

# Eletromagnetismo II

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 1º Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

## Aula 5

### Teoria de Ondas Guiadas

Até agora temos estudado somente ondas que se propagam em todo o espaço, sem limitações, ou seja, quando consideramos uma onda plana na forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

estamos supondo que a frente de onda, ou plano de fase, constante, se estende por todo o espaço, na direção perpendicular à  $\vec{k}$ . No entanto, em várias aplicações práticas é necessário controlar a trajetória da onda, de forma que ela transporte energia entre diferentes pontos de nosso interesse. Uma maneira de se fazer isso é através de guias de onda, que nada mais são que tubos condutores perfeitos. Numa primeira aproximação, temos que a componente tangencial do campo elétrico (e normal do campo magnético) tem que se anular na parede do tubo. Isso impõe condições de contorno que determinam as frequências das ondas que podem propagar-se dentro do tubo, em função de suas características geométricas, ou seja, o problema da solução da equação de onda dentro de um guia de onda se torna um problema de auto-valor.

Primeiramente vamos recordar porque o campo elétrico tem que ser nulo dentro de um condutor. Conforme vimos na seção sobre ondas em meio condutor, se induzirmos um campo elétrico  $\vec{E}_0$ , no instante  $t = 0$ , dentro de um condutor, o campo elétrico  $\vec{E}$  decairá com o tempo de acordo com a expressão

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-t/\tau},$$

onde  $\tau = \epsilon/\sigma$ . Portanto, se  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow 0$  e  $\vec{E}(t) \rightarrow \vec{E}_0 e^{-\infty} = 0$ . Naturalmente o campo se anula dentro do condutor perfeito porque as cargas do meio podem se mover livremente

para sua superfície, se organizando numa configuração tal que  $\vec{E} = 0$  dentro de todo o condutor.

Por outro lado, sabemos que a condição de contorno para a componente tangencial do campo elétrico é

$$E_{t_1} = E_{t_2}.$$

Portanto, se o meio 1 for o vácuo (ou ar ou qualquer dielétrico perfeito) e o meio 2 um condutor perfeito, temos  $E_{t_1} = 0$ .

Da mesma forma, a componente normal do campo elétrico tem que ser nula dentro do condutor, de forma que  $D_{n_2} = \epsilon_2 E_{n_2} = 0$ . Mas a condição de contorno para a componente normal de  $\vec{D}$  é

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \sigma_s,$$

onde  $\sigma_s$  é a densidade superficial de carga na interface. No caso da interface com um meio condutor, não podemos supor  $\sigma_s = 0$ , porque sempre haverá cargas na superfície, que são as responsáveis por anular o campo elétrico dentro do condutor! Portanto, a condição de contorno para a componente de  $\vec{D}$  à superfície de um condutor perfeito é

$$D_{n_1} = \sigma_s$$

Finalmente, como  $\partial \vec{B} / \partial t = -\nabla \times \vec{E}$ , se  $\vec{E} = 0$  dentro do condutor perfeito, então  $\vec{B} = \text{const}$  e, se  $\vec{B} = 0$  no instante inicial,  $\vec{B}$  será nulo sempre. A condição de contorno de  $\vec{B}$  é

$$B_{n_1} = B_{n_2}$$

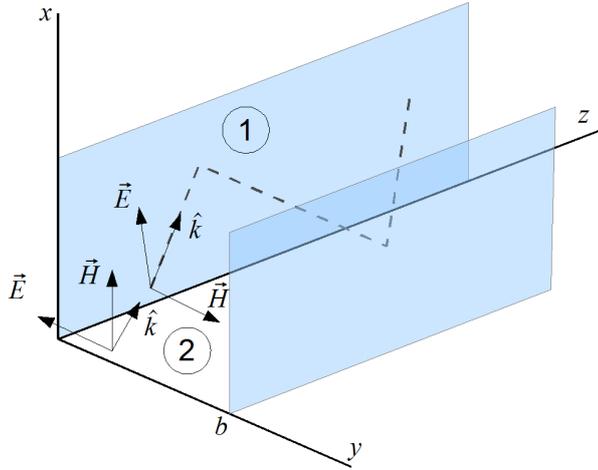
Portanto, na superfície de um condutor perfeito temos  $B_{n_1} = 0$ . Também a componente de  $\vec{B}$  tangencial à superfície será nula dentro do condutor. Mas, nesse caso, embora  $H_{t_2} = B_{t_2} / \mu = 0$ , teremos

$$H_{t_2} = K_s$$

onde  $K_s$  é a densidade superficial de corrente, a qual, como no caso da densidade superficial de carga, não podemos supor a priori nula na superfície de um condutor perfeito.

## Propagação entre placas paralelas

Consideremos duas placas condutoras infinitas, paralelas ao eixo  $z$ , uma localizada em  $y = 0$  e outra em  $y = b$ , como mostra a figura. Uma onda se propaga entre as placas através de reflexões sucessivas nas suas superfícies, como indicado para a onda ① na figura. Assim as placas “guiam” a propagação da onda ao longo da direção  $z$ , que se torna a direção efetiva de propagação.



Vamos ver que existem duas formas distintas de modos de propagação entre as placas. O modo representado pela onda indicada por ① é chamado de Modo TE (Transverso Elétrico), porque o campo  $\vec{E}$  da onda é perpendicular à direção efetiva de propagação. Já o modo representado pela onda ② é denominado Modo TM (Transverso Magnético), porque o campo  $\vec{H}$  da onda é perpendicular à direção efetiva de propagação.

É interessante notar que num guia não é possível propagar-se um modo TEM, ou seja, que ambos o campo elétrico e o campo magnético sejam perpendiculares à direção efetiva de propagação. Isto ocorre porque, nesse caso, não seria possível satisfazer as condições de contorno em ambas as placas, como será visto mais adiante.

## Solução Geral do Problema de Contorno

Consideremos agora um guia de onda na forma de um tubo condutor retilíneo, paralelo à direção  $z$ , de seção transversal arbitrária. O interior do tubo é preenchido por um material de constantes dielétrica e permeabilidade magnética iguais às do vácuo. As coordenadas  $x$  e  $y$  serão denominadas coordenadas transversais.

No interior do guia, o campo eletromagnético de onda tem que satisfazer a equação de onda,

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Como os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  terão que satisfazer também condições de contorno nas paredes do

guia, ou seja, para valores determinados de  $x$  e  $y$ , não podemos supor que a dependência com as coordenadas transversais seja do tipo onda plana. No entanto, como há simetria de translação ao longo da coordenada  $z$ , podemos considerar ondas planas nessa direção. Assim, vamos supor que as soluções gerais das equações de onda sejam dadas por

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}; \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$$

Portanto

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k^2 \vec{E} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E},$$

com resultados semelhantes para  $\vec{H}$ . Utilizando esses resultados e definindo o “Laplaciano perpendicular”

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

obtemos que as equações de onda ficam

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \vec{E} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \vec{E} &= 0; & E_z &= 0 \text{ nas paredes} \\ \nabla_{\perp}^2 \vec{H} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \vec{H} &= 0; & H_n &= 0 \text{ nas paredes} \end{aligned}$$

Cada equação representa na realidade 3 equações para as 3 componentes de  $\vec{E}$  ou  $\vec{H}$ . Mas, como veremos logo a seguir, não teremos que resolver 6 equações simultaneamente. Elas vão se separar em uma equação para  $H_z$  somente, que determina totalmente a solução para o modo TE, e outra para  $E_z$ , que determina totalmente a solução para o modo TM.

Para ver como isso acontece, retornemos às equações para as leis de Faraday e Ampère

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = i\mu_0 \omega \vec{H}$$

e

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = -i\epsilon_0 \omega \vec{E}$$

Explicitando as componentes dessas equações, temos

$$\nabla \times \vec{E} = i\mu_0\omega\vec{H} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\mu_0\omega H_x \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} = ikE_y + i\mu_0\omega H_x & (1) \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\mu_0\omega H_y \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = ikE_x + i\mu_0\omega H_y & (2) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\mu_0\omega H_z & (3') \end{cases}$$

$$\nabla \times \vec{H} = i\mu_0\omega\vec{E} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -i\mu_0\omega E_x \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y} = ikH_y - i\mu_0\omega E_x & (1') \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\mu_0\omega E_y \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial x} = ikH_x - i\mu_0\omega E_y & (2') \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\mu_0\omega E_z & (3) \end{cases}$$

Vemos que nas equações em que aparece  $E_z$  (1,2,3), aparecem também que  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$  e  $H_y$ , mas não aparece  $H_z$ ; na mesma forma, nas equações em que aparece  $H_z$  (1',2',3'), aparecem também  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$  e  $H_y$  mas não aparece  $E_z$ . Portanto  $E_z$  e  $H_z$  diferentes de zero representam soluções linearmente desacopladas das Equações de Maxwell, neste caso. Assim, as soluções gerais das equações de onda num guia de onda podem ser construídas como combinações lineares de dois modos básicos:

$$\text{Modos TE: } E_z = 0; \quad H_z \neq 0$$

$$\text{Modos TM: } E_z \neq 0; \quad H_z = 0$$

## Equações para o Modo TE

Impondo  $E_z = 0$  nas equações (1) e (2), temos

$$\begin{aligned} ikE_y + i\mu_0\omega H_x = 0 & \Rightarrow E_y = -\frac{\mu_0\omega}{k} H_x \\ -ikE_x + i\mu_0\omega H_y = 0 & \Rightarrow E_x = -\frac{\mu_0\omega}{k} H_y \end{aligned}$$

Substituindo a expressão para  $E_x$  na equação (1'), temos

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = ikH_y - i\epsilon_0\omega\left(\frac{\mu\omega}{k}H_y\right) = \frac{i}{k}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)H_y \Rightarrow H_y = -\frac{ik}{\omega^2/c^2 - k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

Finalmente, substituindo a expressão para  $E_y$  na equação (2'), temos

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = ikH_x - i\epsilon_0\omega\left(\frac{\mu\omega}{k}H_x\right) = \frac{i}{k}\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)H_x \Rightarrow H_x = \frac{ik}{\omega^2/c^2 - k^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

Estas quatro equações permitem determinar  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$  e  $H_y$  em termos de  $H_z$ . Portanto, para o modo TE basta resolver a equação de onda para  $H_z$ :

$$\boxed{\nabla_{\perp}^2 H_z + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) H_z = 0}$$

impondo a condição de contorno  $H_n = 0$  nas paredes do guia. Naturalmente,  $H_n$  envolverá uma combinação linear de  $H_x$  e  $H_y$ , ou seja, de  $\partial H_z/\partial x$  e  $\partial H_z/\partial y$ .

## Equações para o Modo TM

**Exercício:** Fazendo  $H_z = 0$  e seguindo o mesmo procedimento que para o modo TE, mostre que as equações para o modo TM são

$$E_x = \frac{ik}{\omega^2/c^2 - k^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}; \quad E_y = \frac{ik}{\omega^2/c^2 - k^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}; \quad H_x = -\frac{\epsilon_0\omega}{k} E_y; \quad H_y = \frac{\epsilon_0\omega}{k} E_x;$$

Portanto, para o modo TM teremos que resolver a equação de onda para  $E_z$

$$\boxed{\nabla_{\perp}^2 E_z + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) E_z = 0}$$

sujeita à condição de contorno  $E_z = 0$  nas paredes do guia, já que  $E_z$  é a componente de  $\vec{E}$  tangente às paredes.

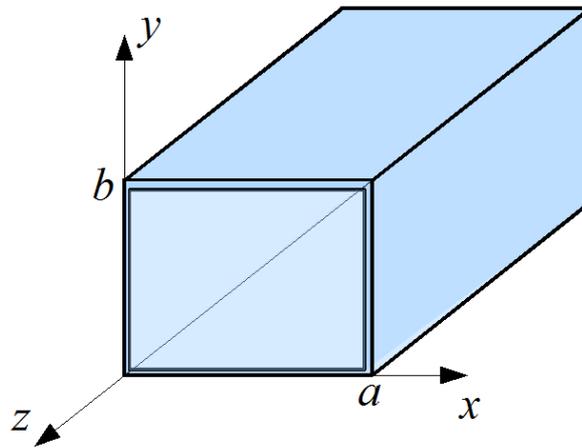
**Exercício:** Mostre, a partir das equações (1,2,3) e (1',2',3') que a única solução possível para modos TEM ( $E_z = 0$ ,  $H_z = 0$ ), que satisfaz as condições de contorno, é  $\vec{E} = 0$  e  $\vec{H} = 0$  dentro do guia.

Para resolver as equações de onda e impôr as condições de contorno, precisamos especificar a geometria do guia de onda. Vamos fazer isto para o guia retangular.

## Guia de Onda Retangular

O guia de onda retangular é o mais utilizado em aplicações práticas, devido à facilidade de fabricação e boa discriminação de modos de propagação. A geometria é mostrada na figura. O eixo  $x$  é paralelo ao lado maior do guia.

Vamos resolver a equação de onda para o modo TE. A solução para TM ficará como exercício.



$$\nabla_{\perp}^2 H_z + (\omega^2/c^2 - k^2) H_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (\omega^2/c^2 - k^2) H_z = 0$$

Esta equação pode ser facilmente resolvida através do método de separação de variáveis, ou seja, supomos que a solução seja dada pelo produto de duas funções em que uma seja só função de  $x$  e outra só função de  $y$ :

$$H_z(x, y) = X(x)Y(y)$$

Substituindo na equação de onda e dividindo todos os termos da equação por  $XY$ , obtemos

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) = 0$$

Este resultado implica que, para quaisquer valores arbitrários de  $x$  e  $y$ , a primeira parcela, que é função só de  $x$ , somada com a segunda, que é função só de  $y$ , tem que ser igual a uma constante,  $-(\omega^2/c^2 - k^2)$ . Isso só é possível se ambas as parcelas forem separadamente constantes, ou seja,

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x X = 0$$

e

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y = 0$$

e

$$-k_x^2 - k_y^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_x^2 + k_y^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Esta relação nada mais é que a relação de dispersão que já havíamos derivado para ondas monocromáticas no vácuo  $k^2 = \omega^2/c^2$ , onde, naquele caso,  $k$  é o módulo do vetor de onda total  $\vec{k} = k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y + k_z \hat{e}_z$ .

As soluções para  $X(x)$  e  $Y(y)$  são simplesmente senos e cossenos:

$$X(x) = \alpha \cos(k_x x) + \beta \sin(k_x x)$$

$$Y(y) = \gamma \cos(k_y y) + \delta \sin(k_y y)$$

de forma que

$$H_z(x, y) = [\alpha \cos(k_x x) + \beta \sin(k_x x)] [\gamma \cos(k_y y) + \delta \sin(k_y y)]$$

ou

$$\boxed{H_z(x, y) = A \cos(k_x x) \cos(k_y y) + B \cos(k_x x) \sin(k_y y) + C \sin(k_x x) \cos(k_y y) + D \sin(k_x x) \sin(k_y y)}$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são constantes.

Para determinar as constantes temos que impôr agora as condições de contorno. Na face interna do guia que coincide com o plano  $y = 0$ , a componente normal de  $\vec{H}$  é  $H_y$ . Portanto temos que fazer  $H_y = 0$  (note que isto implica que  $E_x = 0$ , satisfazendo automaticamente a condição  $E_z = 0$ ).

$$H_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} = \begin{aligned} & - A k_y \cos(k_x x) \sin(k_y y) + B k_y \cos(k_x x) \cos(k_y y) \\ & - C k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) + D k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \Rightarrow k_y [B \cos(k_x x) + D \sin(k_x x)] = 0, \quad \text{para qualquer } x$$

no intervalo  $0 < x < a$

Esta condição só pode ser satisfeita impondo  $B = D = 0$ .

Agora temos que impor a mesma condição na face  $y = b$ :

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \Rightarrow -k_y [A \cos(k_x x) + C \sin(k_x x)] \sin(k_y b) = 0, \quad 0 < x < a$$

Se fizermos a escolha  $A = C = 0$ , teremos a solução trivial  $H_z = 0$  e todos os campos serão nulos. No entanto, esta condição pode também ser satisfeita impondo

$$\sin(k_y b) = 0 \Rightarrow \boxed{k_y = \frac{n\pi}{b}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots}$$

Esses valores discretos de  $k_y$  são denominados os auto-valores da solução, na direção  $y$ . O índice  $n$ , então, representa o mesmo papel dos números quânticos que aparecem na solução da Equação de Schroedinger para estados ligados em Mecânica Quântica.

Resumindo, das condições de contorno para  $y = 0$  e  $y = b$ , temos que  $H_z$  é dado por

$$H_z = [A \cos(k_x x) + C \sin(k_x x)] \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Vamos agora impor as condições de contorno nas outras duas faces internas do guia, em  $x = 0$  e  $x = a$ . Nestas duas faces, a componente normal de  $\vec{H}$  é  $H_x$  e, outra vez, impondo  $H_x = 0$  satisfaz automaticamente a condição  $E_z = E_y = 0$ .

$$H_x = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = k_x [-A \sin(k_x x) + C \cos(k_x x)] \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C k_x \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0, \quad 0 < y < b \quad \therefore C = 0$$

e

$$H_x = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = 0; \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -A k_x \sin(k_x a) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0; \quad 0 < y < b$$

Portanto,  $m$  é o “segundo número quântico” da solução da equação de onda para os modos TE num guia retangular.

Naturalmente a constante  $A$  representa a amplitude do campo  $H_z$  dentro do guia, que pode ser arbitrária. Então, a solução geral para  $H_z(x, y, z, t)$  fica

$$H_z(x, y, z, t) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)}$$

com a relação de dispersão

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

Para cada par  $(m, n)$  existe uma autofunção, ou seja, uma solução do problema de contorno que caracteriza um determinado modo de propagação, linearmente independente dos outros modos. Cada um desses modos é representado pelo símbolo

$$TE_{mn}$$

Naturalmente, para que o modo se propague no guia, é necessário que  $k$  seja real. Isto porque, se  $k$  for imaginário (note que  $k$  só pode ser real ou imaginário puro  $\rightarrow$  mostre porquê), ou seja,

$$k = ik_i$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-i\omega t} e^{-k_i z}$$

ou seja, a amplitude do campo decai exponencialmente com a distância ao longo do guia e não há propagação.

Portanto, só se propagam no guia ondas com frequências tais que

$$k^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{c^2} > \pi^2 \left( \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)$$

Isto implica que cada modo só se propaga para frequências acima de uma frequência de corte dada por ( $\omega = 2\pi f$ )

$$f_{c,mn}^2 = \frac{c^2}{4} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad \Rightarrow \quad f_{c,mn} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

Como estamos supondo que  $b < a$ , a menor frequência de corte é obtida para o modo  $TE_{10}$ ,

$$f_{c,10} = \frac{c}{2a}$$

Por isso, o modo  $TE_{10}$  é denominado o modo fundamental do guia de onda retangular;

## Comprimento de Onda do Guia

O comprimento de onda do guia é definido como o comprimento de onda na direção efetiva de propagação  $z$ , ou seja,

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}}$$

Mas  $2\pi c/\omega = \lambda_0$ , o comprimento de onda para ondas planas no vácuo, para a frequência considerada. Então obtemos

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{c,mn}^2}}} \quad \lambda_0 = \frac{c}{f}$$

onde definimos o comprimento de onda de corte  $\lambda_{c,mn} = c/f_{c,mn}$ . Esta expressão significa que o comprimento de onda do guia é sempre maior que o comprimento de onda no vácuo. Em particular, no corte  $\lambda_0 = \lambda_{c,mn}$ , temos  $\lambda_g = \infty$ .

Um resultado muito útil é que para o modo fundamental,  $TE_{10}$ , obtemos

$$\lambda_{c,10} = 2a,$$

ou seja, basta medirmos a maior dimensão de um guia retangular para sabermos que o maior comprimento de onda que pode nele se propagar é igual ao dobro de sua dimensão.

A existência da frequência de corte altera substancialmente a relação de dispersão, ou seja, a relação entre  $\omega$  e  $k$ , para ondas se propagando dentro do guia, com relação à do vácuo,  $\omega = kc$ . De fato, escrevendo a relação de dispersão como

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_{c,mn}^2$$

onde

$$k_{c,mn}^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda_c mn} \right)^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

temos

$$\omega^2 = c^2 (k^2 + k_{c,mn}^2)$$

## Expressões para as outras componentes do campo eletromagnético

Utilizando as relações entre  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$  e  $H_y$  com  $H_z$ , que já derivamos, podemos determinar todas as componentes dos campos e os perfis deles dentro do guia. Para o modelo  $TE_{10}$ , por exemplo, como  $n = 0$ , temos

$$H_z(x, y, z, t) = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$E_y = i \frac{a\omega\mu_0}{\pi} H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(kz - \omega t)} = \frac{a\omega\mu_0}{\pi} H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(kz - \omega t + \pi/2)}$$

**Exercício:** Obter esta expressão para  $E_y$  e para as outras componentes  $E_x$ ,  $H_x$  e  $H_y$ .

Portanto, a componente  $E_y$  tem uma defasagem temporal de  $\pi/2$  com relação a  $H_z$  e uma distribuição espacial bem distinta, conforme na figura seguinte.

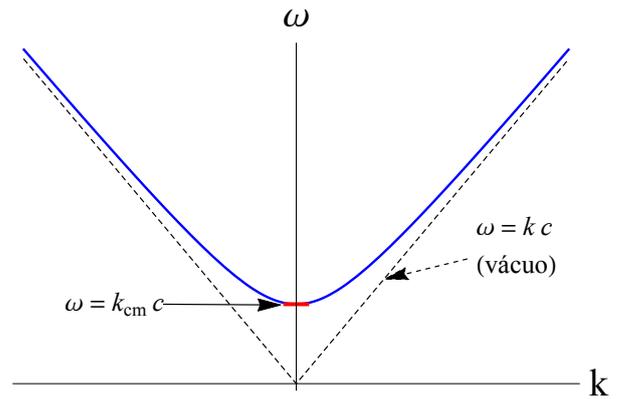
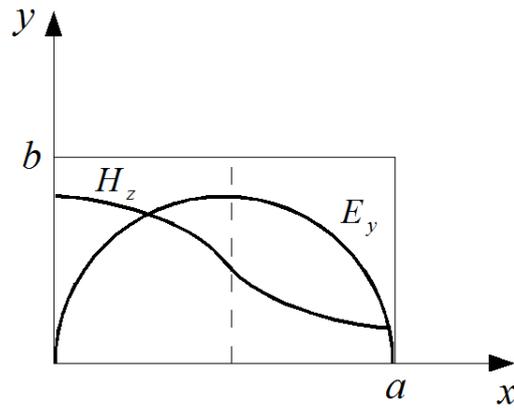
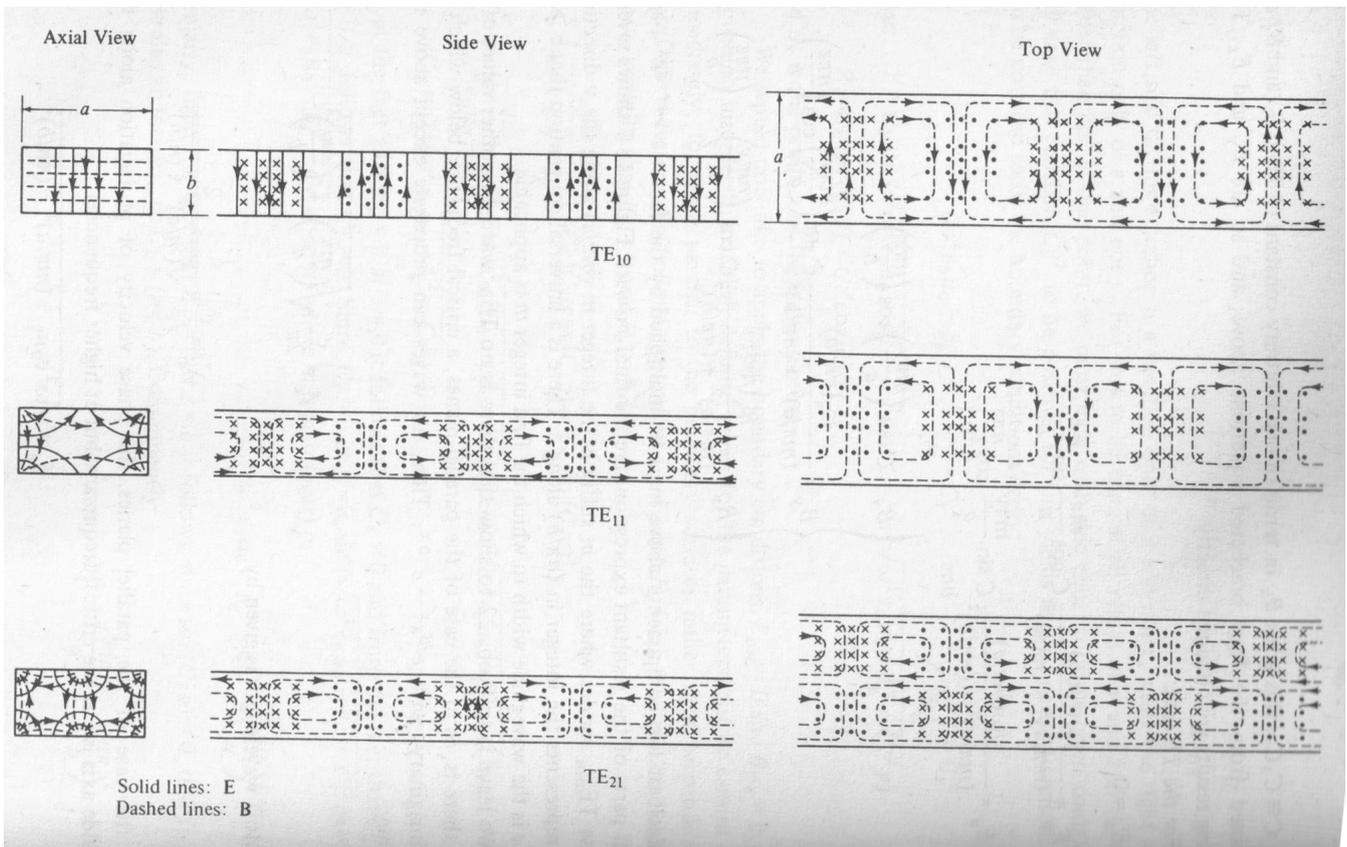


Diagrama de dispersão num guia de ondas



As componentes do campo eletromagnético podem ser determinadas da mesma forma para outros modos. Na figura abaixo é mostrado um esquema das linhas de força para os primeiros modos TE.



**Exercício:** Mostrar que a solução da equação de onda para o modo TM

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_z = 0; \quad E_z = 0 \text{ nas paredes;}$$

é dada por

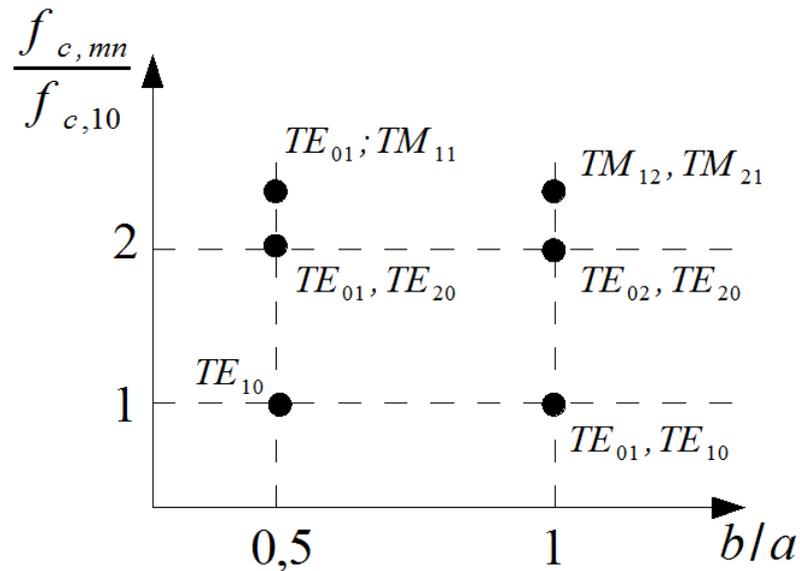
$$E_z(x, y, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)}; \quad m, n = 1, 2, 3 \dots$$

e que a expressão para a frequência de corte é a mesma que para os modos TE,

$$f_{c,mn} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

Porquê não podemos ter  $m = 0$  ou  $n = 0$  para os modos TM?

Para um guia retangular, portanto, o modo mais fundamental de propagação é que o modo  $TE_{10}$ . No diagrama abaixo mostramos a relação entre a frequência de corte para diferentes modos e  $f_{c,10}$  em função de  $b/a$ . Além de ser o fundamental, o modo  $TE_{10}$  é o



que sofre menor decaimento quando efeitos de perda nas paredes do guia, por não serem condutoras perfeitas, são incluídos nos cálculos.