Eletromagnetismo II

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 1° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 6

Propagação de Energia no Guia de Onda

Como já mencionamos antes, a velocidade de fase de um onda não é necessariamente igual à velocidade com que a energia é por ela transportada. Por exemplo, a velocidade de fase com a e qual as ondas se propagam ao longo do guia é dado por

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c\frac{\sqrt{k^2 + k_{cm}^2}}{k}$$

No corte, temos $k = 0$ e, portanto $v_f = \infty$. Mas é claro que a palavra corte é usada porque, na condição de corte, não há propagação de energia ao longo do guia!

Nós definimos então a velocidade com a qual a energia se propaga, denominada velocidade de grupo, pela condição.

$$\underset{(W/m^2)}{[\text{fluxo médio de energia}]} = \underset{(m/s)}{(\text{velocidade de grupo})} \times \underset{(J/m^3)}{[\text{densidade média de energia}]}$$

ou

$$\boxed{\langle \vec{S} \rangle = \vec{v}_g \langle \varepsilon \rangle}$$

onde a média representa média temporal (num período da onda) e também média espacial, ou seja, na seção reta do guia, A média temporal do vetor de Poynting, como vimos antes, é dada por

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Re\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right)$$

e da densidade de energia

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{4}\left(\epsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{E}^* + \mu_0 \vec{H}\cdot\vec{H}^*\right)$$

Quem não se lembra desses resultados, reveja a seção 9.2.3 do livro texto e faça o problema 9.11

Aplicando para os modos TE_{mn}, temos

$$\langle S \rangle_z = \frac{1}{2} Re\left[E_x H_y^* - E_y H_x^*\right] \qquad \text{(componente na direção } z\text{)}$$

e

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{4}\left[\epsilon_0\left(E_x E_x^* + E_y E_y^*\right) + \mu_0\left(H_x H_x^* + H_y H_y^* + H_z H_z^*\right)\right]$$

Usando as relações entre E_y e H_x e entre E_x e H_y, temos

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_z &= \frac{1}{4} Re\left[\left(\frac{\mu_0\omega}{k}\right) H_y H_y^* + \left(\frac{\mu_0\omega}{k}\right) H_x H_x^*\right] \\ \therefore \langle S \rangle_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0\omega}{k}\right)\left(H_x H_x^* + H_y H_y^*\right) \end{aligned}$$

Finalmente, usando as relações entre H_y e $\partial H_y/\partial y$ e H_x e $\partial H_x/\partial x$, temos

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0\omega}{k}\right)\frac{k^2}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}\left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)^* + \left(\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)^*\right] \\ \langle S \rangle_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0\omega}{k}\right)\frac{k^2}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} H_0^2\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 sen^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) sen^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\right] \end{aligned}$$

Para fazer a média sobre a seção reta do guia, temos que integrar estas expressões nos intervalos $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b$. Mas

$$\int_0^a sen^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^a dx - \frac{1}{2}\int_0^a cos\left(2\frac{m\pi x}{a}\right) = \frac{a}{2}$$

Da mesma forma

$$\int_0^a cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right)dx = \frac{a}{2}; \quad \int_0^b cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy = \frac{b}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^b sen\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dy = \frac{b}{2}$$

Definindo, então as médias espaciais como

$$\overline{\langle S\rangle}_z = \frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b \langle S\rangle_z\,,$$

temos

$$\overline{\langle S\rangle}_z = \frac{1}{4}\frac{\omega k}{\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)^2}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\left(\frac{\mu_0 H_0^2}{2}\right)$$

Usando a relação de dispersão para os modos TE, temos

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}-k^2;$$

portanto,

$$\overline{\langle S\rangle}_z = \frac{1}{4}\frac{\omega k}{\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)^2}\left(\frac{\mu_0 H_0^2}{2}\right)$$

A densidade de energia, por outro lado, fica

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon\rangle &= \frac{1}{4}\left[\epsilon_0\left(E_xE_x^*+E_yE_y^*\right)+\mu_0\left(H_xH_x^*+H_yH_y^*+H_zH_z^*\right)\right]\\ &= \frac{\mu_0}{4}\left[\left(1+\frac{\omega^2}{k^2c^2}\right)\underbrace{\left(H_xH_x^*+H_yH_y^*\right)}_{\equiv\frac{2k}{\mu_0\omega}\overline{\langle S\rangle}_z}+H_zH_z^*\right]\end{aligned}$$

$$\therefore \langle\varepsilon\rangle = \frac{\mu_0}{4}\frac{\omega^2+k^2c^2}{k^2c^2}\frac{2k}{\mu_0\omega}\langle S\rangle_z + \frac{\mu_0}{4}H_0^2cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right)cos^2\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$$

Fazendo as médias espaciais

$$\overline{\langle\varepsilon\rangle} = \frac{\mu_0}{4}\frac{\omega^2+k^2c^2}{k^2c^2}\frac{2k}{\mu_0\omega}\frac{1}{4}\frac{\omega k c^2}{\omega^2-k^2c^2}\left(\frac{\mu_0 H_0^2}{2}\right)+\frac{\mu_0}{4}\frac{H_0^2}{4}$$

$$\overline{\langle\varepsilon\rangle} = \frac{1}{8}\left[\frac{\omega^2+k^2c^2}{\omega^2-k^2c^2}+1\right]\left(\frac{\mu_0 H_0^2}{2}\right)$$

$$\overline{\langle\varepsilon\rangle} = \frac{1}{8}\frac{2\omega^2}{\omega^2-k^2c^2}\left(\frac{\mu_0 H_0^2}{2}\right)$$

Então, a equação de transporte de energia no guia

$$\overline{\langle\varepsilon\rangle} = v_g\overline{\langle S\rangle}_z$$

fica

$$\frac{1}{4}\frac{\omega k c^2}{\omega^2-k^2c^2}\left(\frac{\mu_0 H_0^2}{2}\right) = v_g\frac{1}{4}\frac{\omega^2}{\omega^2-k^2c^2}\left(\frac{\mu_0 H_0^2}{2}\right)$$

$$\therefore v_g\frac{\omega}{k} = c^2$$

Mas ω/k é exatamente a velocidade de fase da onda ao longo do guia; assim

$$\boxed{v_g\, v_f = c^2}$$

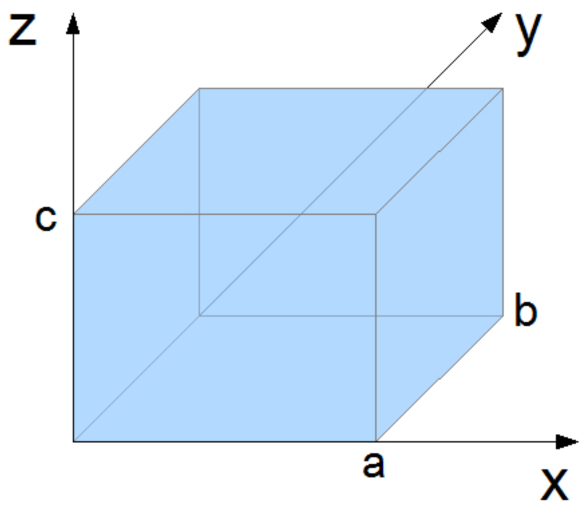
Esta relação é válida para qualquer modo de propagação no guia, TE ou TM. É interessante notar que ela pode ser facilmente obtida da definição geral para velocidade de grupo:

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$$

Como a relação de dispersão é $\omega = c\sqrt{k^2+k_{c,mn}^2}$, temos

$$v_g = \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{k^2+k_{c,mn}^2}}2k = ck\frac{c}{\omega} \qquad \therefore v_g\frac{\omega}{k} = c^2 \qquad \therefore \boxed{v_g\, v_f = c^2}$$

Cavidades Ressonantes



Finalmente vamos ver o que acontece quando queremos excitar uma onda dentro de uma cavidade metálica e não dentro de um tubo, como num guia de ondas. Um exemplo de uma cavidade retangular é mostrado na figura ao lado. Naturalmente, como não há uma direção para propagação da onda, os campos excitados deverão dar origem a ondas estacionárias dentro da cavidade. Mas estes campos ainda terão que satisfazer as mesmas equações de onda

$$\nabla^2\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0; \qquad \nabla^2\vec{H} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

sujeitas as condições de contorno que $\vec{E}_{tang}$ e $\vec{H}_{normal}$ tem que ser nulos nas paredes da cavidade.

Como agora não há propagação em nenhuma direção, não podemos mais considerar ondas planas para solução, mas podemos ainda considerar dependência harmônica no tempo, ou seja, tomamos

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y,z)e^{-i\omega t}; \qquad \vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}(x,y,z)e^{-i\omega t}$$

As relações entre as componentes de $\vec{E}$ e $\vec{H}$ continuam as mesmas que utilizaremos para os campos no guia de ondas, ou seja,

$$\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\times\vec{E} = i\mu_0\omega\vec{H} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\mu_0\omega H_x;$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\mu_0\omega H_y; \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\mu_0\omega H_z$$

e relações equivalentes para as componentes de $\vec{H}$.

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -i\epsilon_0\omega E_x; \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\epsilon_0\omega E_y; \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\epsilon_0\omega E_z$$

Por outro lado, as equações de onda para as componentes de $\vec{E}$ e $\vec{H}$ serão todas iguais; por exemplo, para E_z temos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_z+\mu_0\epsilon_0\omega^2 E_z=0$$

Utilizando novamente o método de separação de variáveis, escrevemos

$$E_z(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z),$$

de forma que, dividindo todos os termos por XYZ, temos

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{d^2Z}{dz^2}+\mu_0\epsilon_0\omega^2=0$$

Como o primeiro termo só depende x, o segundo só de y e o terceiro só de z, e a soma deles tem que ser uma constante, só há uma possibilidade

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k_x;\qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-k_y;\qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k_y$$

onde

$$\boxed{k_x^2+k_y^2+k_z^2=\mu_0\epsilon_0\omega^2}$$