

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - INSTITUTO DE FÍSICA

ELETROMAGNETISMO II

Quantização canônica do campo eletromagnético

Lucas Nunes Faria - 8540456

Otto Fernando Tao - 8539537

Sumário

1	Quantização dos campos	3
1.1	Quantização canônica geral	3
1.2	Oscilador harmônico mecânico	3
1.3	Quantização canônica de um modo do campo EM	4
1.4	Estados número e o fóton	5
1.5	Flutuações do vácuo	6
1.6	Quantização de um modo estacionário	6
2	Hanbury Brown-Twiss	9
2.1	Coerência e função de correlação	9
2.2	O experimento	9
2.3	Visão clássica	10
2.4	E se eu falar de fótons?	10
2.5	HBT em termos de operadores	11
2.6	Fonte de fótons únicos	12

1 Quantização dos campos

Aqui o trabalho de se quantizar o campo eletromagnético vai partir das equações de Maxwell clássicas juntamente com o método da quantização canônica, desconsiderando a fonte do campo.

1.1 Quantização canônica geral

O método de quantização para qualquer sistema clássico foi elaborado por Dirac em 1925. Com as variáveis dinâmicas do sistema, que obedecem a propriedade de serem canônicas conjugadas entre si, sendo escritas em forma de operadores que não comutam:

$$(q_j, p_j) = [\hat{q}_j, \hat{p}_j] = i\hbar$$

Considerando agora dois operadores associados com pares de variáveis canônicas conjugadas diferentes:

$$(q_1, \dots, q_j; p_1, \dots, p_j) \Rightarrow [\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$$

Ao fazer essa substituição de variáveis canônicas conjugadas por operadores que não comutam, se obtém a Hamiltoniana quântica do sistema.

Para se achar um par de variáveis canônicas conjugadas, será usada as equações de Hamilton vistos em Mecânica II. Sendo a energia $E = H(q_1, p_1, \dots, q_j, p_j)$:

$$\begin{aligned}\frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}\end{aligned}$$

A partir daí a Hamiltoniana quântica do sistema é escrita em função dos operadores não comutantes $\hat{H} = U(\hat{x}) + \hat{p}^2/2m$. O que este processo mostra é que se as equações de Hamilton associadas à energia do sistema levam à dinâmica do mesmo, então a energia foi expressa como função de variáveis canônicas conjugadas.

Mais adiante este será o processo utilizado para reconhecer as variáveis dinâmicas do campo eletromagnético, que obedecem a mesma relação de comutação.

1.2 Oscilador harmônico mecânico

Este modelo tem importância ao se observar que a radiação quantizada se comporta como um conjunto de osciladores harmônicos quantizados.

Agora, ao escrever as equações de Hamilton para o potencial do oscilador harmônico quântico unidimensional $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2x \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2x\end{aligned}$$

Obtemos soluções do tipo:

$$\begin{aligned}x &= a \cos(\omega t + \phi) = \mathcal{A} e^{-i\omega t} + \mathcal{A}^* e^{i\omega t} \\ p &= -m\omega a \sin(\omega t + \phi) = -i\omega m \mathcal{A} e^{-i\omega t} + i\omega m \mathcal{A}^* e^{i\omega t}\end{aligned}$$

onde $\mathcal{A} = \frac{a}{2} e^{-i\phi}$.

Como já visto, x e p são variáveis canônicas conjugadas, o que nos possibilita escrever imediatamente a Hamiltoniana quântica com os operadores \hat{x} e \hat{p} ($[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

A equação de Schrödinger independente do tempo $(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2)\Phi(x) = E\Phi(x)$ tem como solução $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, sendo os números inteiros $n = 0, 1, 2, \dots$ positivos assegurados ao impor que a função de onda seja integrável sobre o espaço $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x)|^2 dx = 1$.

Seguindo com o processo da descrição de um oscilador harmônico, usaremos o formalismo de Dirac, achando os autovalores e autovetores da Hamiltoniana sem usar a função de onda. A equação de Schrödinger assume a forma $\hat{H}|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle$, sendo $|\Phi\rangle$ um vetor no espaço de Hilbert que descreve o estado do sistema.

Vamos introduzir os operadores adimensionais $\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}$ e $\hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\hat{p}$ tais que $[\hat{X}, \hat{P}] = i$ (comutador também adimensional). A Hamiltoniana pode ser escrita em função desses novos operadores adimensionais: $\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$ e fazendo combinações de \hat{X} e \hat{P} chegamos na definição dos operadores não hermitianos de criação $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$ e aniquilação $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$ tais que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Fazendo combinações nas quais \hat{X} e \hat{P} são escritas em função de \hat{a}^\dagger e \hat{a} obtemos uma nova Hamiltoniana $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$.

O problema de autovalores e autovetores se reduz a resolver a equação de Schrodinger que agora não depende de \hat{x} e \hat{p} , ou seja, que independe do tipo de oscilador harmônico que queremos quantizar. Podemos definir o operador número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ e achar seus autovalores e autovetores tais que $\hat{n}|\Phi_n\rangle = n|\Phi_n\rangle$, com n inteiros positivos. Esses autoestados obedecem relações com os operadores criação e aniquilação que serão usados mais a frente: $\hat{a}^\dagger|\Phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\Phi_{n+1}\rangle$ e $\hat{a}|\Phi_n\rangle = \sqrt{n}|\Phi_{n-1}\rangle$. ($\hat{a}|\Phi_{n=0}\rangle = 0$).

O comutador entre \hat{H} e \hat{N} é nulo, portanto $|\Phi_n\rangle$ é autoestado de ambos os operadores e assim encontramos novamente a solução da equação de Schrödinger $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

1.3 Quantização canônica de um modo do campo EM

A solução mais elementar das equações de Maxwell (sem fontes):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

É chamada de modo um campo que oscila em uma frequência bem definida, e sua quantização vem pela analogia com o oscilador harmônico. A solução escolhida é o de uma onda plana progressiva que descreve o campo se propagando livremente (o caso para a onda estacionária será feito mais adiante) $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_l \mathcal{E}_l(t) e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} + \vec{e}_l^* \mathcal{E}_l^*(t) e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})}$, $\omega_l = ck_l$.

Pela divergência do campo elétrico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \Rightarrow \vec{k}_l \cdot \vec{e}_l \mathcal{E}_l = 0$$

temos a restrição $\vec{e}_l \perp \vec{k}_l$. Assim, um modo l é caracterizado pelo vetor de polarização do campo \vec{e}_l e o vetor de onda \vec{k}_l .

Fazendo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \Rightarrow \vec{k}_l \cdot \mathcal{B} \vec{\beta}_l = 0$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = i\vec{k}_l \times \vec{e}_l \mathcal{E}_l(t) e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} - i\vec{k}_l \times \vec{e}_l^* \mathcal{E}_l^*(t) e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})}$$

temos que \vec{e}_l , $\mathcal{B} \vec{\beta}_l$ e \vec{k}_l são todos perpendiculares entre si.

Com a última equação de Maxwell obtemos o campo magnético:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{e}_l \frac{d\mathcal{E}_l(t)}{dt} e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} + \frac{1}{c^2} \vec{e}_l^* \frac{d\mathcal{E}_l^*(t)}{dt} e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega_l^2} \vec{k}_l \times \vec{e}_l \frac{d\mathcal{E}_l(t)}{dt} e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} - \frac{1}{\omega_l^2} \vec{k}_l \times \vec{e}_l^* \frac{d\mathcal{E}_l^*(t)}{dt} e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})}$$

Fazendo a substituição de $\vec{B}(\vec{r}, t)$ na equação de Faraday, e escolhendo o mesmo sentido de propagação do vetor de onda:

$$\frac{d\mathcal{E}_l(t)}{dt} = -i\omega_l \mathcal{E}_l(t) \Rightarrow \mathcal{E}_l(t) = \mathcal{E}_l(0) e^{-i\omega t}$$

Temos então uma nova forma do campo magnético:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k}_l \times \vec{e}_l}{\omega_l} \mathcal{E}_l(t) e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} + \frac{\vec{k}_l \times \vec{e}_l^*}{\omega_l} \mathcal{E}_l^*(t) e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})}$$

Portanto a amplitude complexa $\mathcal{E}_l(t)$ descreve o estado do campo eletromagnético já que ele permite escrever ambos os campos elétrico e magnético. Queremos identificar as variáveis dinâmicas do sistema que são canônicas conjugadas entre si, e será mostrado que elas são as componentes real e imaginária da amplitude $\mathcal{E}_l(t)$.

Separamos a amplitude em uma componente elétrica e outra adimensional $\mathcal{E}_l(t) = i\mathcal{F}_l^{(1)}\alpha_l(t)$ (escolha comumente empregada na literatura), assim no modo l a dinâmica do sistema fica regida por $\frac{d\alpha_l(t)}{dt} = -i\omega_l\alpha_l(t)$. Abrimos alfa nas suas partes real e imaginária $\alpha_l(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(Q_l + iP_l)$.

A energia do campo eletromagnético em um volume de quantização V_l no modo l é escrita como $H_l = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_l} d^3r (\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2)$, cujo, para uma onda progressiva é:

$$H_l = \epsilon_0 \int_{V_l} d^3r \vec{E}^2 = 2\epsilon_0 \int_{V_l} d^3r |\mathcal{E}_l(t)|^2 = 2\epsilon_0 V_l |\mathcal{E}_l(t)|^2 = 2\epsilon_0 V_l (\mathcal{F}_l^{(1)})^2 |\alpha_l(t)|^2$$

Fazemos agora uma escolha, tendo em vista simplificações na conta e o objetivo de quantização do campo, para a amplitude de um fóton no modo l , $\mathcal{F}_l^{(1)} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V_l}}$. A Hamiltoniana assume a forma $H_l = 2\epsilon_0 V_l \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V_l} \frac{1}{2\hbar} (Q_l^2 + P_l^2) = \omega_l/2(Q_l^2 + P_l^2)$, similar a Hamiltoniana encontrada no tópico “oscilador harmônico mecânico”.

No caso da onda progressiva que se propaga ao infinito, o volume de quantização escolhido não é intrinsecamente associado a uma geometria real, mas a uma característica de periodicidade do campo eletromagnético. Então vamos considerar um cubo de volume $V_l = L^3$, as condições periódicas de contorno são $k_{lx} = 2\pi n_{lx}, k_{ly} = 2\pi n_{ly}, k_{lz} = 2\pi n_{lz}$.

Resta agora verificar que as variáveis Q_l e P_l são canonicamente conjugadas, a partir daí a quantização é imediata. Escrevendo as equações de Hamilton:

$$\frac{dQ_l}{dt} = \frac{\partial H_l}{\partial P_l} = \omega_l P_l, \quad \frac{dP_l}{dt} = -\frac{\partial H_l}{\partial Q_l} = -\omega_l Q_l$$

observamos que ele segue a dinâmica obtida anteriormente:

$$\frac{d\alpha_l(t)}{dt} = -i\omega_l\alpha_l(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(Q_l + iP_l) = -i\omega_l(Q_l + iP_l)$$

Portanto podemos concluir que Q_l e P_l são as variáveis canônicas conjugadas do sistema, e introduzir os operadores \hat{Q}_l e \hat{P}_l que têm o comutador $[\hat{Q}_l, \hat{P}_l] = i\hbar$ e a Hamiltoniana $\hat{H}_l = \frac{\omega_l}{2}(\hat{Q}_l^2 + \hat{P}_l^2)$ (exatamente a Hamiltoniana do oscilador harmônico quântico). Agora alfa (adimensional) pode ser escrito como o operador aniquilação (também adimensional) e seu complexo conjugado como o operador criação:

$$\alpha(t) \Rightarrow \hat{a}_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{Q}_l + i\hat{P}_l) \text{ e } \alpha^*(t) \Rightarrow \hat{a}_l^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{Q}_l - i\hat{P}_l)$$

Como feito anteriormente, podemos escrever a Hamiltoniana em função de \hat{a}_l e \hat{a}_l^\dagger :

$$\hat{H}_l = \frac{\omega_l}{2}(\hat{Q}_l^2 + \hat{P}_l^2) = \frac{\omega_l}{2} \left[\frac{\hbar}{2}(\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger)^2 - \frac{\hbar}{2}(\hat{a}_l - \hat{a}_l^\dagger)^2 \right] = \frac{\omega_l}{4} [2\hat{a}_l\hat{a}_l^\dagger + 2\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l] = \hbar\omega_l \left(\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l + \frac{1}{2} \right)$$

outro resultado já obtido.

Finalmente escrevemos os campos eletromagnéticos como observáveis:

$$\begin{aligned} \hat{E}(\vec{r}, t) &= i\vec{\epsilon}_l \mathcal{F}_l^{(1)} \hat{a}_l e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} - i\vec{\epsilon}_l \mathcal{F}_l^{(1)} \hat{a}_l^\dagger e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} \\ \hat{B}(\vec{r}, t) &= i \frac{\vec{k}_l \times \vec{\epsilon}_l}{\omega_l} \mathcal{F}_l^{(1)} \hat{a}_l e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} - i \frac{\vec{k}_l \times \vec{\epsilon}_l}{\omega_l} \mathcal{F}_l^{(1)} \hat{a}_l^\dagger e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} \end{aligned}$$

notamos que esses operadores não tem dependência temporal, de fato, na representação de Schrödinger são os estados que evoluem no tempo.

1.4 Estados número e o fóton

Tendo a Hamiltoniana do sistema, vamos caracterizar os seus autovalores e autovetores, que dão os valores de energia do sistema e que formam uma base completa do espaço de estados, respectivamente. Este problema já foi feito, e as suas soluções vêm do oscilador harmônico quantizado.

$$\hat{H}_l = \hbar\omega_l \left(\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \hat{H}_l|\phi_{n_l}\rangle = E_{n_l}|\phi_{n_l}\rangle, \quad E_{n_l} = \hbar\omega_l \left(n_l + \frac{1}{2} \right)$$

Os autoestados da Hamiltoniana também são autoestados do operador número, portanto $|\phi_{n_l}\rangle = |n_l\rangle$ são os estados número, ou estados de Fock. Eles formam uma base completa do espaço dos estados se levarmos em conta que a partir do estado de menor energia podemos achar todos os outros estados com o operador criação $|n_l\rangle = \frac{(\hat{a}_l^\dagger)^{n_l}}{\sqrt{n_l!}}|n_l = 0\rangle$.

Comparando a energia do sistema no estado $|n_l\rangle$, $E_{n_l} = \hbar\omega_l(n_l + \frac{1}{2})$ com a energia no estado fundamental $|n_l = 0\rangle$, $E_0 = \frac{\hbar\omega_l}{2}$, $E_{n_l} - E_0 = n_l\hbar\omega_l$.

O momento clássico do campo eletromagnético é dado por $\vec{P}_l = \epsilon_0 \int_{V_l} d^3r (\vec{E} \times \vec{B}) = |\alpha_l|^2 \hbar \vec{k}_l$. O operador quantizado correspondente é $\hat{P}_l = \hbar \vec{k}_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l$ e novamente o estado de Fock é um estado deste operador $\hat{P}_l |n_l\rangle = \hbar \vec{k}_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l |n_l\rangle = n_l \hbar \vec{k}_l |n_l\rangle$.

Portanto o estado $|n_l\rangle$ tem energia $n_l \hbar \omega_l$ e momento $n_l \hbar \vec{k}_l$ bem definidos, e esse estado corresponde a n_l partículas, que definimos como fótons, cada um com energia $\hbar \omega_l$ e momento $\hbar \vec{k}_l$.

Vamos notar mais adiante que essa forma de energia e momento não é válida se considerarmos ondas estacionárias ao invés de uma onda progressiva.

1.5 Flutuações do vácuo

O estado fundamental do sistema é o que chamamos de vácuo, que configura a ausência de radiação. Mas ao quantizar o campo é possível observar que o campo na verdade apresenta flutuações:

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}(\vec{r}) \rangle &= \langle 0_l | \hat{E}(\vec{r}) | 0_l \rangle = \langle 0_l | i\vec{\epsilon}_l \mathcal{F}_l(1) \hat{a}_l e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} - i\vec{\epsilon}_l \mathcal{F}_l(1) \hat{a}_l^\dagger e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} | 0_l \rangle \\ &= \langle 0_l | i\vec{\epsilon}_l \mathcal{F}_l(1) \hat{a}_l e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} | 0_l \rangle - \langle 0_l | i\vec{\epsilon}_l \mathcal{F}_l(1) \hat{a}_l^\dagger e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} | 0_l \rangle \\ &= i\vec{\epsilon}_l \mathcal{F}_l(1) e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} \langle 0_l | \hat{a}_l | 0_l \rangle - i\vec{\epsilon}_l \mathcal{F}_l(1) e^{-i(\vec{k}_l \cdot \vec{r})} \langle 0_l | \hat{a}_l^\dagger | 0_l \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Similarmente, para a variância:

$$\begin{aligned} \Delta E &= [\langle 0_l | \hat{E}^2(\vec{r}) | 0_l \rangle - (\langle 0_l | \hat{E}(\vec{r}) | 0_l \rangle)^2]^{\frac{1}{2}} = [(\mathcal{F}_l^{(1)})^2 \langle 0_l | \hat{a}_l \hat{a}_l^\dagger | 0_l \rangle]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(\mathcal{F}_l^{(1)})^2 \langle 0_l | 1 + \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l | 0_l \rangle]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{F}_l^{(1)} \end{aligned}$$

Portanto o campo eletromagnético possui uma dispersão de dimensão $\mathcal{F}_l^{(1)}$. O vácuo é um estado de mínima dispersão obedecida pelo princípio de Heisenberg $\Delta Q_l \Delta P_l = \frac{\hbar}{2}$.

1.6 Quantização de um modo estacionário

Tendo feito a quantização para a onda progressiva, vamos agora usar o mesmo formalismo para a onda estacionária em uma cavidade linear. Consideramos o modo unidimensional definido por dois espelhos planos separados por uma distancia L_{cav}

Para as condições de contorno do sistema, temos que os campos elétrico ($\vec{E}_{||}$) e magnético (\vec{B}_{\perp}) se anulam na superfície do espelho. Temos portanto:

$$\begin{aligned} \vec{A}(z, t) &= A(t) \vec{e} \text{sen}(k \cdot z) \\ \vec{E}(z, t) &= E(t) \vec{e} \text{sen}(k \cdot z) \\ \vec{B}(z, t) &= A(t) \vec{k} \times \vec{e} \text{cos}(k \cdot z) \end{aligned}$$

Onde o calibre de Coulomb ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) foi usado para o potencial vetor.

O comprimento da cavidade impõe restrições para os valores permitidos de k tal que $k = \frac{n\pi}{L_{cav}}$. Ou seja, apenas para esses valores de k ocorre interferência construtiva dentro da cavidade.

Do potencial vetor temos $E(t) = -\frac{\partial A(t)}{\partial t}$ e em conjunto com as equações de Maxwell, após alguma algebra, conclui-se que $\frac{\partial E(t)}{\partial t} = \omega A(t)$ ($\omega = ck$).

Separamos, da mesma forma que no caso da onda progressiva, as amplitudes complexas em um termo com dimensão de campo elétrico e outro adimensional. Definimos o termo adimensional como $\alpha(t) = \frac{1}{2\mathcal{F}_k^{(1)}}(\omega A(t) - iE(t))$, sendo possível verificar que a dinâmica é ditada pela equação $\frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} = -i\omega \alpha(t)$:

$$\frac{1}{2\mathcal{F}_k^{(1)}} \left(\omega \frac{\partial A(t)}{\partial t} - i \frac{\partial E(t)}{\partial t} \right) = -i\omega \frac{1}{2\mathcal{F}_k^{(1)}} (\omega A(t) - iE(t))$$

$$-\omega E(t) - i\omega^2 A(t) = -\omega E(t) - i\omega^2 A(t)$$

Novamente temos a Hamiltoniana do sistema

$$H = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_{cav}} d^3r (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) = \epsilon_0 V_{cav} (\mathcal{F}_k^{(1)})^2 |\alpha(t)|^2 = \hbar\omega |\alpha(t)|^2$$

ao fazer a escolha $\mathcal{F}_k^{(1)} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V_{cav}}}$.

Agora, para o valor de α definido como dependente das variáveis canônicas $\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(Q + iP)$, podemos obter o valor de Q e P em função das amplitudes dos campos $A(t)$ e $E(t)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(Q + iP) = \frac{1}{2\mathcal{F}_k^{(1)}}(\omega A(t) - iE(t)) \quad \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(Q - iP) = \frac{1}{2\mathcal{F}_k^{(1)}}(\omega A(t) + iE(t))$$

$$\Rightarrow \frac{2Q}{\sqrt{2\hbar}} = \frac{\omega A(t)}{\mathcal{F}_k^{(1)}} \Rightarrow Q = \sqrt{\epsilon_0 \omega V_{cav}} A(t)$$

$$\Rightarrow \frac{2iP}{\sqrt{2\hbar}} = \frac{-iE(t)}{\mathcal{F}_k^{(1)}} \Rightarrow P = -\sqrt{\frac{\epsilon_0 V_{cav}}{\omega}} A(t)$$

A última manipulação no campo clássico consiste em escrever os campos $\vec{E}(z, t)$ e $\vec{A}(z, t)$ em termos das amplitudes adimensionais

$$\alpha(t) = \frac{1}{\mathcal{F}_k^{(1)}}(\omega A(t) - iE(t)) \quad \alpha^*(t) = \frac{1}{\mathcal{F}_k^{(1)}}(\omega A(t) + iE(t))$$

$$A(t) = \frac{\mathcal{F}_k^{(1)}}{\omega}(\alpha(t) + \alpha^*(t)) \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(z, t) = \frac{\mathcal{F}_k^{(1)}}{\omega} \vec{e}(\alpha(t) + \alpha^*(t)) \text{sen}(kz)$$

$$E(t) = i\mathcal{F}_k^{(1)}(\alpha(t) - \alpha^*(t)) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(z, t) = i\mathcal{F}_k^{(1)} \vec{e}(\alpha(t) - \alpha^*(t)) \text{sen}(kz)$$

Os campos eletromagnéticos quantizados são escritos substituindo as componentes adimensionais por operadores não hermitianos \hat{b} e \hat{b}^\dagger , com a relação de comutação $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$:

$$\hat{A}(z) = \frac{\mathcal{F}_k^{(1)}}{\omega} \vec{e}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \text{sen}(kz)$$

$$\hat{E}(z) = i\mathcal{F}_k^{(1)} \vec{e}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \text{sen}(kz)$$

De acordo com o fato de que na representação de Schrödinger são os estados que evoluem no tempo e não o operador.

Para achar o operador \hat{b} em função de \hat{a} , podemos pensar numa onda estacionária como uma soma de duas ondas progressivas caminhando em sentidos opostos, logo:

$$\hat{E}_{k,\epsilon}(z) + \hat{E}_{-k,\epsilon}(z) = i\mathcal{F}_l^{(1)} \vec{e}(\hat{a}_{k,\epsilon} e^{ikz} - \hat{a}_{k,\epsilon}^\dagger e^{-ikz}) + i\mathcal{F}_l^{(1)} \vec{e}(\hat{a}_{-k,\epsilon} e^{ikz} - \hat{a}_{-k,\epsilon}^\dagger e^{-ikz})$$

$$= i\mathcal{F}_l^{(1)} \vec{e} \left[e^{ikz}(\hat{a}_{k,\epsilon} - \hat{a}_{-k,\epsilon}^\dagger) + e^{-ikz}(\hat{a}_{-k,\epsilon} - \hat{a}_{k,\epsilon}^\dagger) \right]$$

$$= i\mathcal{F}_l^{(1)} \vec{e} \left[\cos(kz)(\hat{a}_{k,\epsilon} + \hat{a}_{-k,\epsilon} - \hat{a}_{k,\epsilon}^\dagger - \hat{a}_{-k,\epsilon}^\dagger) + i \text{sen}(kz)(\hat{a}_{k,\epsilon} - \hat{a}_{-k,\epsilon} + \hat{a}_{k,\epsilon}^\dagger - \hat{a}_{-k,\epsilon}^\dagger) \right]$$

$$= i\mathcal{F}_l^{(1)} \vec{e} \cos(kz)(\hat{a}_{k,\epsilon} + \hat{a}_{-k,\epsilon} - \hat{a}_{k,\epsilon}^\dagger - \hat{a}_{-k,\epsilon}^\dagger) + \mathcal{F}_l^{(1)} \vec{e} \text{sen}(kz)(\hat{a}_{-k,\epsilon} + \hat{a}_{-k,\epsilon}^\dagger - \hat{a}_{k,\epsilon} - \hat{a}_{k,\epsilon}^\dagger)$$

O observável é real, portanto: $\hat{E}_{k,\epsilon}(z) + \hat{E}_{-k,\epsilon}(z) = \mathcal{F}_l^{(1)} \vec{e} \text{sen}(kz)(\hat{a}_{-k,\epsilon} + \hat{a}_{-k,\epsilon}^\dagger - \hat{a}_{k,\epsilon} - \hat{a}_{k,\epsilon}^\dagger)$

Provamos que $\hat{b} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{k,\epsilon} - \hat{a}_{k,\epsilon}^\dagger)$ fazendo a substituição no modo estacionário e chegando na mesma forma da soma de ondas progressivas:

$$\begin{aligned}\hat{E}(z) &= i\mathcal{F}_k^{(1)} \vec{\epsilon} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \text{sen}(kz) = i\mathcal{F}_k^{(1)} \vec{\epsilon} \left(\frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{k,\epsilon} - \hat{a}_{-k,\epsilon}^\dagger) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{k,\epsilon}^\dagger - \hat{a}_{-k,\epsilon}^\dagger) \right) \text{sen}(kz) \\ &= \frac{\mathcal{F}_k^{(1)} \vec{\epsilon}}{\sqrt{2}} (\text{sen}(kz)(\hat{a}_{-k,\epsilon} + \hat{a}_{-k,\epsilon}^\dagger - \hat{a}_{k,\epsilon} - \hat{a}_{k,\epsilon}^\dagger))\end{aligned}$$

Levando em conta que $\frac{\mathcal{F}_k^{(1)}}{\sqrt{2}} = \mathcal{F}_l^{(1)}$, está provado que $\hat{b} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{k,\epsilon} - \hat{a}_{k,\epsilon}^\dagger)$. Usando $[\hat{a}_{k,\epsilon}, \hat{a}_{k',\epsilon}^\dagger] = \delta_{kk'}$ também provamos que $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ (como assumido anteriormente).

No modo estacionario temos a energia do fóton sendo bem definida como $\hbar\omega$ (como no caso de ondas progressivas) mas o momento do fóton pode se encontrar tanto no valor $+\hbar k$ como em $-\hbar k$ (diferente ao caso anterior), sendo assim a superposição de diferentes momentos.

2 Hanbury Brown-Twiss

Na seção anterior, vimos a luz é composta por diferentes modos de oscilação, e que cada modo possui uma energia característica correspondente a um fóton. Com esta nova visão será explicado o efeito *Hanbury Brown-Twiss* (que a partir de agora, será chamado de HBT).

Começaremos com a descrição clássica e falaremos sobre o resultado esperado. Então partiremos para a explicação quântica para chegarmos em um resultado diferente, sendo daí possível unir as duas explicações. Ao encerrar, mencionaremos a emissão de fótons únicos e a dualidade onda-partícula da luz.

O tratamento feito aqui segue de perto os capítulos 6 e 8 da referência [1] de Hanbury Brown-Twiss.

2.1 Coerência e função de correlação

Para se entender o efeito HBT, primeiro precisamos entender os conceitos de coerência e de função de correlação. Basicamente, coerência mede o quanto podemos prever a fase de uma onda dado que sabemos o quanto ela vale em um dado ponto do espaço-tempo. Existe um *tempo de correlação* τ_c que mede o tempo em que a luz continua coerente.

Função de correlação tem ligação com o quanto a luz está correlacionada com ela mesma em um instante posterior.

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^*(\vec{r}, t)E(\vec{r}, t + \tau) \rangle}{\langle E^*(\vec{r}, t)E(\vec{r}, t) \rangle}$$

é a função de correlação de primeira ordem normalizada. $\langle \dots \rangle$ denota média temporal. Ou seja, a fórmula acima relaciona o campo elétrico da luz com ele mesmo um instante τ depois.

Para entender o HBT, não é essa função que nos interessará, mas a função de correlação de segunda ordem:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle E^*(\vec{r}, t)E^*(\vec{r}, t + \tau)E(\vec{r}, t)E(\vec{r}, t + \tau) \rangle}{\langle E^*(\vec{r}, t)E(\vec{r}, t) \rangle \langle E^*(\vec{r}, t + \tau)E(\vec{r}, t + \tau) \rangle} = \frac{\langle I(t)I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle \langle I(t + \tau) \rangle}$$

onde I é a intensidade da luz (removi a dependência em \vec{r} na última igualdade por ser óbvia).

2.2 O experimento

O HBT consiste em um feixe de luz incidindo em um divisor de feixes que leva cada um dos lados para um fotodetector, que irá gerar uma corrente elétrica proporcional à intensidade. A imagem abaixo foi retirada da wikipedia e representa o descrito acima:

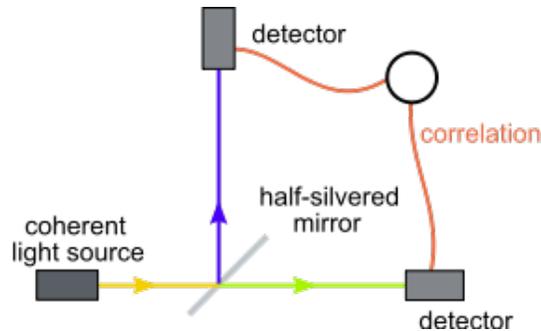


Figura 1: Esquema experimental do HBT

Os fotodetectores são ligados a um amplificador AC, que gera um sinal proporcional às *flutuações* das correntes, chamemos de Δi_1 e Δi_2 . O sinal de um desses detectores é atrasado de um tempo τ . Após isso, é feita a correlação das medidas, ou seja, é medido $\langle \Delta i_1(t)\Delta i_2(t + \tau) \rangle$. Como as correntes são proporcionais à intensidade, isso é obviamente proporcional a $\langle \Delta I_1(t)\Delta I_2(t + \tau) \rangle$.

A ideia por trás do experimento é que numa fonte de luz coerente, as flutuações de intensidade serão correlacionadas. Então medir a correlação nos mostra o quanto a luz é coerente.

Podemos ajustar o divisor de feixes para que a intensidade média em cada um dos braços seja a mesma.

$$I_1(t) = I_2(t) \equiv I(t) = \langle I(t) \rangle + \Delta I(t)$$

Isso significa que o resultado final da medida, para $\tau = 0$, é

$$\langle \Delta I(t) \Delta I(t + \tau) \rangle |_{\tau=0} = \langle \Delta I(t)^2 \rangle$$

Agora, se faço $\tau \gg \tau_c$, essa correlação cai para zero. Este pode ser considerado um modo de se medir τ_c , já que obtemos a correlação em função de τ .

2.3 Visão clássica

Retomando a função de correlação de segunda ordem, $g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle \langle I(t+\tau) \rangle}$.

Vamos considerar uma fonte de luz de intensidade constante, *i.e.* $\langle I(t) \rangle = \langle I(t + \tau) \rangle$ com $I(t) = \langle I \rangle + \Delta I(t)$ devemos ter $\langle \Delta I(t) \rangle = 0$, pois não há motivo para supor que as flutuações sejam positivas ou negativas. Sabemos que para um tempo $\tau \gg \tau_c$, $\langle \Delta I(t) \Delta I(t + \tau) \rangle = 0$. Então,

$$\langle I(t)I(t + \tau) \rangle = \langle (\langle I \rangle + \Delta I(t))(\langle I \rangle + \Delta I(t + \tau)) \rangle = \langle I \rangle^2$$

Ou seja,

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{\langle I(t) \rangle^2}{\langle I(t) \rangle^2} = 1$$

lembrando que isto vale para $\tau \gg \tau_c$. Para $\tau \ll \tau_c$, haverá correlações na flutuação. Em particular, se $\tau = 0$. Então

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle I(t)^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \geq 1$$

$$\Rightarrow g^{(2)}(0) \geq g^{(2)}(\tau)$$

2.4 E se eu falar de fótons?

Agora a interpretação fica um pouco diferente. Primeiro, o divisor de feixes no início é interpretado como um instrumento com 50% de chance de mandar o fóton incidente para um lado e 50% de chance de mandar para o outro. Os detectores D1 e D2 (figura abaixo, retirado do livro do Fox) agora medem fótons únicos. Quando um fóton incide em D2 um cronômetro é disparado, só parando quando um fóton incide em D1.

Outra diferença está na função de correlação de segunda ordem. Como ela é proporcional à intensidade, agora podemos escrevê-la sendo proporcional ao *número de fótons incidentes*:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n_1(t)n_2(t + \tau) \rangle}{\langle n_1(t) \rangle \langle n_2(t + \tau) \rangle}$$

isto significa que a função de correlação é proporcional à probabilidade de se detectar um fóton num tempo t em D1 e outro num tempo $t + \tau$ em D2.

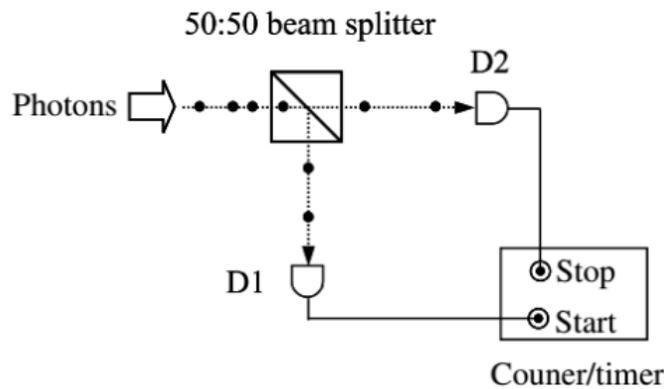


Figura 2: Interpretação quântica

Mas, ao pensar sobre o experimento nestes termos, percebemos que há algo de errado. Quando um fóton incide em D2 e dispara o cronômetro, há 50% de chance de o próximo fóton incidir em D1 e pará-lo; mas também há a chance de um fóton ir novamente para D2 e o cronômetro continuar rodando. Isto é o completo oposto do esperado quando explicamos em termos clássicos (lá, $g^{(2)}(0) \geq g^{(2)}(\tau)$), portanto a probabilidade do cronômetro ser disparado logo depois de ser iniciado é a maior possível.

Na verdade, existe uma explicação quântica para o resultado esperado classicamente. Se considerarmos que os fótons chegam *agrupados*, temos uma alta probabilidade de voltarmos com $g^{(2)}(0) \geq g^{(2)}(\tau)$. Este experimento, então, mostra um propriedade importante dos fótons: eles são *bósons*, tendendo a andar agrupados.

Ainda assim, temos um novo resultado esperado agora, $g^{(2)}(0) = 0$. Este resultado pode ser alcançado tendo uma fonte de emissão de fótons únicos, e um resultado desses em laboratório é uma boa demonstração da propriedade de que a luz é uma *partícula*.

2.5 HBT em termos de operadores

Vamos agora explicar o HBT usando a notação da seção anterior e dar uma nova visão do experimento. Para isso usaremos uma imagem ligeiramente diferente (veja abaixo, imagem também retirada do livro do Fox).

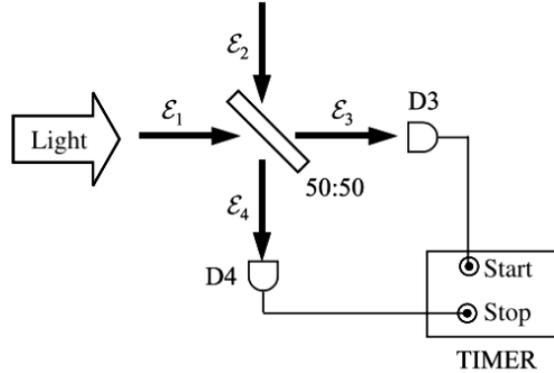


Figura 3: HBT

Agora há luz vindo de 1 e 2. Elas interferem e encontram o detector D3 ou o D4. A função de correlação de segunda ordem agora é

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n_3(t)n_4(t+\tau) \rangle}{\langle n_3(t) \rangle \langle n_4(t+\tau) \rangle}$$

Como quero usar a notação do começo do trabalho, posso escrever isso como:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}_3^\dagger(t)\hat{a}_4^\dagger(t+\tau)\hat{a}_4(t+\tau)\hat{a}_3(t) \rangle}{\langle \hat{a}_3^\dagger(t)\hat{a}_3(t) \rangle \langle \hat{a}_4^\dagger(t+\tau)\hat{a}_4(t+\tau) \rangle}$$

onde os operadores de criação foram colocados à esquerda dos operadores de aniquilação (é a chamada ordem normal).

Foi visto acima que $g^{(2)}(0)$ indica se o comportamento é clássico ou quântico. Aqui:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}_3^\dagger\hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4\hat{a}_3 \rangle}{\langle \hat{a}_3^\dagger\hat{a}_3 \rangle \langle \hat{a}_4^\dagger\hat{a}_4 \rangle}$$

Mas para conhecer este valor, é preciso conseguir relacionar os operadores dos campos de saída (3 e 4) com os de entrada (1 e 2). Sabemos fazer essa relação com o campo elétrico:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 &= \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{\sqrt{2}} \\ \mathcal{E}_4 &= \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

onde $\sqrt{2}$ aparece por questões de normalização e o sinal de menos na equação de cima se deve a reflexão sofrida pela luz em 2, que causa uma mudança de fase de π . As mesmas relações servem para os operadores:

$$\hat{a}_3 = \frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_2}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{a}_4 = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}}$$

e o mesmo vale para os operadores de criação (apenas tirando o hermitiano conjugado das equações acima).

Lembrando que no experimento de HBT descrito até agora, só existia luz vindo de um dos lados (ou 1 ou 2). Então podemos considerar que a luz vem de 1; e de 2 temos o estado de vácuo.

$$|\Psi\rangle = |\psi_1, 0_2\rangle$$

é o estado inicial do sistema. Isto significa que

$$\langle \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 \rangle = \frac{\langle \psi_1, 0_2 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | \psi_1, 0_2 \rangle}{2} = \frac{\langle \psi_1 | \hat{n}_1 | \psi_1 \rangle}{2}$$

os passos foram omitidos, mas a conta é simples: sei que $\langle 0_2 | \hat{a}_2^\dagger = \hat{a}_2 | 0_2 \rangle = 0$ e $\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 = \hat{n}_1$. Analogamente

$$\langle \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \rangle = \frac{\langle \psi_1 | \hat{n}_1 | \psi_1 \rangle}{2}$$

O próximo termo requer um pouco mais de contas, mas o raciocínio é o mesmo e por isso colocaremos apenas a resposta final:

$$\langle \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_4^\dagger \hat{a}_4 \hat{a}_3 \rangle = \frac{\langle \psi_1 | \hat{n}_1 (\hat{n}_1 - 1) | \psi_1 \rangle}{4}$$

ou seja

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \psi_1 | \hat{n}_1 (\hat{n}_1 - 1) | \psi_1 \rangle / 4}{(\langle \psi_1 | \hat{n}_1 | \psi_1 \rangle / 2)^2} = \frac{n(n-1)}{n^2}$$

onde n indica o número de fótons no estado inicial. Perceba que temos o efeito puramente quântico de $g^{(2)}(0) = 0$ quando $n = 1$, *i.e.* um fonte de fótons únicos.

2.6 Fonte de fótons únicos

Para se ter uma fonte de fótons únicos, o princípio básico é conseguir isolar uma espécie emissora *individual* e controlar a taxa de emissão de fótons. Isolar uma única espécie emissora é bastante importante; caso haja mais de uma, os fótons gerados por cada fonte estarão em fases diferentes em dado ponto do caminho ótico. Na primeira vez que se realizou isso foram usados átomos de sódio (*cf.* referência [3]).

A espécie emissora é excitada com um laser para que ela emita um fóton. Depois disso haverá um tempo τ_R em que a fonte não pode mais emitir fótons, e então eles serão emitidos separadamente e temos o efeito desejado. Percebemos que podem ser gerados fótons por emissão espontânea, fazendo com que surjam dois fótons durante um tempo menor que τ_R , mas a probabilidade de que isso ocorra é bastante pequena. Isso faz com que $g^{(2)}(0) \approx 0$.

Um experimento interessante é usar uma fonte de fótons únicos e um divisor de feixes, mandando metade deles para um interferômetro de Michelson e a outra metade para um HBT. O efeito puramente quântico de $g^{(2)} = 0$ será observado no HBT; enquanto o efeito clássico de franjas de interferência será observado no Michelson-Morley. Este é um ótimo experimento para se observar a dualidade onda-partícula da luz.

Bibliografia

Quantização dos campos

- [1] GRYNBERG, Gilbert. "Introduction to Quantum Optics *From the semi-classical approach to quantized light*". Cambridge University Press. 2010
- [2] SCULLY, Marlan. "Quantum Optics". Cambridge University Press. 1997

Hanbury Brown-Twiss

- [1] FOX, Mark. "Quantum optics *An Introduction*". 1ª ed. New York: Oxford University Press Inc. 2006
- [2] RATH, Stephen. http://www.quantum.physik.uni-mainz.de/Dateien/__lectures__2004__ss04_quantenoptikseminar_hanburybrowntwiss.pdf. Acessado no dia 18/06/2017 às 11:34.
- [3] KIMBLE, H.J., DAGENAIS, M., MANDEL, L.. "Photon Antibunching in Resonance Fluorescence". *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691 (1977).