

Monografia - Eletromagnetismo II

Efeito Bremsstrahlung e grandes estruturas cósmicas

Giulio H. Camilo
Universidade de São Paulo

19 de junho de 2017

Resumo

O objetivo deste trabalho é servir como um complemento ao final do curso de *Eletromagnetismo II*, com a tentativa de fazer um elo entre a teoria e o experimento. Aqui, faz-se uma revisão levemente detalhada sobre radiação eletromagnética emitida por partículas aceleradas e o efeito *Bremsstrahlung* no regime não relativístico. Além disso, é dado um exemplo de como esse efeito aparece na natureza, em especial na Astrofísica: o uso de espectroscopia de raios-X para estudo de grandes estruturas.

1 Introdução

O estudo de partículas carregadas não é recente. Na verdade, as expressões para os potenciais e campos eletromagnéticos de uma partícula pontual carregada em movimento foram derivadas de forma independente por *Alfred-Marie Liénard* em 1898 e por *Emil Wiechert* em 1900. Esse estudo possibilitou o entendimento de diversos fenômenos envolvendo a interação entre partículas na natureza, em especial os fenômenos de emissão de radiação.

Entre os principais efeitos de emissão de radiação eletromagnética envolvendo partículas carregadas, podemos citar: *Radiação Síncrotron*, *Radiação Cherenkov* e o *Bremsstrahlung*. Será dado mais atenção a este último efeito neste trabalho, embora parte das ferramentas necessárias para entendimento de outros, tal como *Radiação Síncrotron*, seja desenvolvida aqui.

A intenção é mostrar que, apesar de ser um fenômeno já bem entendido há anos, o *Bremsstrahlung* ainda é de grande utilidade nos dias atuais, servindo como peça fundamental para compreensão das grandes estruturas de matéria no nosso Universo, tais como aglomerados de galáxias. Dito de outra maneira, além do desenvolvimento de uma pequena parte da teoria eletromagnética (seções 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5, baseado nas referências [1] e [2]), faz-se uma conexão com áreas da física que, para alguns, talvez não estivessem relacionadas àquela: Cosmologia e Astrofísica.

2 Efeito Bremsstrahlung

2.1 Potenciais e campos de Liénard-Wiechert

Consideremos uma partícula de carga e com trajetória descrita por $\mathbf{r}(t)$ em um referencial inercial. Nesse referencial, podemos escrever a densidade de carga $\rho(\mathbf{x}, t)$ e a densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ como:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= e \delta[\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)] \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= e \mathbf{v}(t) \delta[\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)]\end{aligned}\tag{1}$$

em que $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ é a velocidade da carga no mesmo referencial. Introduzindo os quadri vetores posição, $r^\alpha = [ct, \mathbf{r}(t)]$, e velocidade, $V^\alpha = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$, podemos escrever ainda um quadri vetor envolvendo a densidade e corrente dessa carga através de uma integral no tempo próprio da partícula:

$$J^\alpha(x) = e c \int d\tau V^\alpha(\tau) \delta^{(4)}[x - r(\tau)]\tag{2}$$

de modo que: $J^\alpha = (\rho c, \mathbf{J})$.

Sabemos que no calibre de Lorenz, os potenciais observados satisfazem a equação de onda em quatro dimensões com a fonte sendo $\frac{4\pi}{c} J^\alpha$, isto é, o quadripotencial $A^\alpha \equiv (\Phi, \mathbf{A})$ satisfaz:

$$\begin{aligned}\square A^\alpha &= \frac{4\pi}{c} J^\alpha \\ \partial_\alpha A^\alpha &= 0 \text{ (condição de Lorenz)}\end{aligned}\tag{3}$$

Os potenciais podem então ser encontrados utilizando a função de Green, $D(x-x')$, para tal operador:

$$A^\alpha(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D(x-x') J^\alpha(x')\tag{4}$$

Com $D(x-x')$ sendo dado, usando a função de Heaviside, por:

$$D(x-x') = \frac{\theta(x_0-x'_0)}{2\pi} \delta[(x-x')^2]\tag{5}$$

Com a quadricorrente dada como anteriormente, integrando sobre d^4x' ficamos com:

$$A^\alpha(x) = 2e \int d\tau V^\alpha(\tau) \theta[x_0 - r_0(\tau)] \delta[x - r(\tau)]^2\tag{6}$$

Essa última integral é resolvida utilizando o fato de que somente $\tau = \tau_0$ contribui nesse cálculo, isso porque τ_0 é definido de modo que $[x - r(\tau_0)]^2 = 0$, sendo o instante no passado referente à posição da partícula no momento em que ela gera o campo que viaja por uma distância $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau_0)|$ com velocidade igual à da luz até o ponto de observação atual. Usando a propriedade das funções delta de dirac, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\delta[x - r(\tau)]^2 &= \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{\left| \frac{d}{d\tau} [x - r(\tau)]^2 \right|} \\ &= \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{2[x - r(\tau)]_\beta V^\beta(\tau)}\end{aligned}\tag{7}$$

Portanto,

$$A^\alpha = \left. \frac{e V^\alpha(\tau)}{[x - r(\tau)]_\beta V^\beta(\tau)} \right|_{\tau=\tau_0}\tag{8}$$

Se \mathbf{n} representa o vetor unitário na direção $\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau)$ e $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}(\tau)/c$, podemos ainda, escrever os potenciais mais explicitamente como:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}, t) &= \left[\frac{e}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) R} \right]_{\tau=\tau_0} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \left[\frac{e\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) R} \right]_{\tau=\tau_0}\end{aligned}\tag{9}$$

Com esses potenciais em mãos, podemos calcular o campo elétrico através de:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi\tag{10}$$

Para esse cálculo, algumas relações ajudam:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau} &= 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} & \frac{d\mathbf{n}}{dt} &= \frac{c}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) & \frac{dR}{dt} &= -c \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \\ \nabla R &= \frac{\mathbf{n}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} & \nabla \tau &= -\frac{\mathbf{n}/c}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})}\end{aligned}\tag{11}$$

Com isso, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{e}{R^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} [\boldsymbol{\beta}(-c\beta^2 + \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n} R + c \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) + \dot{\boldsymbol{\beta}}(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) R] \\ \nabla \Phi &= -\frac{e}{R^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} [\mathbf{n}(1 - \beta^2 + \frac{R}{c} \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n}) - \boldsymbol{\beta}(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})]\end{aligned}\tag{12}$$

E, finalmente, podemos escrever a expressão para o campo elétrico como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = e \left[\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 R^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right]_{\tau=\tau_0} + \frac{e}{c} \left[\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right]_{\tau=\tau_0} \quad (13)$$

O campo magnético pode ser obtido através de $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, mas se resume a:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\tau=\tau_0} = e \left[\frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}}{\gamma^2 R^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right]_{\tau=\tau_0} + \frac{e}{c} \left[\frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n} \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n} + \dot{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{n} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{n}}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right]_{\tau=\tau_0} \quad (14)$$

2.2 Potência total irradiada e distribuição angular da radiação

Na expressão encontrada anteriormente para o campo elétrico de uma partícula carregada em movimento, escrita de uma maneira conveniente, vemos que esse campo se decompõe em duas partes: uma dependente somente da velocidade (decai com $1/R^2$) e outra em que aparece a aceleração. Quando falamos de radiação, estamos interessados na parte do campo que “sobrevive” a longas distâncias e, sabendo que a energia transmitida através de uma frente de onda (esférica) é proporcional a $R^2|E|^2$, podemos dizer que aquela componente dependente da aceleração (daqui em diante \mathbf{E}_a) é a responsável pela radiação.

Explicitamente, temos:

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{c} \left[\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{R(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right]_{\tau=\tau_0} \quad (15)$$

Da definição de vetor de Poynting podemos escrever:

$$\mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_a|^2 \mathbf{n} \quad (16)$$

Com isso, a componente radial desse vetor se escreve:

$$[\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}]_{\tau=\tau_0} = \frac{e^2}{4\pi c} \left\{ \frac{1}{R^2} \left| \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right|^2 \right\}_{\tau=\tau_0} \quad (17)$$

A energia total irradiada em um intervalo de tempo é a integral dessa quantidade, mas é mais interessante considerar a integração no tempo próprio da partícula, de modo que podemos definir a potência irradiada por unidade de ângulo sólido como:

$$\frac{dP(\tau)}{d\Omega} \equiv R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{d\tau} = R^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) \quad (18)$$

Se considerarmos um intervalo de tempo pequeno o suficiente para que $\boldsymbol{\beta}$, $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ e \mathbf{n} não se alterem em magnitude e direção e R não mude de forma considerável, podemos utilizar a expressão anterior para a componente radial do vetor de Poynting para escrever:

$$\frac{dP(\tau)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^5} \quad (19)$$

Essa expressão é geral, e de certa forma já nos diz como será a distribuição angular da radiação emitida pela partícula, assumindo conhecidas as relações angulares entre os vetores em questão. Estamos interessados (como será explicado mais adiante) na situação em que $\boldsymbol{\beta}$ e $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ são paralelos ou antiparalelos, com $\boldsymbol{\beta}$ formando um ângulo θ com a direção de observação \mathbf{n} , o que nos leva à distribuição:

$$\frac{dP(\tau)}{d\theta} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} \frac{\sin^3 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (20)$$

Ou seja, se a partícula fosse “fotografada” em um certo instante, a radiação estaria distribuída conforme a figura 1, sendo o eixo de simetria da figura a direção determinada pela velocidade.

Para encontrar a potência total irradiada, precisamos integrar a equação anterior sobre todos os valores de θ :

$$P(\tau) = \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin^3 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (21)$$

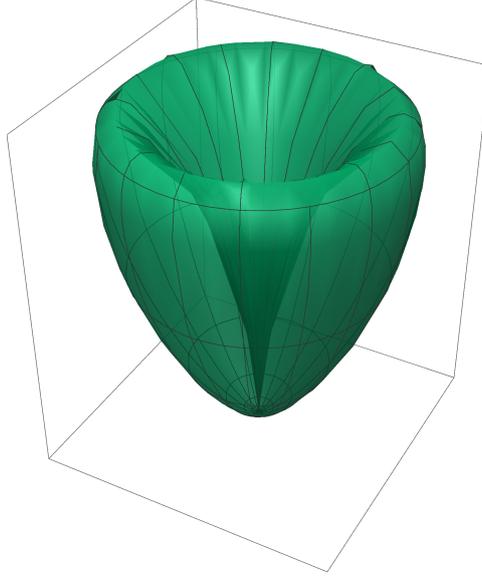


Figura 1: Distribuição angular instantânea de radiação com $\beta = 0.8$.

Com a mudança de variável $x = -\beta \cos \theta$, ficamos com:

$$P(\tau) = \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} \frac{1}{\beta} \int_{-\beta}^{\beta} dx \frac{1 - \frac{x^2}{\beta^2}}{(1+x)^5} \quad (22)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \int_{-\beta}^{\beta} dx \frac{1}{(1+x)^5} &= \frac{-1}{4\beta} (1+x)^{-4} \Big|_{-\beta}^{\beta} \\ \frac{-1}{\beta^3} \int_{-\beta}^{\beta} dx \frac{x^2}{(1+x)^5} &= \frac{-1}{\beta^3} \int_{1-\beta}^{1+\beta} dy \frac{(y-1)^2}{y^5} = \frac{-1}{\beta^3} \left(-\frac{y^{-2}}{2} + \frac{2y^{-3}}{3} - \frac{y^{-4}}{4} \right) \Big|_{1-\beta}^{1+\beta} \end{aligned} \quad (23)$$

Portanto, com um pouco de álgebra, a potência total é:

$$P(\tau) = \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} \frac{4}{3(1-\beta^2)^3} = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3} \gamma^6 \quad (24)$$

2.3 Distribuição em frequência da energia irradiada

Tendo em mente a expressão para o vetor de Poynting mostrada anteriormente, podemos dizer que a forma geral da potência irradiada por unidade de ângulo sólido é:

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\mathbf{A}(t)|^2 \quad (25)$$

com $\mathbf{A}(t) \equiv \left(\frac{c}{4\pi}\right)^{1/2} [\mathbf{RE}]_{\tau=\tau_0}$. Assim, podemos escrever a energia total irradiada por unidade de ângulo sólido integrando essa quantidade sobre t:

$$\frac{dW}{d\Omega} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt |\mathbf{A}(t)|^2 \quad (26)$$

A definição acima foi feita considerando que a aceleração se dá em um determinado intervalo de tempo, sendo nula para passado ou futuro distantes, o que permite que a integração seja sobre todos os tempos, visto que aceleração nula implica campo de radiação nulo.

Agora, através de uma transformada de Fourier podemos escrever aquela amplitude \mathbf{A} no espaço de frequências ω e, com isso, podemos expressar a energia irradiada nesse mesmo espaço:

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{A}(t) e^{i\omega t} \quad \mathbf{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{A}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (27)$$

E, então,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathbf{A}^*(\omega') \cdot \mathbf{A}(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\mathbf{A}(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (28)$$

É mais usual fazer a integração acima no intervalo de 0 a ∞ , pois o sinal da frequência não é relevante. Isso, juntamente com o fato de $\mathbf{A}(t)$ ser real (então $\mathbf{A}(-\omega) = \mathbf{A}^*(\omega)$), nos permite definir a energia irradiada por unidade de ângulo sólido e por unidade de frequência:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^{\infty} d\omega \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \rightarrow \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = 2|\mathbf{A}(\omega)|^2 \quad (29)$$

Com o campo elétrico \mathbf{E}_a encontrado inicialmente, temos:

$$\mathbf{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left[\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right]_{\tau=\tau_0} \quad (30)$$

Mudando a variável de integração para o tempo próprio da partícula, $\tau = t - \frac{R(\tau)}{c}$, e assumindo que a distância x do ponto de observação até a origem é grande o suficiente para que \mathbf{n} seja aproximadamente constante e $R(\tau) \simeq x - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(\tau)$, ficamos com:

$$\mathbf{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c} \right)^{1/2} e^{i\omega x/c} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega(\tau - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(\tau)/c)} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} \quad (31)$$

Isso nos leva a:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega(\tau - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(\tau)/c)} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} \right|^2 \quad (32)$$

Essencialmente falando, essa expressão já contém toda a informação sobre a distribuição de energia como queremos: a integral nos dá uma quantidade em função de ω e \mathbf{n} (assumindo conhecido o movimento da partícula) e, após mais uma integração, agora sobre os ângulos, teremos a quantidade de interesse.

2.4 Radiação emitida durante colisões

Na seção anterior obtivemos uma expressão geral para a distribuição por frequências da energia irradiada por uma partícula acelerada. Agora, vamos considerar o seguinte problema: uma partícula de carga e sendo espalhada por outra partícula carregada muito mais pesada, de modo que pode ser considerada parada e, portanto, com um potencial fixo durante a colisão. Nessa situação podemos utilizar diretamente o resultado anterior para descrever a distribuição de radiação da partícula de carga e devido à aceleração provocada pelo potencial da partícula parada.

Vamos estudar essa distribuição no limite de baixas frequências, isto é, $\omega \rightarrow 0$. Nesse limite é evidente que a exponencial no integrando pode ser desprezada, já que o tempo da colisão é finito. Além disso, temos que:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \right] = \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} \quad (33)$$

Essa relação pode ser verificada facilmente sabendo que $\frac{d\mathbf{n}}{d\tau} = \frac{c}{R} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})$. Portanto, se as velocidades antes e depois da colisão são $c\boldsymbol{\beta}$ e $c\boldsymbol{\beta}'$, respectivamente, adotando uma polarização $\boldsymbol{\epsilon}$ ortogonal a \mathbf{n} , de modo que $\boldsymbol{\epsilon} \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})] = -\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\beta}$, ficamos com:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \boldsymbol{\epsilon} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\beta}'}{1 - \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{n}} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \right) \right|^2 \quad (34)$$

Além disso, se considerarmos que a variação na velocidade $\Delta\boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\beta}$ é pequena, o que é válido para colisões de partículas relativísticas, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\beta}'}{1 - \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{n}} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} &\simeq \frac{(\boldsymbol{\beta} + \Delta\boldsymbol{\beta})(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) - \boldsymbol{\beta}[1 - (\boldsymbol{\beta} + \Delta\boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{n}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} \\ &\simeq \frac{\Delta\boldsymbol{\beta} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \Delta\boldsymbol{\beta})}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} \end{aligned} \quad (35)$$

Com isso,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \boldsymbol{\epsilon} \cdot \left[\frac{\Delta\boldsymbol{\beta} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \Delta\boldsymbol{\beta})}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^2} \right] \right|^2 \quad (36)$$

Pode-se mostrar, com as coordenadas apropriadas para descrever as relações entre os vetores dessa expressão e com uma integração semelhante àquela feita na seção 2.2 para a potência total, que essa intensidade distribuída por unidade de frequência é simplesmente:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{dI}{d\omega} \simeq \frac{2e^2}{3\pi c} \gamma^2 |\Delta\boldsymbol{\beta}|^2 \quad (37)$$

De outra maneira, definindo a magnitude de transferência de momento por $Q \equiv |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|$, com o momento dessa partícula espalhada de massa m sendo dado por $\mathbf{p} = \gamma m c \boldsymbol{\beta}$, temos:

$$\boxed{\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{dI}{d\omega} \simeq \frac{2e^2}{3\pi m^2 c^3} Q^2} \quad (38)$$

Esse limite é válido tanto em colisões relativísticas com pequenas variações de velocidade quanto em colisões não relativísticas. Esse último caso pode ser visto de forma imediata da equação (34) fazendo o denominador de cada termo da expressão entre parênteses igual a 1; a integração sobre todas polarizações e ângulos nos dá o fator correto multiplicando $|\Delta\boldsymbol{\beta}|^2$.

2.5 *Bremsstrahlung* em colisões *Coulombianas*

De maneira geral, *Bremsstrahlung* é o nome em alemão dado para radiação emitida por uma partícula acelerada/desacelerada por outra partícula carregada. Dentro de certos limites, portanto, esse efeito foi descrito na seções anteriores. Em especial, para uma interação *coulombiana* entre tais partículas, por exemplo um íon de carga positiva e um elétron, o potencial é central e temos o elétron sendo desacelerado praticamente na mesma direção da velocidade, assim, a distribuição angular da radiação emitida instantaneamente por ele seguirá aquela da seção 2.2.

Existe uma grandeza interessante chamada *seção de choque diferencial de radiação* que podemos definir para essas situações, isso porque ela permite relacionar o resultado da última seção (em que não especificamos o tipo de interação) com um problema específico de espalhamento através da seção de choque diferencial usual. Para isso, vamos utilizar o conhecido resultado de Rutherford para a seção de choque de um espalhamento elástico de uma partícula por um campo estático de *Coulomb*, aplicado ao nosso caso:

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega'} = \left(\frac{2e^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{(2 \sin(\theta'/2))^4} \quad (39)$$

Onde foi considerado um íon de carga igual a e , θ' é o ângulo de espalhamento e p o momento da partícula. Com a nossa definição anterior de Q temos que: $Q^2 = 4p^2 \sin^2(\theta'/2)$ e $d\Omega' = -Q d\phi' dQ/p^2$, e assim:

$$\frac{d\sigma_s}{dQ} = 8\pi \left(\frac{e^2}{\beta c} \right)^2 \frac{1}{Q^3} \quad (40)$$

E, finalmente, podemos definir a *seção de choque diferencial de radiação* como:

$$\frac{d^2\chi}{d\omega dQ} \equiv \frac{dI}{d\omega} \frac{d\sigma_s}{dQ} \quad (41)$$

Com o resultado da última seção:

$$\frac{d^2\chi}{d\omega dQ} \simeq \frac{16}{3} \frac{e^2}{c} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{\beta^2 Q} \quad (42)$$

Integrando sobre Q, ficamos com:

$$\frac{d\chi}{d\omega} \simeq \frac{16}{3} \frac{e^2}{c} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{\beta^2} \log \left(\frac{Q_{max}}{Q_{min}} \right) \quad (43)$$

Em que Q_{max} e Q_{min} são, respectivamente, o maior e menor valor de magnitude para a variação de momento na colisão. Estamos particularmente interessados no caso de colisão não relativística, em que as energias inicial e final do elétron podem ser escritas como: $E_i = p^2/2m$ e $E_f = p'^2/2m$, respectivamente, com $E_i = E_f + \hbar\omega$, sendo $\hbar\omega$ a energia do fóton emitido. Isso nos permite escrever, tendo em mente a relação anterior entre Q e p:

$$\frac{Q_{max}}{Q_{min}} = \frac{p + p'}{p - p'} = \frac{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega} \right)^2}{\hbar\omega} \quad (44)$$

E podemos ter, finalmente, a seção de choque de radiação escrita como:

$$\boxed{\frac{d\chi_{nr}}{d\omega} \simeq \frac{16}{3} \frac{e^2}{c} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{\beta^2} \log \left[\frac{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega} \right)^2}{\hbar\omega} \right]} \quad (45)$$

3 Astrofísica

3.1 *Intracluster Medium*

Esse é o nome dado, em inglês, para a região próxima ao núcleo de aglomerados de galáxias, cuja característica principal é o fato de se encontrar em forma de plasma quase completamente ionizado devido às altas temperaturas ($\sim 10^6 K$ na parte mais externa e $\sim 10^8 K$ na parte mais interna) criadas pelo forte potencial gravitacional de matéria escura. O plasma é constituído por hidrogênio e hélio ionizados e também por elementos mais pesados, principalmente ferro, além de radiação eletromagnética na forma de raios-X.

Para estudar esse meio, podemos dividi-lo basicamente em dois fenômenos: a emissão de radiação e a dinâmica do plasma em si. No estudo desse último fenômeno, principalmente através de simulações[3], sabe-se que o plasma é bem descrito pela teoria de magneto-hidrodinâmica em grandes escalas, em que se faz uso também do fato interessante de o plasma não interagir com a radiação que o permeia, ou seja, tais fenômenos podem ser estudados separadamente.

A emissão de radiação se dá por diversos processos, mas, no que diz respeito ao espectro contínuo, predomina aquela oriunda do *Bremstrahlung* devido à interação dos elétrons com os campos coulombianos dos íons; entre as outras significativas fontes de radiação contínua estão a *emissão de dois fótons* e a *captura de elétrons*. Temos ainda a emissão de linhas discretas devido a processos atômicos, como *recombinação radiativa*, *recombinação dieletrônica* e *excitação ressonante*.

3.2 Raios-X provindos do *Bremstrahlung*

A interação elétron-elétron pode ser desconsiderada no estudo da emissão de radiação pelo plasma. Sendo assim, as velocidades dos elétrons estarão distribuídas conforme a distribuição de Maxwell-Boltzmann para as temperaturas associadas, com a velocidade média sendo dada por: $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$, onde k_B é a constante de Boltzmann. Para aquela faixa de temperaturas citada, teremos $\langle v \rangle$ entre 0.021c e 0.21c, ou seja, elétrons (não relativísticos) com energia entre $10^2 eV$ e $10^4 eV$.

Raios-X têm energia tipicamente na faixa de $10^2 eV$ a $10^5 eV$. Portanto, a aceleração/desaceleração daqueles elétrons pelos íons dentro do plasma certamente irá produzir fótons nessa faixa de energia

também. A teoria que foi desenvolvida nas seções anteriores nos diz como vai ser a distribuição dessa radiação com relação à frequência do fóton emitido, sendo a descrição tão boa quanto mais próximo do núcleo estivermos.

Como a seção de choque de radiação depende da energia típica do elétron incidente e esta depende da temperatura em que o plasma se encontra, o espectro de radiação será diferente em cada parte do *Intracluster Medium*. Logo, medindo o espectro para diferentes regiões desse meio, teremos diversas informações sobre ele, informações essas que estão associadas a tal meio no seu estado não perturbado, já que os fótons emitidos não interagem com o plasma!

Dentre as principais informações que podemos tirar está a distribuição de densidade de matéria no aglomerado (o que pode ser feito pois a intensidade da radiação depende da densidade dos íons e de elétrons). O conhecimento desse perfil de densidade é de grande importância para modelos que estudam a formação de grandes estruturas, tal como o *Halo Model*[4], tendo em mente que matéria escura é a principal componente desses aglomerados.

Os raios-X podem ser observados através de telescópios de base espacial, tais como *Chandra X-Ray Observatory*, *XMM-Newton* e *ROSAT*. A figura abaixo mostra uma comparação entre uma imagem de raio-x e outra ótica de uma mesma galáxia, *Abell 2199*:

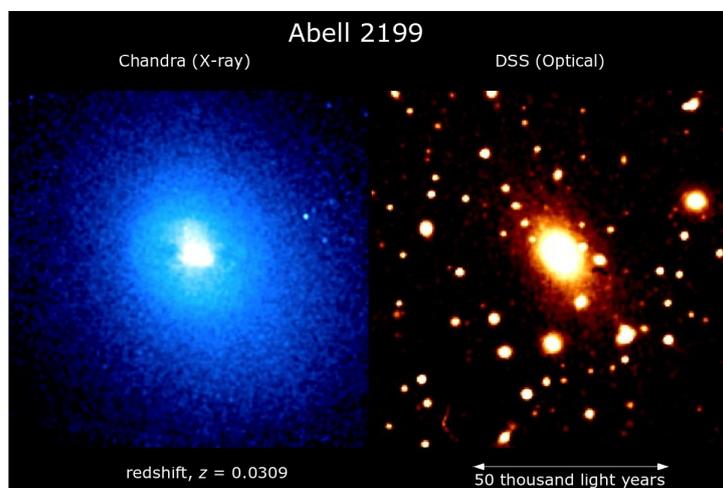


Figura 2: Imagem raio-X x imagem ótica de *Abell 2199*, Fonte: Desconhecida [5]

Observa-se de imediato que a imagem de raio-x (à esquerda) nos mostra que há muito mais matéria compondo essa galáxia do que podemos ver através da imagem ótica (isto é, através de detecção de fótons com frequência na região do visível). E com mapeamentos desse tipo, pode-se estudar a distribuição de matéria em função da distância ao centro do aglomerado, ou seja, o tal perfil de densidade.

4 Conclusão

Certamente a teoria que foi desenvolvida aqui para o efeito *Bremsstrahlung* não descreve detalhadamente os fenômenos que ocorrem no núcleo dos aglomerados de galáxias, mas servem de base para o entendimento. Assim, os espectros fornecidos somente por essa teoria não são exatamente iguais àqueles observados nas medições[6], mas carregam a característica principal sobre a continuidade.

Apesar da ênfase dada anteriormente para a importância do estudo do perfil de densidade de matéria dos aglomerados de galáxias, a parte discreta do espectro de radiação também fornece bastante informação sobre a formação do Universo: elas estão relacionadas basicamente à formação de elementos e, portanto, a sua medição em diferentes redshifts nos ajuda a entender melhor a evolução cronológica dos elementos constituintes do Universo.

Além disso, foi dado destaque para o *Bremsstrahlung* e emissão de raios-X, mas esse mesmo efeito é predominante em outras estruturas como nebulosas contendo gases ionizados, em que, diferentemente dos aglomerados, a radiação emitida tem frequência na faixa das ondas de rádio.

Referências

- [1] JACKSON, J.D., *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc.(1999);
- [2] ZANGWILL, A., *Modern Electrodynamics*, 1st edition, Cambridge University Press (2012);
- [3] MIKELLIDES, I.G. et al., *2-D Magnetohydrodynamic Simulations of Induced Plasma Dynamics in the Near-Core Region of a Galaxy Cluster*, MNRAS, (2010) arXiv:1009.0751;
- [4] COORAY & SHETH, *Halo Models of Large Scale Structure*, Phys.Rept. **372** 1-129 (2002) <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0206508>;
- [5] Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:A2199_Xray_Optical.jpg.
- [6] BOEHRINGER H. & WERNER N., *X-ray Spectroscopy of Galaxy Clusters*, Astronomy and Astrophysics Review, (2009) arXiv:0907.4277.