

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ELETROMAGNETISMO 2

MONOGRAFIA

**Radiação Cherenkov na
Detecção de Neutrinos**

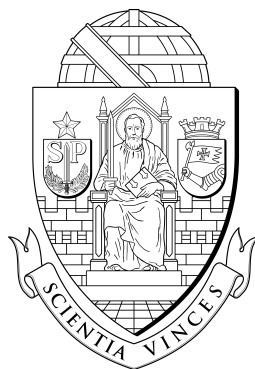
Autor:

Luiz COUTO CORRÊA
PINTO FILHO

Professor:

Raul ABRAMO

21 de junho de 2017



Sumário

1	Introdução	2
2	Radiação Cherenkov	2
2.1	Perda de Energia Devido a Colisões	2
2.2	Efeito Densidade	6
2.3	Radiação Cherenkov	10
3	Radiação Cherenkov na Detecção de Neutrinos	14
4	Referências	17

1 Introdução

Durante o início das pesquisas com radioatividade, foi observado que algumas fontes de radiação β e radiação γ , principalmente quando inseridas em alguma solução, emitiam uma suave luz azul[1]. A princípio se atribuiu a esse fenômeno a luminescência proveniente da ionização dos elétrons. No entanto, logo se percebeu que essa explicação não poderia ser correta, já que o espectro da luz era contínuo e tinha pouca dependência do meio em que a fonte estava inserida, contrastando com o observado nos casos de radiação emitida por ionização.

Os primeiros trabalhos a tentar explicar esse fenômeno foram desenvolvidos por Mallet que realizou uma série de experimentos mas não se propôs a desenvolver uma teoria para explicá-lo. Somente anos depois foi que Cherenkov conseguiu demonstrar experimentalmente que o mecanismo de produção de luz pela passagem de partículas rápidas em meios transparentes é distinto da luminescência. Cherenkov também descobriu que essa luz era polarizada e que possuía características direcionais.

Mais ou menos na mesma época, Frank e Tamm deram um tratamento usando a teoria clássica do electromagnetismo que conseguiu explicar teoricamente esse fenômeno. Usaremos a seguir uma abordagem que nos permitirá reproduzir o resultado de Frank e Tamm e derivar teoricamente as propriedades medidas por Cherenkov.

2 Radiação Cherenkov

Para entender como a radiação Cherenkov é capaz de emitir um espectro tão característico, distinto da luminescência, causa inicialmente atribuída a esse efeito, devemos considerar o que acontece com uma partícula rápida ao atravessar um meio[2].

2.1 Perda de Energia Devido a Colisões

Consideremos uma partícula relativística, de carga ze (z é o número de partículas carregadas e e é carga elementar) e massa M . A energia da partícula é $E = \gamma Mc^2$ e seu momento é $P = \gamma \beta Mc$. Lembrando que γ

é o fator de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1)$$

que depende da velocidade v da partícula; c é a velocidade da luz no vácuo; e β é a razão entre a velocidade da partícula e a velocidade da luz no vácuo

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (2)$$

O espalhamento dessa partícula por um elétron de carga $-e$ e massa m , considerando $M \gg m$, é obtido através da fórmula de Rutherford para o espalhamento coulombiano:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{ze^2}{2pv} \right)^2 \csc^4 \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad (3)$$

onde $p = \gamma\beta mc$, e $v = \beta c$, são o momento e a velocidade do elétron no referencial da partícula pesada.

A equação (3) pode ser escrita em uma forma invariante sob transformações de Lorentz se considerarmos a transferência do 4-momento ao quadrado $Q^2 = -(P - P')^2$. Para o espalhamento elástico

$$Q^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4)$$

Como o potencial coulombiano possui simetria axial, podemos escrever $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ e dado que $dQ^2 = 2p^2 \sin \theta d\theta$, obtemos:

$$d\Omega = \frac{\pi}{p^2} dQ^2 \quad (5)$$

Com isso podemos escrever a equação 3 como:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} \frac{p^2}{\pi} = \frac{z^2 e^4}{4p^2 v^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (6)$$

Finalmente, substituindo p em função de Q e sabendo que $v = \beta c$, obtemos:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = 4\pi \left(\frac{ze^2}{\beta c Q^2} \right)^2. \quad (7)$$

Podemos agora determinar a seção de choque dada uma perda de energia T da partícula incidente. Para tanto basta notar que o invariante Q^2 no referencial do elétron é $Q^2 = 2mT$ (já que $T = Q^2/2m$ é a energia cinética transferida) e $dQ^2 = 2m dT$. Substituindo em (7), obtemos:

$$\frac{d\sigma}{dT} = 2\pi \frac{z^2 e^4}{mc^2 \beta^2 T^2}. \quad (8)$$

A equação (8) é válida no intervalo $T_{min} < T < T_{max}$, onde $T_{min} \gtrsim \hbar \langle \omega \rangle$, $\hbar \langle \omega \rangle$ é uma estimativa da energia de ligação atômica média, e T_{max} é a energia cinética máxima transferida considerando uma colisão frontal, ou seja, quando a velocidade do elétron é invertida. Para colisões entre partículas não muito energéticas: $T_{max} = 2\gamma^2 \beta^2 mc^2$.

Se levarmos em conta o spin do elétron, devemos acrescentar uma correção quântica devido a esse efeito, e a equação (8) se torna:

$$\left(\frac{d\sigma}{dT} \right)_{qm} = \frac{2\pi z^2 e^4}{mc^2 \beta^2 T^2} \left(1 - \beta^2 \frac{T}{T_{max}} \right). \quad (9)$$

A partir da equação (9) podemos obter uma relação que determina a quantidade de energia perdida por uma partícula pesada ao atravessar um meio com N átomos por unidade de volume, cada um com Z elétrons. Considerando a partícula com energia ε ($\varepsilon \ll T_{max}$ e $\varepsilon \gg \hbar \langle \omega \rangle$) obtemos, para transferências de energia $T > \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx}(T > \varepsilon) &= NZ \int_{\varepsilon}^{T_{max}} T \frac{d\sigma}{dT} dT \\ &= 2\pi NZ \frac{z^2 e^4}{mc^2 \beta^2} \left[\ln \left(\frac{2\gamma^2 \beta^2 mc^2}{\varepsilon} \right) - \beta^2 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

O resultado para transferências de energia $T < \varepsilon$, incluindo energias próximas à energia de ligação ($\hbar \langle \omega \rangle$) só pode ser tratado apropriadamente através da mecânica quântica [2]. O resultado é dado por:

$$\frac{dE}{dx}(T < \varepsilon) = 2\pi NZ \frac{z^2 e^4}{mc^2 \beta^2} \{ \ln [B_q^2(\varepsilon)] - \beta^2 \}, \quad (11)$$

onde,

$$B_q(\varepsilon) = \frac{\gamma v (2m\varepsilon)^{1/2}}{\hbar \langle \omega \rangle}. \quad (12)$$

A energia total perdida por unidade de comprimento é dada pela soma das equações (10) e (11):

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi NZ \frac{z^2 e^4}{mc^2 \beta^2} \{ \ln [B_q^2(\varepsilon)] - \beta^2 \} \quad (13)$$

$$B_q = \frac{2\gamma^2 \beta^2 mc^2}{\hbar \langle \omega \rangle}. \quad (14)$$

O gráfico da figura 1 apresenta uma comparação entre o tratamento considerando a energia total perdida (equação 13), ou seja, considerando todas as perdas de energia envolvidas, e a energia perdida em colisões leves (equação 11).

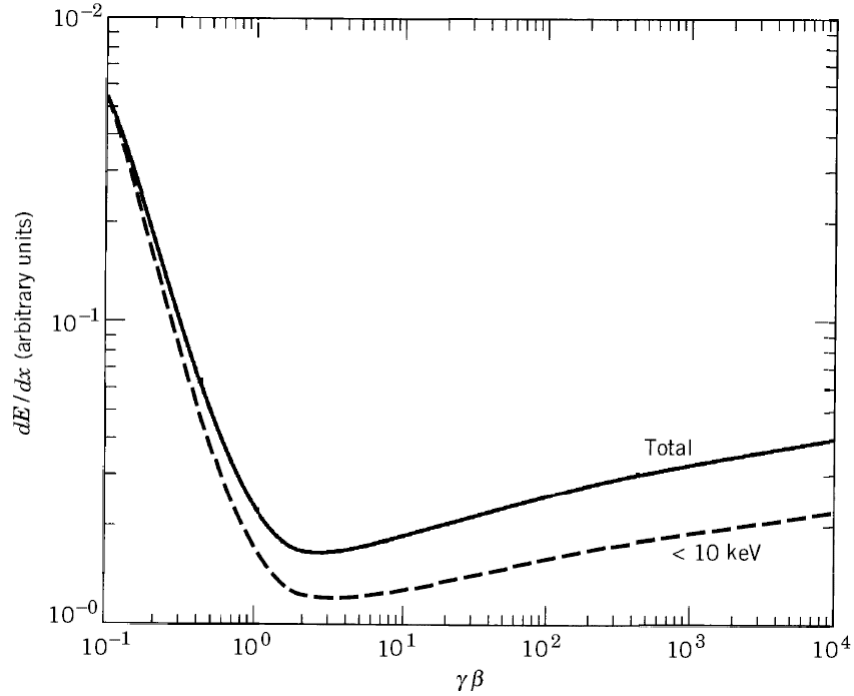


Figura 1: Perda de energia da partícula incidente em função de $\gamma\beta$. A linha sólida corresponde à energia total perdida, já a linha tracejada corresponde à energia em colisões leves $\varepsilon < 10 \text{ keV}$. *Fonte: Jackson, **Classical Electrodynamics**.*

No entanto, para partículas ultra-relativísticas, como os neutrinos detectados através da radiação Cherenkov, a perda de energia é menor do que

a prevista pela equação (13). Isso ocorre pois a partícula ultra-relativística percebe um aumento na densidade do meio devido à contração do espaço. Essa redução na perda de energia é conhecida como efeito densidade.

2.2 Efeito Densidade

O tratamento dado até o momento não dá conta do efeito densidade pois consideramos, implicitamente, que os efeitos do campo da partícula incidente influenciavam um elétron em um átomo de cada vez. Em seguida, somávamos todas as contribuições, individualmente, sem considerar as interações entre elas no intervalo de parâmetro de impacto relevante ($b_{min} < b < b_{max}$).

Entretanto, agora, b_{max} é muito grande quando comparado às dimensões atômicas. Isso significa que átomos próximos serão influenciados pelo campo da partícula incidente. Estes, por sua vez, produzirão campos perturbativos que influenciarão o átomo escolhido, o que modificará sua resposta ao campo da partícula incidente.

Essa modificação dos campos deve ser levada em conta ao se calcular a transferência de energia em colisões distantes. Para colisões próximas, considera-se interações individuais como feito anteriormente. A separação entre os dois limites é da ordem do raio atômico e denotaremos por a .

Vamos considerar colisões com parâmetro de impacto $b \geq a$ e admitir que os campos no meio podem ser calculados considerando uma constante dielétrica macroscópica $\epsilon(\omega)$. Para b muito próximo de a essa aproximação perde validade, mas é boa para a grande maioria das colisões.

Para uma partícula relativística, consideremos 4-potencial eletromagnético $A_\mu(x)$ e a 4-corrente $J_\mu(x)$. A equação da onda e o *gauge* de Lorentz são dados por:

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad , \quad \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (15)$$

onde $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ e $J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$.

A equação (15) pode ser aberta em duas da seguinte forma:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 4\pi\rho, \quad (17)$$

com a condição de Lorentz:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (18)$$

As equações (16) e (17) são resolvidas mais facilmente no espaço de Fourier. Para tanto, basta aplicar nelas a transformada de Fourier

$$F(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \int d\omega F(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t}. \quad (19)$$

Isso resulta:

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega), \quad (20)$$

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \Phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\epsilon(\omega)} \rho(\mathbf{k}, \omega). \quad (21)$$

A densidade de carga:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = z e \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) \quad (22)$$

e a densidade de corrente

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v} \rho(\mathbf{x}, t) \quad (23)$$

so tornam, no espaço de Fourier:

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = \frac{z e}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (24)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{v} \rho(\mathbf{k}, \omega). \quad (25)$$

Substituindo em (20) e (21) obtemos os potenciais:

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2 z e}{\epsilon(\omega)} \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)}, \quad (26)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon(\omega) \frac{\mathbf{v}}{c} \Phi(\mathbf{k}, \omega). \quad (27)$$

Podemos agora aplicar as definições dos campos em termos dos potenciais:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi, \quad (28)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (29)$$

para obter:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = i \left[\frac{\omega \epsilon(\omega)}{c} \frac{\mathbf{v}}{c} - \mathbf{k} \right] \Phi(\mathbf{k}, \omega), \quad (30)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = i \epsilon(\omega) \mathbf{k} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \Phi(\mathbf{k}, \omega). \quad (31)$$

Para obter a perda de energia para um elétron em um átomo com parâmetro de impacto b , devemos avaliar:

$$\Delta E = -e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} dt = 2e \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i \omega \mathbf{x}(\omega) \cdot \mathbf{E}^*(\omega) d\omega. \quad (32)$$

Lembrando que no espaço de Fourier:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \rightarrow i \omega \mathbf{x}(\omega) \quad (33)$$

e $\mathbf{E}(\omega)$ é a transformada de Fourier temporal do campo eletromagnético a uma distância b perpendicular à trajetória da partícula que se move ao longo do eixo x , $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Sendo assim:

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i b k_2}, \quad (34)$$

onde o observador se encontra na coordenada $\mathbf{x} = (0, b, 0)$ e $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} = b k_2$.

Vamos agora determinar $E_1(\omega)$ onde $\mathbf{E}(\omega) = (E_1(\omega), E_2(\omega), E_3(\omega))$. Substituindo explicitamente as componentes paralelas à velocidade das equações (30) e (26) obtemos $E_1(\omega)$:

$$E_1(\omega) = \frac{2i z e}{\epsilon(\omega)(2\pi)^{3/2}} \int d^3k k e^{i b k_2} \left[\frac{\omega \epsilon(\omega) v}{c^2} - k_1 \right] \frac{\delta(\omega - v k_1)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)}. \quad (35)$$

Fazendo $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$,

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \beta^2 \epsilon(\omega)] \quad (36)$$

e notando que a integral em k_1 desaparece devido à $\delta(\omega - v k_1)$. Fazendo $k_1 = \omega/v$, obtemos:

$$E_1(\omega) = -\frac{2i z e \omega}{(2\pi)^{3/2} v^2} \left[\frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{i b k_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{k_2^2 + k_3^2 + \lambda^2}. \quad (37)$$

A integral em k_3 é simples e seu resultado é:

$$\frac{\pi}{(k_2^2 + \lambda^2)^{1/2}}. \quad (38)$$

Sendo assim podemos escrever:

$$E_1(\omega) = -\frac{ize\omega}{(2\pi)^{1/2}v^2} \left[\frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibk_2}}{(k_2^2 + \lambda^2)^{1/2}} dk_2. \quad (39)$$

Agora, integral da equação(39) pode ser vista como uma representação da função de Bessel Modificada de ordem zero[3]:

$$2K_0(\lambda b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibk_2}}{(k_2^2 + \lambda^2)^{1/2}} dk_2, \quad (40)$$

resultando em:

$$E_1(\omega) = -\frac{ize\omega}{v^2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2 \right] K_0(\lambda b). \quad (41)$$

De forma análoga obtemos:

$$\begin{aligned} E_2(\omega) &= \frac{ze}{v} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{\epsilon(\omega)} K_1(\lambda b), \\ B_3(\omega) &= \epsilon(\omega)\beta E_2(\omega). \end{aligned} \quad (42)$$

Podemos agora utilizar os campos encontrados para determinar a transferência de energia. No entanto, antes vamos reescrever a equação (32) considerando todas as interações dos j elétrons presentes na região dada pelo parâmetro de impacto b :

$$\Delta E = 2e \sum_j f_j \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i\omega \mathbf{x}_j(\omega) \cdot \mathbf{E}^*(\omega) d\omega. \quad (43)$$

Podemos escrever a soma dos momentos de dipolo $-e \sum_j f_j \mathbf{x}_j(\omega)$ em termos da constante dielétrica como:

$$-e \sum_j f_j \mathbf{x}_j(\omega) = \frac{1}{4\pi N} [\epsilon(\omega) - 1] \mathbf{E}(\omega), \quad (44)$$

onde N é o número de átomos por unidade de volume. Sendo assim:

$$\Delta E(b) = \frac{1}{2\pi N} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} -i\omega \epsilon(\omega) |E(\omega)|^2 d\omega. \quad (45)$$

A energia por unidade de comprimento em colisões com parâmetro de impacto $b \geq a$ é:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = 2\pi N \int_a^\infty \Delta E(b) b db. \quad (46)$$

Substituindo (41) e (42) obtém-se:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{2(z e)^2}{\pi v^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty i\omega \lambda^* a K_1(\lambda^* a) K_0(\lambda a) \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2\right) d\omega. \quad (47)$$

Esse resultado pode ser obtido de outra forma considerando que o fluxo de energia eletromagnética através de um cilindro de raio a em torno do caminho da partícula incidente, é equivalente à energia perdida por unidade de tempo:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt} = -\frac{c}{4\pi v} \int_{-\infty}^\infty 2\pi a B_3 E_1 dx. \quad (48)$$

Fazendo a mudança de variável $dx = v dt$:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = -\frac{ca}{2} \int_{-\infty}^\infty B_3(t) E_1(t) dt, \quad (49)$$

cuja expressão no domínio das frequências é:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} = -ca \operatorname{Re} \int_0^\infty B_3^*(\omega) E_1(\omega) d\omega. \quad (50)$$

2.3 Radiação Cherenkov

As expressões (47) e (50) representam a quantidade de energia perdida pela partícula, por unidade de comprimento, em regiões cuja distância é maior que $b = a$. Nelas, consideramos que a era da ordem do raio atômico. No entanto, para a radiação Cherenkov, devemos considerar outro o limite, o limite em que $|\lambda a| \gg 1$, pois dessa forma podemos examinar como a energia é depositada através do meio. Neste caso, as funções de Bessel modificadas assumem seus limites assintóticos[3]:

$$K_0(\lambda b) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda b}} e^{-\lambda b} \left\{ 1 - \frac{1}{8\lambda b} + \frac{9}{2!(8\lambda b)^2} + \dots \right\}, \quad (51)$$

$$K_1(\lambda b) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda b}} e^{-\lambda b} \left\{ 1 + \frac{3}{8\lambda b} - \frac{15}{2!(8\lambda b)^2} + \dots \right\}. \quad (52)$$

Como tomamos o limite $|\lambda a| \gg 1$, podemos desprezar os termos de ordem 1 e superior, sendo assim as funções de Bessel modificadas assumem a forma:

$$K_0(\lambda b) = K_1(\lambda b) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda b}} e^{-\lambda b}. \quad (53)$$

Nessas condições, os campos (41) e (42) se tornam:

$$\begin{aligned} E_1(\omega, b) &\longrightarrow i \frac{ze\omega}{c^2} \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)} \right] \frac{e^{-\lambda b}}{\sqrt{\lambda b}}, \\ E_2(\omega, b) &\longrightarrow \frac{ze}{v\epsilon(\omega)} \sqrt{\frac{\lambda}{b}} e^{-\lambda b}, \\ B_3(\omega, b) &\longrightarrow \beta\epsilon(\omega) E_2(\omega, b), \end{aligned} \quad (54)$$

e o integrando em (50) se torna:

$$(-caB_3^* E_1) \longrightarrow \frac{z^2 e^2}{c^2} \left(-i \sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}} \right) \omega \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)} \right] e^{-(\lambda+\lambda^*)a} \quad (55)$$

Com essa expressão podemos obter a energia depositada em regiões distantes da trajetória da partícula. Se desprezarmos a absorção do meio temos que $\epsilon(\omega)$ é real e dado que

$$\lambda = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} [1 - \beta^2 \epsilon(\omega)]}, \quad (56)$$

se $\beta^2 \epsilon(\omega) > 1$, λ será imaginário puro. Perceba que se λ for puramente imaginário a exponencial na equação (55) desaparece ($\lambda + \lambda^* = 0$) e a expressão fica independente de a , ou seja, passa a ser permitido que alguma parte da energia escape para o infinito na forma de radiação. É justamente a essa radiação que damos o nome de Radiação Cherenkov.

Vejam agora algumas propriedades importantes dessa radiação. A condição para seu surgimento $\beta^2 \epsilon(\omega) > 1$ implica em uma relação para a velocidade da partícula. Reescrevendo essa equação obtemos:

$$v > \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}, \quad (57)$$

ou seja, a velocidade da partícula deve ser maior que a velocidade de fase da onda eletromagnética com frequência ω no meio para que haja emissão de

radiação Cherenkov nessa frequência. Por esse motivo a radiação Cherenkov pode ser usada na detecção de neutrinos ultra-relativísticos, como veremos mais adiante. A título de ilustração, em água, por exemplo, a velocidade de fase da onda EM é da ordem de $0.75c$, ou seja um neutrino com velocidade superior a essa ao se chocar com um elétron já seria capaz de induzir a emissão de radiação Cherenkov.

Para determinar o espectro da radiação Cherenkov, vamos considerar que

$$\lambda = -i|\lambda| \quad \text{para} \quad \beta^2\epsilon > 1. \quad (58)$$

Isso significa que $(\lambda^*/\lambda)^{1/2} = i$ e a equação (55) é real e independente de a . Dessa forma obtemos a seguinte expressão para a energia radiada por unidade de distância ao longo da trajetória da partícula na forma de Radiação Cherenkov:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = \frac{(ze)^2}{c^2} \int_{\epsilon(\omega) > (1/\beta^2)} \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2\epsilon(\omega)}\right) d\omega. \quad (59)$$

A equação (59) é conhecida como Fórmula de Frank-Tamm. O integrando fornece o espectro diferencial em frequência. Perceba, como pode ser visto na figura 2, que a radiação não é emitida igualmente em todas as frequências. Ela fica limitada a uma banda onde $\epsilon(\omega) > \beta^{-2}$. Por isso sua assinatura espectral se assemelha mais a um pulso.

A frequência ω_0 indica um limite superior para a emissão de radiação Cherenkov. Acima dela $\epsilon(\omega)$ cai abaixo de 1 e a condição $\beta^2\epsilon(\omega) > 1$ deixa de ser satisfeita. Para substâncias com índices de refração próximos ao da água, ω_0 está na região do ultravioleta próximo, por isso a radiação Cherenkov tem esse espectro característico azulado. Apenas partículas com velocidade suficientemente elevada (implicando em um alargamento da banda de frequência) conseguem emitir radiação na região do visível e, normalmente, quando conseguem seu espectro fica em torno do azul.

Outra característica importante da radiação Cherenkov é seu ângulo de emissão. A grandes distâncias da trajetória da partícula os campos se tornam campos transversos e a direção de propagação é dada por $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. A partir da figura 3 verifica-se que para uma partícula se movimentando na direção x , θ_c depende apenas das componentes x e y do campo elétrico, ou seja:

$$\tan \theta_c = -\frac{E_1}{E_2}. \quad (60)$$

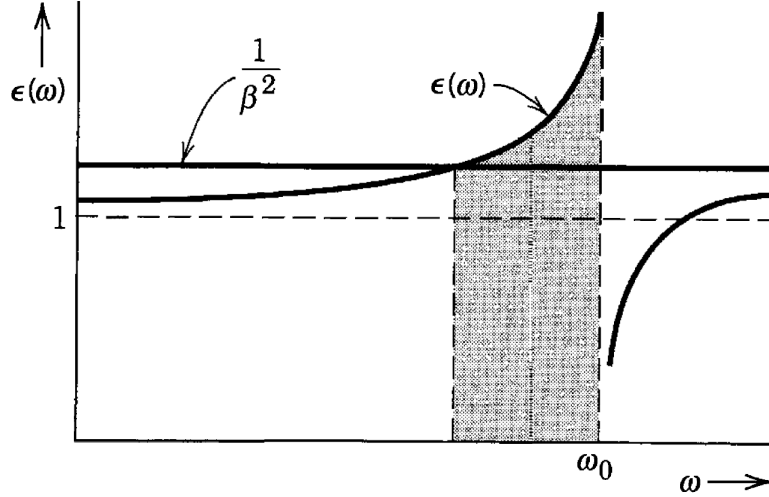


Figura 2: Banda de emissão da radiação Cherenkov. As frequências emitidas estão dentro da região hachurada, onde $\epsilon(\omega) > \beta^{-2}$. *Fonte: Jackson, Classical Electrodynamics.*

Utilizando os campos da equação (54) obtemos:

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon(\omega)}}. \quad (61)$$

Perceba que a afirmação de que os campos são transversos tem uma consequência importante, essa afirmação implica que a radiação Cherenkov é linearmente polarizada, e mais, como pode ser visto através da representação dos campos na figura 3 o vetor polarização está contido no plano que contém a direção de observação e a trajetória da partícula.

Podemos associar a emissão de radiação Cherenkov com uma onda de choque produzida por um objeto se movendo acima da velocidade do som no ar. Se a velocidade da partícula for inferior à velocidade de fase da onda EM no meio, em um ponto qualquer, as frentes de onda interferem destrutivamente e nenhuma radiação é percebida (figura 4 esquerda). Se a velocidade da partícula for superior à velocidade de fase da onda EM no meio ocorre um fenômeno semelhante ao cone de Mach (figura 4 direita) e a soma das frentes de onda, pelo princípio de Huygens-Fresnel, dão origem a uma frente de onda que se propaga na direção de θ_c .

Com essas propriedades podemos utilizar a radiação Cherenkov para de-

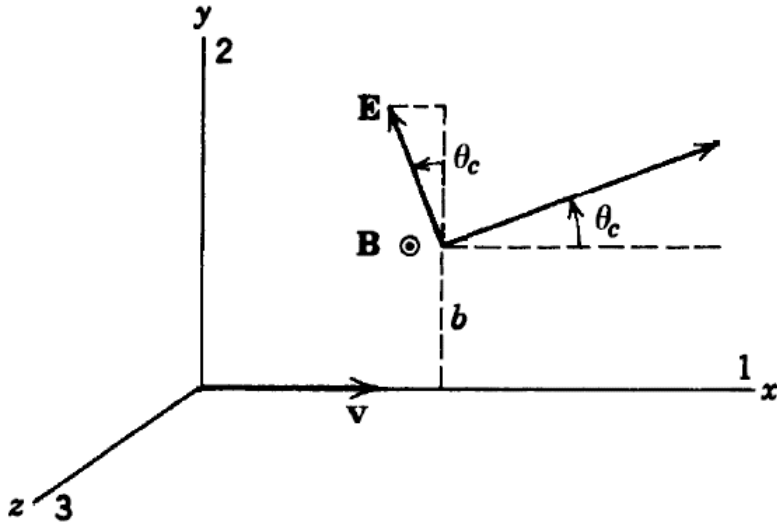


Figura 3: Ângulo θ_c de emissão da radiação Cherenkov. A direção de propagação é dada pelo produto $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. *Fonte:* Jackson, **Classical Electrodynamics**.

terminar a velocidade de neutrinos rápidos ao atravessar um meio cuja constante elétrica é conhecida. Veremos mais adiante que muitos detectores que utilizam a radiação Cherenkov para detectar neutrinos utilizam a água como meio de propagação. Veremos também que, como neutrinos são pouco interagentes, as taxas de detecção são baixas e muitos neutrinos são necessários para que se consiga realizar uma medida.

3 Radiação Cherenkov na Detecção de Neutrinos

Uma das técnicas de detecção de neutrinos consiste em medir o espectro luminoso emitido por elétrons ao serem acelerados pela colisão de neutrinos altamente energéticos. No entanto, devido à baixa interação de neutrinos com a matéria, a taxa efetiva de colisões é baixíssima, tornando necessário recorrer a outros tipos de reação.

Atualmente, detectores mais sensíveis são capazes detectar outros tipos de colisões, é o caso do *Sudbury Neutrino Observatory* (SNO), que é capaz

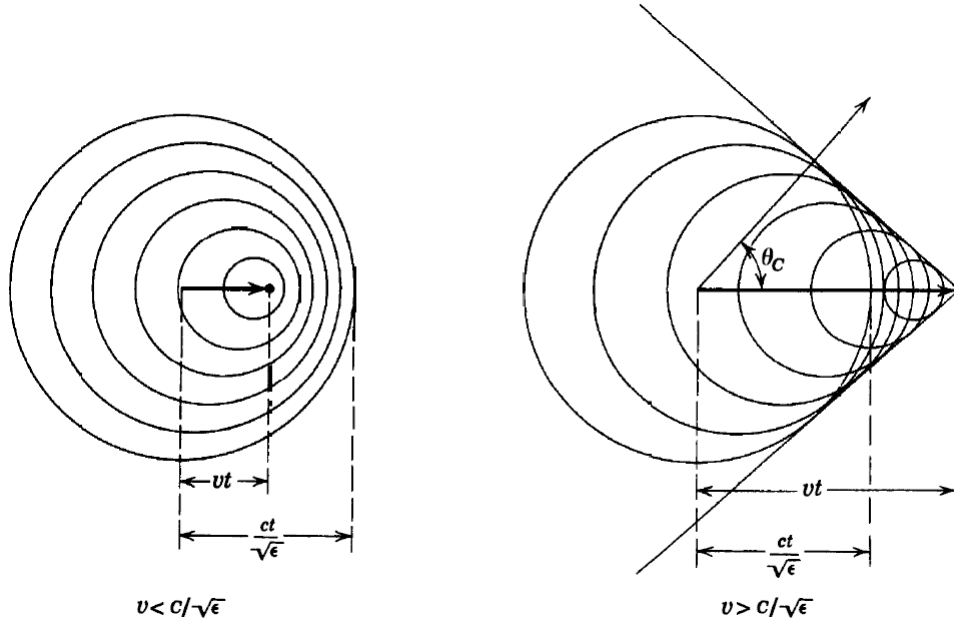
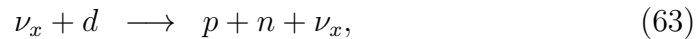
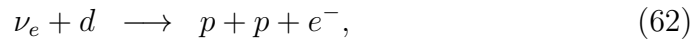


Figura 4: Frentes de onda esféricas de uma partícula viajando a baixo e acima da velocidade de fase da onda EM no meio. *Fonte:* Jackson, **Classical Electrodynamics**.

de detectar, além de radiação Cherenkov proveniente da colisão de Neutrinos com elétrons, a radiação proveniente da colisão de neutrinos com o dêuteron sendo, portanto, capaz de enxergar as seguintes reações[4]:



Perceba que a reação (64) nada mais é do que o espalhamento tratado na revisão teórica deste trabalho.

O SNO (figura 5) é um detector Cherenkov localizado a uma profundidade que equivale a 6010m de água em uma mina próxima à cidade de Sudbury, Ontário, Canadá. O detector usa água pesada (fonte de deutério) ultra pura contida em uma casca esférica de acrílico transparente com diâmetro de 12m para detectar neutrinos provenientes do Sol. Fótons Cherenkov gerado pelas reações são detectados por 9456 tubos fotomultiplicadores montados em uma esfera geodésica de aço inoxidável com 17.8m de diâmetro.

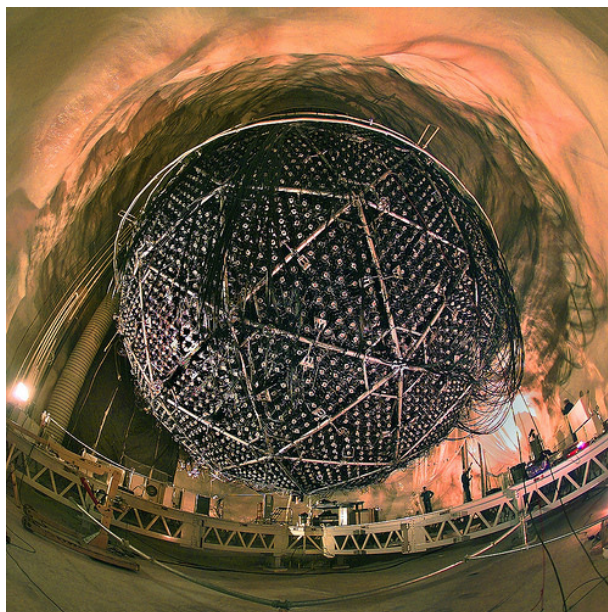


Figura 5: Detector do *Sudbury Neutrino Observatory* e suas quase 10.000 fotomultiplicadoras.

O SNO faz parte da colaboração responsável por demonstrar que neutrinos mudam de sabor. Esse fato levou à conclusão de que neutrinos devem ter massa e esse trabalho resultou no prêmio Nobel de 2015.

Muitos outros trabalhos utilizam radiação Cherenkov para detecção de neutrinos, essa técnica é tão importante que uma das primeiras observações de que supernovas liberam *bursts* de neutrino foi feita ainda em 1987[5]. Existe uma área da astronomia denominada astronomia de neutrino totalmente dedicada a observar objetos astronômicos utilizando detectores de neutrinos.

4 Referências

- [1] J. V. Jelley, “Cerenkov radiation and its applications,” *British Journal of Applied Physics*, vol. 6, no. 7, p. 227, 1955.
- [2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 3 ed., 1998.
- [3] M. Abramowitz, I. A. Stegun, and D. Miller, “Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series No. 55),” 1965.
- [4] SNO Collaboration, “Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory,” vol. 89, no. 1, pp. 1–6, 2002.
- [5] R. M. Bionta, G. Blewitt, C. B. Bratton, D. Casper, A. Ciocio, R. Claus, B. Cortez, M. Crouch, S. T. Dye, S. Errede, G. W. Foster, W. Gajewski, K. S. Ganezer, M. Goldhaber, T. J. Haines, T. W. Jones, D. Kielczewska, W. R. Kropp, J. G. Learned, J. M. LoSecco, J. Matthews, R. Miller, M. S. Mudan, H. S. Park, L. R. Price, F. Reines, J. Schultz, S. Seidel, E. Shumard, D. Sinclair, H. W. Sobel, J. L. Stone, L. R. Sulak, R. Svoboda, G. Thornton, J. C. Van Der Velde, and C. Wuest, “Observation of a neutrino burst in coincidence with supernova 1987A in the large magellanic cloud,” *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 14, pp. 1494–1496, 1987.