^3r (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A} - \rho\varphi) + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3r ((\nabla\varphi + \partial\mathbf{A}/\partial t)^2 - c^2(\nabla \times \mathbf{A})^2). \quad (2)$$

Para encontrar as equações de Maxwell temos de estudar o comportamento dos campos, para isso podemos descartar o termo referente a partículas e como, além de aparecer as coordenadas generalizadas e velocidades, agora surgem as derivadas espaciais dessas coordenadas ( $\nabla\varphi$  e  $\nabla \times \mathbf{A}$ ) é necessário definir a ação do sistema não só como uma integral no tempo, mas também no espaço:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \partial_i\varphi, \mathbf{A}, \dot{\mathbf{A}}, \partial_i A_j),$$

em que  $\partial_i$  representa a derivada parcial em relação à  $i$ -ésima coordenada e  $\mathcal{L}$  é a densidade lagrangiana de  $L_{EM}$ .

Por simplicidade podemos representar as coordenadas generalizadas por  $q_k$ , então a ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, \partial_i q_k)$$

tem variação, se expandida em primeira ordem, expressa por

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i q_k)} \delta(\partial_i q_k) \right],$$

em que o último do termo do integrando se repete para cada uma das coordenadas  $i$ .

Fixando  $\delta q_k(\mathbf{x}, t_1) = \delta q_k(\mathbf{x}, t_2) = \delta q_k(\mathbf{x} \rightarrow \infty, t) = 0$  a variação da ação se simplifica para

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \partial_i \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i q_k)} \right) \right] \delta q_k,$$

que deve ser igual a zero; como  $\delta q_k$  é arbitrário o termo entre colchetes deve ser nulo, resultando então nas equações do movimento para uma lagrangiana que envolve derivadas no espaço:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} - \partial_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i q_k)}, \quad (3)$$

que serão utilizadas para estudar a lagrangiana (2).

Como queremos buscar as equações de Maxwell, que descrevem o comportamento de campos, não temos o termo referente a partículas da lagrangiana, dessa forma a densidade é

$$\mathcal{L} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} - \rho\varphi + \frac{\epsilon_0}{2} (\nabla\varphi + \partial\mathbf{A}/\partial t)^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})^2.$$

Substituindo em (3) a coordenada generalizada  $\mathbf{A}$  e a densidade lagrangiana, obtemos para a  $i$ -ésima coordenada:

$$\frac{d}{dt} (\epsilon_0 (\nabla\varphi)_i + \epsilon_0 \dot{A}_i) = j_i - \frac{1}{\mu_0} \epsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times \mathbf{A})_k,$$

em que  $\varepsilon_{ijk}$  é o símbolo de Levi-Civita, comumente usado para simplificar a notação de um produto vetorial; reconhecendo do lado esquerdo a definição de campo elétrico e do lado direito a de campo magnético, podemos reescrever este resultado como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

que é mais uma equação de Maxwell.

Agora substituindo a coordenada generalizada obtemos

$$0 = -\rho - (\epsilon_0(\nabla\phi)_i + \epsilon_0\dot{A}_i),$$

que ao reconhecer a definição de campo elétrico podemos reescrever como a equação de Maxwell restante

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Dessa forma está mostrado que (1) gera todas as equações de Maxwell ao estudarmos a dinâmica dos campos, mas resta saber se ela representa a física já conhecida para o comportamento de partículas. Sejam partículas sujeitas a um campo magnético externo, sua lagrangiana será

$$L_p = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2 + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\varphi,$$

que resulta na equação do movimento ( $d_t(\partial_{\mathbf{v}}L) = \nabla L$ )

$$\frac{d}{dt}(m_k \mathbf{v}_k + e_k \mathbf{A}(\mathbf{r}_k)) = e_k \nabla_k (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_k) - \varphi(\mathbf{r}_k)).$$

Se substituirmos a identidade  $\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} + d\mathbf{A}/dt - \partial\mathbf{A}/\partial t$ , que pode ser demonstrada utilizando o fato de que  $\mathbf{v}$  não depende de  $\mathbf{r}$  e algumas identidades de cálculo, é possível ver que a equação do movimento é equivalente a força de Coulomb-Lorentz

$$m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = e_k (\mathbf{E}(\mathbf{r}_k, t) + \mathbf{v}_k \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_k, t)).$$

Ao estudar todas as equações do movimento da lagrangiana (1) obtemos as leis de Maxwell e a força de Coulomb-Lorentz, que juntos representam a física conhecida para esses fenômenos; então podemos dizer que (1) representa uma descrição para o eletromagnetismo.

Vale lembrar que as equações do movimento são invariantes por um calibre e, conseqüentemente, as equações de Maxwell também serão, mesmo que a lagrangiana apresentada

### 3.1 Conservação de Carga

É comum existirem ligações entre simetrias e quantidades conservadas, geralmente essas ligações são buscadas pelo teorema de Noether; isso ocorre no eletromagnetismo com a invariância de calibre e a conservação da carga elétrica. Essa ligação pode ser vista de maneira intuitiva pelo argumento de Wigner.

**Argumento de Wigner:** Suponha que podemos realizar trabalho para gerar uma carga, ou seja, não existe conservação de carga elétrica. Como é arbitrário o valor do potencial escalar, o trabalho não pode depender do valor do potencial onde a carga foi criada. Suponha que é criada uma carga  $Q$  em um ponto onde o potencial vale  $\varphi$ , depois ela é movida para um ponto com potencial  $\varphi'$  e em seguida destruída; o trabalho recuperado deve ser o mesmo já que ele não pode depender do potencial. Agora tudo voltou ao começo porém foi gerada uma energia  $Q(\varphi' - \varphi)$ , o que viola a conservação de energia. Logo a suposição deste argumento (que a carga elétrica não se conserva) não pode ser válida.

De maneira matemática, lembremos que a partir da transformação de calibre  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$  e  $\varphi' = \varphi - \partial\Lambda/\partial t$ , para qualquer função escalar  $\Lambda$ , a lagrangiana do sistema muda mas as equações de movimento, e conseqüentemente a física presente, permanecem as mesmas.

Se considerarmos o calibre como uma variação, as transformações agora terão a forma  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla(\delta\Lambda)$  e  $\varphi' = \varphi - \partial(\delta\Lambda)/\partial t$ , que aplicada para a ação de uma lagrangiana referente a um sistema com presença de cargas resulta

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[ \mathbf{j} \cdot \nabla(\delta\Lambda) + \rho \frac{\partial(\delta\Lambda)}{\partial t} \right] = 0.$$

Observando que  $\nabla \cdot (\mathbf{j}\delta\Lambda) = \mathbf{j} \cdot \nabla(\delta\Lambda) + \delta\Lambda \nabla \cdot \mathbf{j}$  e  $\partial(\rho\delta\Lambda)/\partial t = \delta\Lambda \partial\rho/\partial t + \rho\partial(\delta\Lambda)/\partial t$ ,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[ \nabla \cdot (\mathbf{j}\delta\Lambda) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\Lambda) \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[ \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \right] \delta\Lambda = 0. \quad (4)$$

Para avaliar a primeira integral do termo do meio de (4) podemos separar em duas partes. Aplicando o teorema de Gauss na primeira parte,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \nabla \cdot (\mathbf{j}\delta\Lambda) = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{j}\delta\Lambda),$$

que se anula já que a superfície fecha no infinito e a variação se anula. A segunda parte pode ser calculada trocando a ordem de integração,

$$\int d^3r \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\Lambda) = \int d^3r \left[ \rho\delta\Lambda \Big|_{t_2} - \rho\delta\Lambda \Big|_{t_1} \right],$$

que pela definição da variação é zero pois  $\delta\Lambda(t_1) = \delta\Lambda(t_2) = 0$ .

Dessa forma a ação (4) fica definida pela parte negativa do termo do meio. Como  $\delta\Lambda$  é arbitrário só podemos ter

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,$$

que é a equação da continuidade, equivalente a conservação da carga. Assim fica demonstrado intuitivamente e matematicamente que a invariância de calibre da eletrodinâmica implica na conservação de carga.

A partir do Teorema de Noether é possível mostrar que a energia-momento é conservada para um sistema isolado invariante a translações uniformes no espaço-tempo e o momento angular é conservado para sistemas invariantes a rotações. Porém neste trabalho tentamos focar na importância do calibre e essas demonstrações não acrescentam muito além da conclusão aqui apresentada.

### 3.2 Formulação Covariante

É possível descrever o eletromagnetismo usando notação covariante, o que permite expressões mais simples. Definimos o 4-potencial  $A^\mu$ , a 4-corrente  $J^\mu$  e o tensor de Faraday  $F^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} A^\mu &= (\varphi/c, \mathbf{A}), \\ J^\mu &= (c\rho, \mathbf{j}), \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \end{aligned}$$

Substituindo explicitamente os índices em  $F^{\mu\nu}$  encontramos as seguintes relações com o campo eletromagnético:

$$\begin{cases} E_i = cF_{0i} \\ B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk} \end{cases} \Rightarrow F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Podemos escrever a densidade lagrangiana (sem partículas) como

$$\mathcal{L} = J^\alpha A_\alpha - \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

onde

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}F^{\rho\sigma} = 2\mu_0\epsilon_0(c^2B^2 - E^2) \Rightarrow -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{\epsilon_0}{2}(E^2 - c^2B^2)$$

é o termo devido ao campo eletromagnético, e

$$J^\alpha A_\alpha = J^\alpha \eta_{\alpha\beta} A^\beta = -\rho\varphi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$$

é o termo da interação das cargas com o campo, usando a métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ . Assim, as equações de Maxwell seguem das equações de Euler-Lagrange, fazendo as correspondências

$$q \rightarrow A_\mu, \quad t \rightarrow x^\mu = (ct, \mathbf{x}), \quad \dot{q} \rightarrow \partial_\mu A_\nu,$$

temos

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu},$$

que resulta em

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu. \quad (6)$$

Colocando  $\nu = 0$  em (6) obtemos a equação de Gauss, enquanto  $\nu = 1, 2$  e  $3$  resulta na lei circuital de Ampère. As duas equações restantes surgem naturalmente da definição do tensor de Faraday, através de uma identidade de Bianchi. Como  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , temos que

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0.$$

Escolhendo um dos índices como zero encontramos a lei de Faraday, enquanto se todos os índices forem espaciais, resulta na ausência de monopolos magnéticos.

A partir de (6) é possível deduzir a conservação de carga, dada a antissimetria de  $F^{\mu\nu}$ :

$$\partial_\nu (\mu_0 J^\nu) = \partial_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu}) = 0 \Rightarrow \partial_\alpha J^\alpha = 0.$$

Além disso, para uma partícula de carga  $q$ , a força de Lorentz sai da variação do termo de interação mais o de partículas, usando  $q \mapsto x^\mu$ . Obtemos

$$f_\alpha = \frac{dp_\alpha}{d\tau} = qF_{\alpha\beta}u^\beta,$$

onde  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  é a 4-velocidade e  $\tau = \gamma t$  é o tempo próprio, com  $\gamma$  é o fator de Lorentz.

## 4 Teoria de Yang-Mills

### 4.1 História e relevância

Como visto, uma propriedade importante do eletromagnetismo é sua invariância por transformações da forma  $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ , onde  $\Lambda$  é um parâmetro arbitrário dependente de  $x^\mu$ . Tal transformação é chamada de transformação de calibre local abeliana: local pois  $\Lambda$  pode ser diferente em dois pontos do espaço-tempo, e abeliana pois o efeito total de duas transformações diferentes independe da ordem em que foram feitas. Dizemos que tal transformação caracteriza o *grupo de simetrias* da teoria.

Sabemos, porém, que transformações não-abelianas são de ocorrência comum no mundo real. Um exemplo típico é uma rotação no espaço tridimensional: rodar um objeto no eixo-x e depois no eixo-z deixa-o numa orientação diferente de girar no eixo-z e então no eixo-x. Portanto, é interessante definir teorias que respeitem simetrias não-abelianas, que é o caso da teoria de Yang-Mills.

Teorias de campo que descrevem o comportamento de campos vetoriais de calibre são conhecidas como teorias de Yang-Mills. As equações de Maxwell são o exemplo mais natural de teoria de Yang-Mills pois elas são uma teoria de campo baseada no grupo de calibre conhecido como " $U(1)$ ", inclusive a teoria de Yang-Mills foi historicamente apresentada como uma generalização da eletrodinâmica para um outro grupo chamado " $SU(2)$ ".

O intuito de Yang e Mills era construir uma teoria de forças nucleares que tivessem certas simetrias em relação a rotações de isospins. O modelo foi estendido para grupos de Lie mais gerais e, a medida que avanços adjacentes foram sendo realizados na física, a teoria foi se estabelecendo e hoje temos exemplos de teorias de Yang-Mills quantizadas muito bem estabelecidas como eletrodinâmica quântica, cromodinâmica quântica, teoria da força eletrofraca e o modelo padrão.

No começo da física a ideia era estudar a dinâmica observando o efeito das forças no sistema, no século 20 emergiu a ideia de estudar a dinâmica a partir das simetrias, ideia fundamental do famoso Teorema de Noether. Mas isso pode se tornar mais fundamental ainda, se tivermos uma quantidade suficiente de simetrias e alguns princípios físicos é possível encontrar unicamente a teoria para estudar o problema, e este foi o caminho que levou Einstein à relatividade geral. Podemos pensar no método desenvolvido por Yang e Mills como um modelo que recebe as simetrias e, a partir das equações de Yang-Mills, gera uma teoria clássica de campos que satisfaz os vínculos impostos e inclusive apresenta a propriedade de ser renormalizável, ou seja, abre portas para uma quantização.

## 4.2 Intuição por Geometria Diferencial

Um modo possível de entender teorias de Yang-Mills exige um conhecimento prévio de geometria diferencial, o que foge do escopo dessa monografia, porém cabe explicitar a forma das equações de Yang-Mills por motivos de curiosidade. Na forma diferencial elas são escritas como

$$d_D F = 0 \quad \text{e} \quad *d_D *F = \mu_0 J.$$

São equações simples de escrever, porém não é tão simples entendê-las; então vamos analisar cada componente em busca de clareza.

O eletromagnetismo assume um espaço-tempo de Minkowski, plano, porém a estratégia das teorias de Yang-Mills é descartar esse conceito, o que é feito pela conexão  $D$ . Ela faz criar uma distorção nesse espaço, e a curvatura  $F$  mede o quanto essa deformação difere da geometria plana comum.

A derivada  $d_D$  é chamada de derivada exterior covariante. Exterior indica que ela atua na fronteira do espaço e covariante nos diz que ela determina variações no espaço curvo em direções paralelas ao espaço, e não direções fixas, o que é ilustrado na figura abaixo.

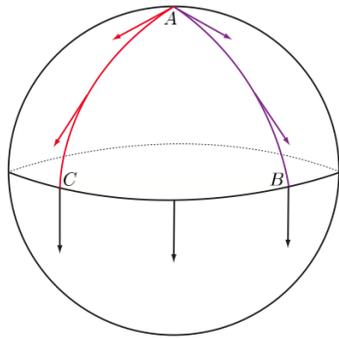


Figura 1: Transporte paralelo em uma esfera

Apesar da visão geométrica auxiliar e facilitar a teoria de Yang-Mills, ela não é absolutamente necessária. A noção de conexão na matemática não deixa óbvia o significado desse conceito na física, que é tratar  $D$  como o campo fundamental da teoria: dada a corrente, ela determina completamente as propriedades do sistema. Se utilizarmos o potencial vetor para descrevê-la, são recuperadas as quatro equações de Maxwell. De fato, Yang só aprendeu o que uma "conexão" era 21 anos após ele e Mills proporem a teoria de Yang-Mills para a interação forte. Para ele estavam simplesmente escrevendo uma generalização para o potencial vetor.

O último elemento das equações é o operador dual de Hodge  $*$ . Para entendê-lo é útil lembrar que nas equações de Maxwell convencionais é possível trocar os papéis dos campos elétrico e magnético; é isso que o operador dual faz, troca alguns graus de liberdade temporais (campo  $\mathbf{E}$ ) com graus de liberdade espaciais (campo  $\mathbf{B}$ ).

De maneira breve, a primeira equação diz que a curvatura não muda através de um transporte paralelo no espaço determinado por  $D$ , enquanto a segunda diz que  $*F$  muda de maneira conduzida pela corrente  $J$ . Essa primeira afirmação pode parecer absurda já que o tensor de Faraday varia, mas as propriedades implícitas nessas equações garantem a validade delas.

### 4.3 Uma teoria simples

Suponhamos que existam dois tipos de carga no lugar da elétrica, que denominamos com cores: a carga azul  $q_x$  e a vermelha  $q_y$ , e definimos o vetor de carga  $\vec{q} = (q_x, q_y)$ . Nesta seção as setas descrevem vetores no espaço de cores, não no espaço físico. Deste modo, existem dois potenciais  $A_x^\mu$  e  $A_y^\mu$ , um para cada tipo de carga, que juntamos no vetor de cor  $\vec{A}^\mu = (A_x^\mu, A_y^\mu)$  e analogamente para  $\vec{J}^\mu$  e  $\vec{F}^{\mu\nu}$ . Nessa teoria, então, a densidade lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \vec{J}^\mu \cdot \vec{A}_\mu - \frac{1}{4\mu_0} \vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{F}_{\mu\nu},$$

de onde saem as equações de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \vec{F}^{\mu\nu} = \mu_0 \vec{J}^\nu. \quad (7)$$

Tal qual a eletrodinâmica usual, nossa *cromo-eletrodinâmica* também é invariante por transformações locais abelianas da forma  $\vec{A}_\mu \mapsto \vec{A}_\mu + \partial_\mu \vec{\Lambda}$ , porém existe uma outra simetria: podemos rodar livremente os vetores de cor. Assim, a teoria também é invariante sob a transformação global não-abeliana

$$\vec{q} \mapsto R\vec{q}; \quad \vec{J}^\mu \mapsto R\vec{J}^\mu; \quad \vec{A}^\mu \mapsto R\vec{A}^\mu; \quad \vec{F}^{\mu\nu} \mapsto R\vec{F}^{\mu\nu},$$

na qual  $R$  é uma matriz unitária arbitrária de rotação. Considerando uma rotação infinitesimal de magnitude  $\theta$  em torno de um eixo  $\hat{n}$  é verdade que, para um vetor arbitrário,  $R\vec{v} = \vec{v} + \vec{\theta} \times \vec{v}$ , onde  $\vec{\theta} = \theta\hat{n}$ . Assim, segue que a *cromo-eletrodinâmica* é invariante sobre as *transformações gerais*

$$\begin{aligned} \vec{q} &\mapsto \vec{q} + \vec{\theta} \times \vec{q}, \\ \vec{J}^\mu &\mapsto \vec{J}^\mu + \vec{\theta} \times \vec{J}^\mu, \\ \vec{A}^\mu &\mapsto \vec{A}^\mu + \vec{\theta} \times \vec{A}^\mu + \partial^\mu \vec{\Lambda}, \\ \vec{F}^{\mu\nu} &\mapsto \vec{F}^{\mu\nu} + \vec{\theta} \times \vec{F}^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Não há perda de generalidade ao escolher um  $\theta$  infinitesimal, pois rotações finitas podem ser decompostas em uma soma de rotações infinitesimais.

Vamos agora generalizar a teoria descrita acima para ser invariante tal que as transformações gerais sejam locais, ou seja, que ambos  $\vec{\Lambda}$  e  $\vec{\theta}$  dependam da posição no espaço-tempo. Explicitamente, queremos mudar  $\vec{\theta} = \vec{\theta}(x^\mu)$ , o que pode ser interpretado como uma deformação do espaço plano, como dito na seção 4.2 e ilustrado na figura abaixo.

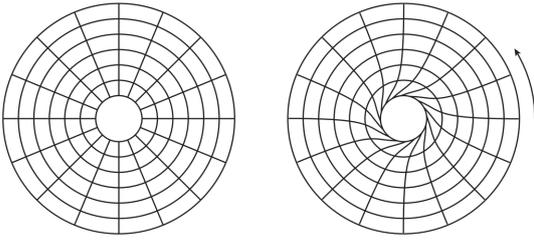


Figura 2: Deformação do espaço plano

Fazendo essa mudança, obtemos na transformação de  $F^{\mu\nu}$  um termo indesejado  $\sim \partial\vec{\theta}$ . Definindo então

$$\begin{aligned} \vec{F}_I^{\mu\nu} &= \partial^\mu \vec{A}^\nu - \partial^\nu \vec{A}^\mu, \\ \vec{F}_{II}^{\mu\nu} &= g\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu, \end{aligned}$$

onde  $g$  é uma constante com unidade inversa de carga, chamada de constante de acoplamento.

Transformando  $F_I^{\mu\nu}$  e  $\vec{F}_{II}^{\mu\nu}$ , após algumas simplificações obtemos

$$\begin{aligned} \vec{F}_I^{\mu\nu} &\mapsto \vec{F}_I^{\mu\nu} + \vec{\theta} \times \vec{F}_I^{\mu\nu} + \partial^\mu \vec{\theta} \times \vec{A}^\nu - \partial^\nu \vec{\theta} \times \vec{A}^\mu, \\ \vec{F}_{II}^{\mu\nu} &\mapsto \vec{F}_{II}^{\mu\nu} + \vec{\theta} \times \vec{F}_{II}^{\mu\nu} + g\partial^\mu \vec{\Lambda} \times \vec{A}^\nu - g\partial^\nu \vec{\Lambda} \times \vec{A}^\mu. \end{aligned}$$

Portanto, para que a teoria se mantenha invariante, temos a restrição  $\vec{\Lambda} = -(1/g)\vec{\theta}$ , de modo que o tensor  $\vec{F}^{\mu\nu} \equiv \vec{F}_I^{\mu\nu} + \vec{F}_{II}^{\mu\nu} = \partial^\mu \vec{A}^\nu - \partial^\nu \vec{A}^\mu + g\vec{A}^\mu \times \vec{A}^\nu$  se transforme propriamente. Assim nossa teoria não é invariante sob transformações independentes de rotações locais no espaço de cores e mudança de calibre, mas temos um grau de liberdade, de modo que

$$\vec{A}^\mu \mapsto \vec{A}^\mu + \vec{\theta} \times \vec{A}^\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu \vec{\theta}.$$

Tendo uma expressão invariante para os campos, desejamos obter as equações de movimento, análogas a (7). Imediatamente encontramos um problema devido à derivada  $\partial_\mu$ ; se um vetor arbitrário  $\vec{q}$  se transforma propriamente, sua derivada não o faz:

$$\partial_\mu \vec{q} \mapsto \partial_\mu \vec{q} + \partial_\mu \vec{\theta} \times \vec{q} + \vec{\theta} \times \partial_\mu \vec{q}.$$

Para consertar isso, definimos o operador *derivada covariante*

$$D_\mu \vec{q} \equiv \partial_\mu \vec{q} + g \vec{A}_\mu \times \vec{q}.$$

Segue então que, se  $\vec{q}$  se transforma propriamente,  $D_\mu \vec{q}$  também o faz, logo a equação de movimento dos campos, análoga às equações de Maxwell, se torna

$$D_\mu \vec{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{F}^{\mu\nu} + g \vec{A}_\mu \times \vec{F}^{\mu\nu} = \mu_0 \vec{J}^\nu. \quad (8)$$

A equação de movimento da partícula (de massa  $m$ ) já é invariante, logo não necessita de modificações:

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = \vec{q} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} u_\nu.$$

Até agora, foi considerado que a carga  $\vec{q}$  (por consequência  $\vec{J}^\mu$ ) se mantém constante. Porém, podemos derivar a conservação de carga mudando isso: o comutador das derivadas covariantes em direções diferentes é

$$[D_\mu, D_\nu] \vec{q} = D_\mu D_\nu \vec{q} - D_\nu D_\mu \vec{q} = g \vec{F}_{\mu\nu} \times \vec{q}.$$

Aplicando  $D_\nu$  a ambos os lados da equação (8), verificamos que

$$\mu_0 D_\nu \vec{J}^\nu = D_\nu D_\mu \vec{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [D_\nu, D_\mu] \vec{F}^{\mu\nu} = \frac{g}{2} \vec{F}_{\mu\nu} \times \vec{F}^{\mu\nu} = 0$$

dá a conservação de carga, ou seja,

$$D_\mu \vec{J}^\mu = \partial_\mu \vec{J}^\mu + g \vec{A}_\mu \times \vec{J}^\mu = 0.$$

Usando isso com a definição de corrente (e aplicando o divergente  $\partial_\mu$ )

$$\vec{J}^\mu = \int \vec{q}(\tau) u^\mu(\tau) \delta^4(x - x(\tau)) d\tau,$$

encontramos que a equação de movimento para o vetor de cor  $\vec{q}$  é

$$\frac{d\vec{q}}{d\tau} = -g u^\mu \vec{A}_\mu \times \vec{q}.$$

Assim, para satisfazer a conservação de carga, devemos permitir que a carga  $\vec{q}$  varie no tempo. Dessa equação de movimento, também obtemos que  $\frac{d|q|^2}{d\tau} = 2\vec{q} \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau} = 0$ , outra manifestação da conservação: o vetor de carga-cor deve ter magnitude constante.

Yang-Mills difere da teoria usual eletromagnética pois há termos não-lineares na definição de  $F^{\mu\nu}$  e nas equações de Maxwell. Porém, ambos os termos são proporcionais à constante de acoplamento  $g$ . Se esta for nula, não há rotação e nossa cromo-eletrodinâmica se reduz ao eletromagnetismo costumeiro, para ambas as cargas (agora independentes) azul e vermelho. Esse é um exemplo simples de uma teoria de Yang-Mills, sobre o grupo  $SU(2)$ . Temos condição agora de delinear Yang-Mills para um número genérico de cargas, usando o grupo  $SU(n)$ .

#### 4.4 Equações de Maxwell não-Abelianas em $SU(n)$

A teoria de Yang-Mills sobre  $SU(n)$  é descrita pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = g J_a^\mu A_\mu^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu},$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$$

é o tensor não-abeliano de força dos campos, análogo ao tensor de Faraday da teoria eletromagnética usual,  $C_{bc}^a$  são as constantes de estrutura da álgebra associada ao grupo, e  $a, b, c = 1, 2, \dots, n^2 - 1$  é o a,b,c-ésimo elemento independente numa transformação do  $SU(n)$ , e  $n^2 - 1$  é o número de geradores do grupo, ou seja, o número de graus de liberdade da teoria. Essa lagrangiana já é invariante pela transformação

$$A_\mu^a \mapsto U(x) \left( A_\mu^a - \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^{-1}(x),$$

e os tensores de força do campo se transformam como

$$F_{\mu\nu}^a \mapsto U(x) F_{\mu\nu}^a U^{-1}(x), \quad (9)$$

onde  $U(x) = e^{-ig\lambda_a\theta^a(x)}$ , análogo à rotação da seção 4.3, e os  $\lambda^a$  são geradores do  $SU(n)$ . Para  $SU(2)$  são as matrizes de Pauli, para  $SU(3)$  são as matrizes de Gell-Mann, etc.

Pelo método variacional tradicional sobre a ação, obtemos as equações de Maxwell para o  $SU(n)$ :

$$\partial_\mu F_b^{\mu\nu} + gC_{bc}^a A_\mu^c F_a^{\mu\nu} = gJ_b^\nu.$$

De modo análogo a (5), podemos definir os campos elétricos e magnéticos de Yang-Mills  $SU(n)$  para cada campo de calibre  $A_\mu^a$ :

$$\begin{aligned} F_{0i}^a &\equiv \frac{E_i^a}{c} = \partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a + gC_{bc}^a A_i^b A_0^c, \\ -\varepsilon^{ijk} F_{jk}^a &\equiv B_i^a = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} (\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a + gC_{bc}^a A_j^b A_k^c), \end{aligned}$$

ou, em notação vetorial,

$$\frac{1}{c} \mathbf{E}^a = -\nabla A_0^a - \partial_t \mathbf{A}^a + gC_{bc}^a A_0^b \mathbf{A}^c, \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}^a - \frac{1}{2} gC_{bc}^a (\mathbf{A}^b \times \mathbf{A}^c). \quad (11)$$

De (10) e (11), encontramos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}^a &= g \frac{\rho^a}{\epsilon_0} + gC_{bc}^a \mathbf{A}^b \cdot \mathbf{E}^c, \\ \nabla \times \mathbf{E}^a + \partial_t \mathbf{B}^a &= gC_{bc}^a \partial_t \left( \nabla \times (A_0^b \mathbf{A}^c) - \frac{1}{2} \mathbf{A}^b \times \mathbf{A}^c \right), \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^a &= -\frac{1}{2} gC_{bc}^a \nabla \cdot (\mathbf{A}^b \times \mathbf{A}^c), \\ \nabla \times \mathbf{B}^a - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}^a &= g\mu_0 \mathbf{J}^a + gC_{bc}^a \left( A_0^b \frac{\mathbf{E}^c}{c} - \mathbf{A}^b \times \mathbf{B}^c \right). \end{aligned}$$

Observa-se que as equações não dependem somente dos campos  $SU(n)$ -eletromagnéticos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , mas também de  $A^\mu$ . A razão disso será clara para frente. Como na seção anterior, tomar  $g = 0$  desacopla as componentes dos campos para  $n^2 - 1$  eletromagnetismos clássicos. Mais interessante é notar que, no vácuo, onde  $J^\mu = 0$ , ainda existem fontes. Além disso, como  $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ , existe um monopolo magnético da carga de cor.

Para uma transformação infinitesimal  $U(x) \approx I - ig\lambda_a\theta^a(x)$  em (9), temos que

$$F_{\mu\nu}^a \mapsto F_{\mu\nu}^a + gC_{bc}^a \theta^b F_{\mu\nu}^c.$$

Esse tensor só fica invariante para o caso abeliano, em que  $g = 0$ . Partindo disso, podemos escrever

$$\begin{aligned} E_i^a &= cF_{i0}^a \mapsto E_i^a + gC_{bc}^a \theta^b E_i^c, \\ B_i^a &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{ajk} \mapsto gC_{bc}^a \theta^b B_i^c. \end{aligned}$$

Esses campos obviamente não são invariantes pela transformação de calibre, portanto podemos dizer que eles não contêm um significado físico real, e que os objetos fundamentais são os potenciais  $A_\mu^a$ . Isso explica a dependência das equações de Maxwell com eles, o que não ocorria com o eletromagnetismo abeliano, fazendo surgir a indagação sobre o que realmente seria inerente à natureza, os potenciais ou os campos. Quando impusemos transformações locais não-abelianas, respondemos essa pergunta.

## 5 Considerações finais

Vimos que uma teoria de Yang-Mills se reduz ao eletromagnetismo clássico quando desacoplamos os diferentes tipos de carga, e mantém a conservação de carga total, mas não necessariamente cada tipo de carga é conservada, já que uma das simetrias do  $SU(n)$  consiste numa possível rotação do espaço de cargas. Essa invariância de calibre permite uma abrangência maior, que é usada atualmente para descrever o Modelo Padrão (sobre o grupo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ).

É difícil e raro discutir teorias de Yang-Mills classicamente sem a introdução da mecânica quântica, porém é uma discussão didaticamente útil para auxiliar na compreensão da importância dos campos de calibre vetoriais, que se tornam responsáveis pela existência de monopolos magnéticos de cor, e pode ser útil estudar o modelo classicamente antes de quantizá-lo.

Para a seção 3 utilizamos o livro do Zangwill [1] e para a seção 4 utilizamos o restante das referências.

## Referências

- [1] A. Zangwill (2012) *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press.
- [2] M. E. Peskin, D. V. Schroeder (2015) *An Introduction To Quantum Field Theory*. Westview Press.
- [3] J. A. Sánchez-Monroy, C. J. Quimbay (2010) *Some classical properties of the non-abelian Yang-Mills theories*. Revista Mexicana de Física E **56** (2) 172-176.
- [4] A. Salmela (2005) *Gauss's law in Yang-Mills theory*. Report series in physics - University of Helsinki.
- [5] A. D. Boozer (2011) *Classical Yang-Mills Theory*. American Journal of Physics **79**, 925.