

*Geometria Analítica*

# Superfícies Quádricas

**Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva**

# *Superfícies Quádricas*

Chama-se quádrlica qualquer subconjunto  $\Omega$  de  $E^3$  que possa ser descrito, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, por uma equação de segundo grau, nas três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

Sendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  ou  $f$  diferentes de zero.

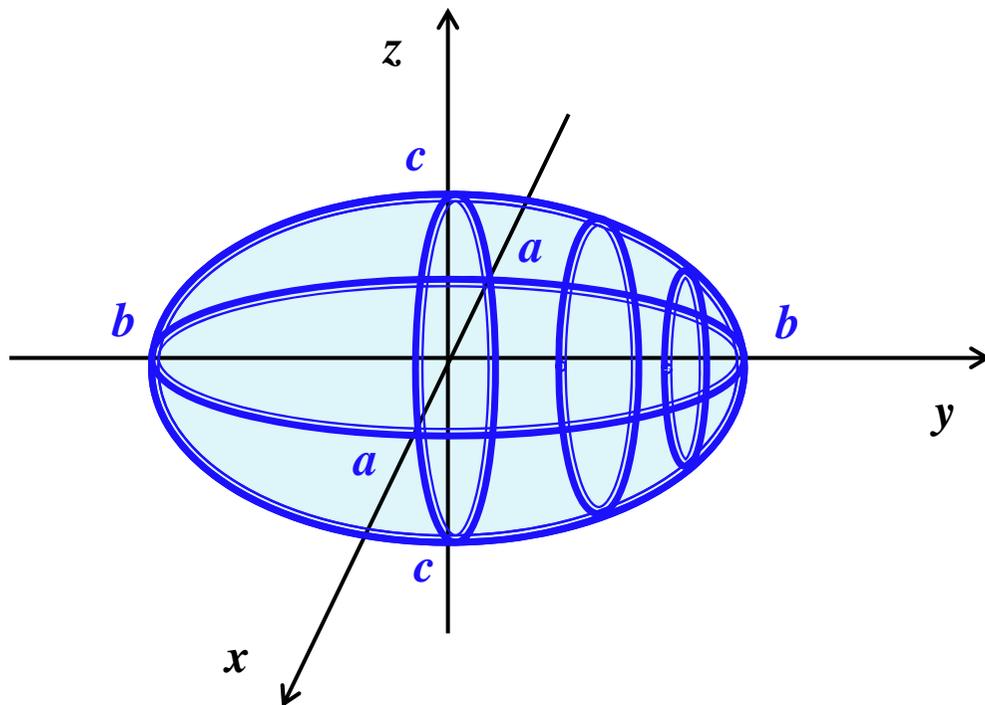
# *Superfícies Quádricas Centradas*

Forma canônica ou padrão de uma superfície quádrlica centrada:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Elipsoide
- Hiperboloide de uma folha
- Hiperboloide de duas folhas

# *Elipsoide*



Equação do elipsoide:

$$+\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$a, b \text{ e } c > 0$$

As medidas dos semieixos do elipsoide.

### ***Elipsoide com centro fora da origem do sistema de coordenadas:***

Se o centro do elipsoide é o ponto  $(h, k, l)$  e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, temos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

### ***Superfície esférica de raio $a$ :***

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{onde } a = b = c$$

### ***Superfície esférica de centro $(h, k, l)$ e raio $a$ :***

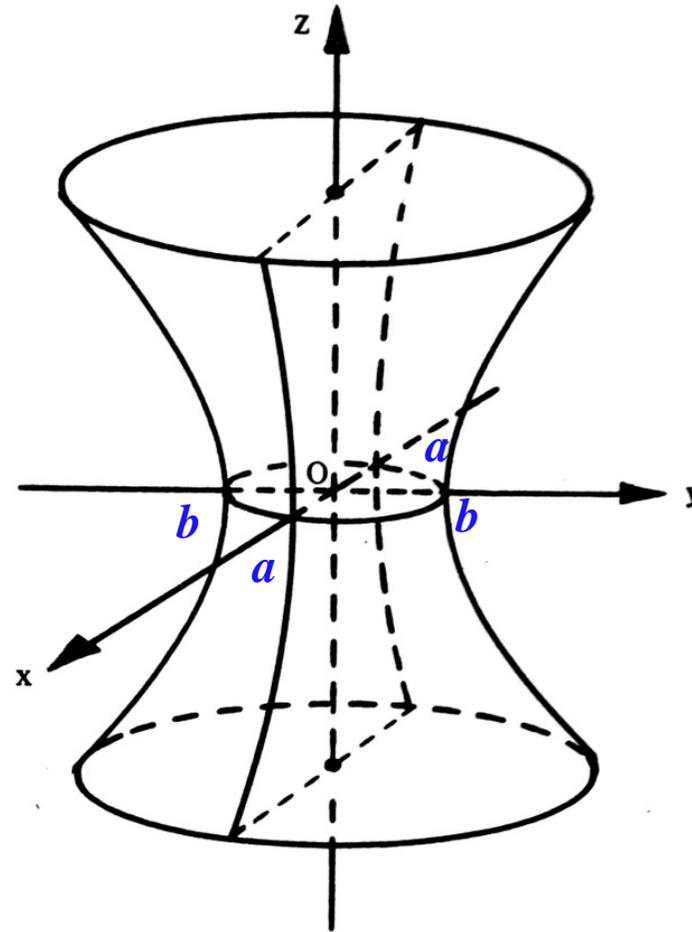
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = a^2$$

# *Hiperboloide de uma folha*

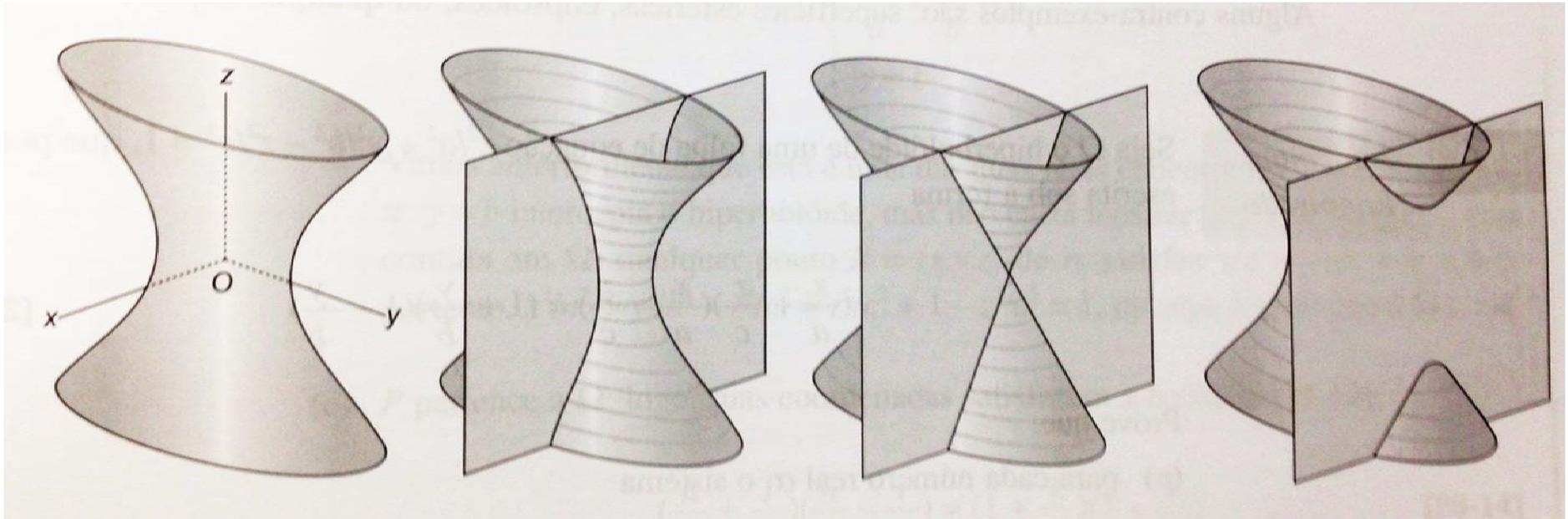
A equação que representa um hiperboloide de uma folha:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Canônica da equação  
do hiperboloide de  
uma folha ao longo  
do eixo  $z$ .



# *Hiperboloide de uma folha*



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Canônica da equação do hiperboloide de uma folha ao longo do eixo  $y$ .

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

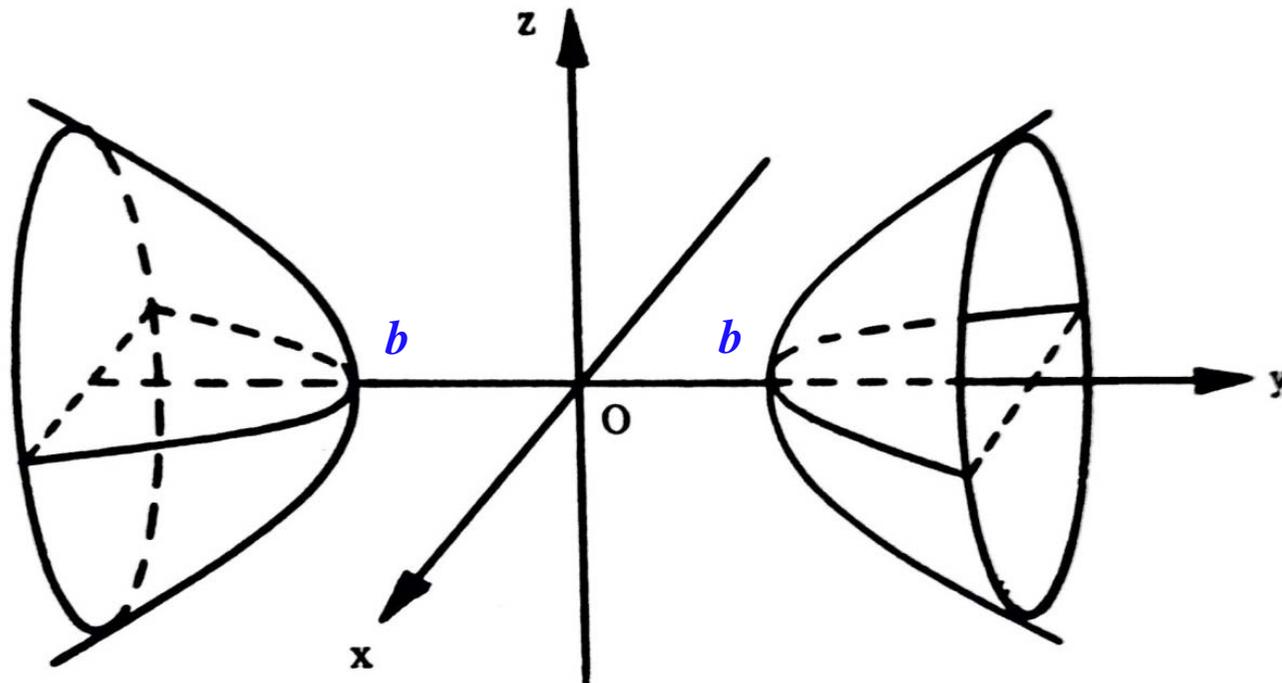
Canônica da equação do hiperboloide de uma folha ao longo do eixo  $x$ .

# *Hiperboloide de duas folhas*

A equação que representa um hiperboloide de duas folhas:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Canônica da equação do hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo  $y$ .



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Canônica da equação do hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo  $x$ .

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Canônica da equação do hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo  $z$ .

# *Superfícies quádricas não centradas*

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Forma canônica ou padrão de uma superfície quádrica não centrada.

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by$$

$$\pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax$$

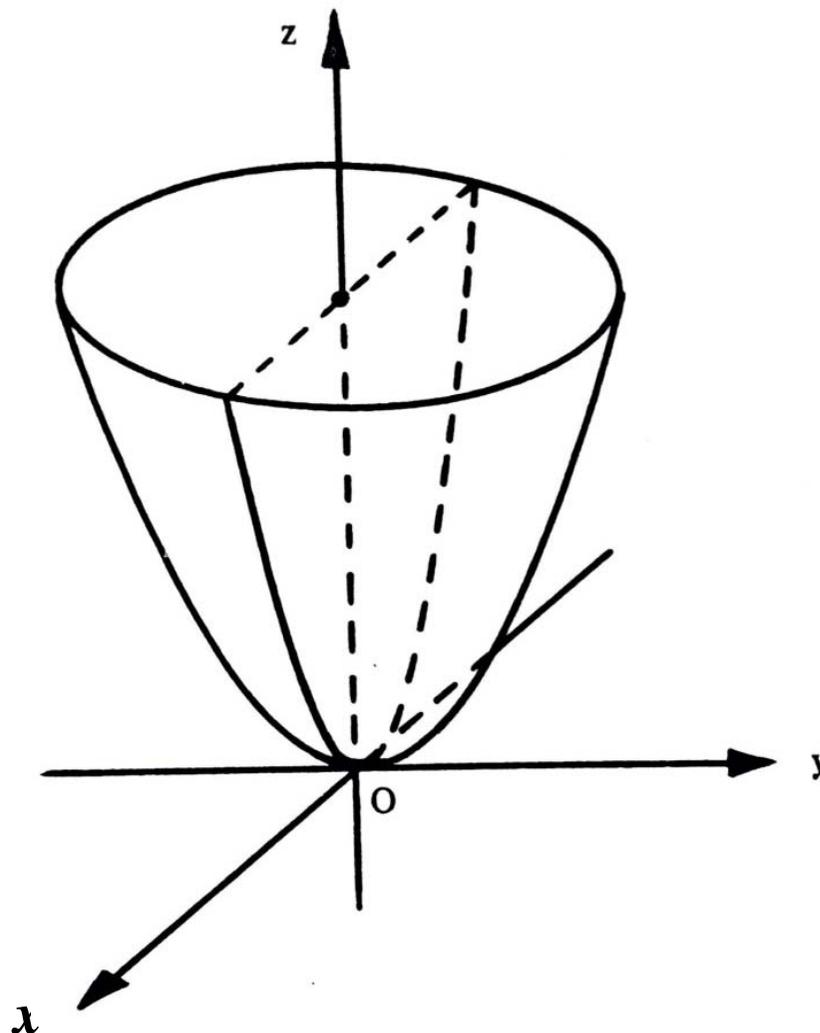
- *Paraboloide elíptico*
- *Paraboloide hiperbólico*

# *Paraboloides elíptico*

Sinais iguais:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Forma canônica da equação  
do paraboloides elíptico ao  
longo do eixo do  $z$ .



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by$$

Forma canônica da equação do parabolóide elíptico ao longo do eixo do  $y$ .

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax$$

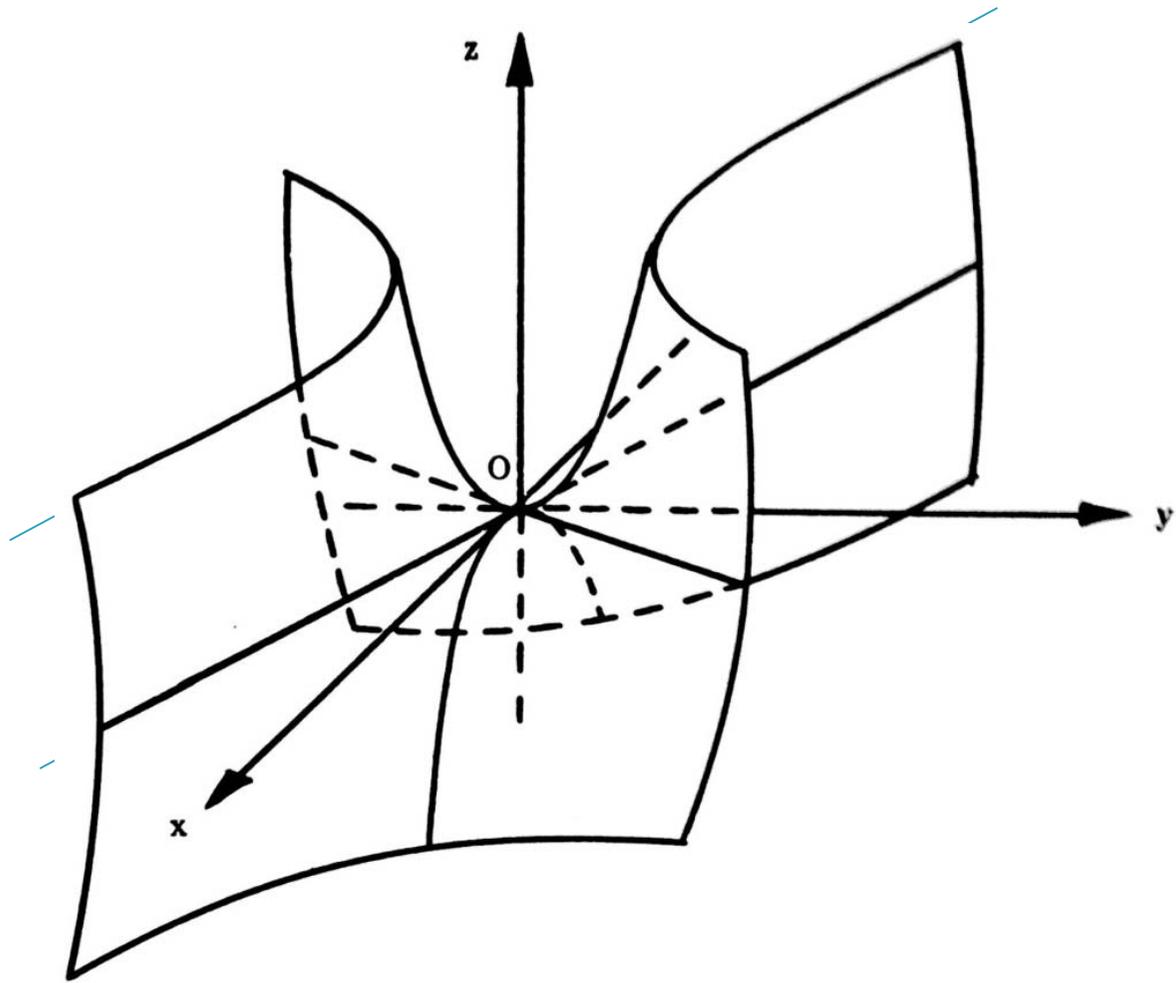
Forma canônica da equação do parabolóide elíptico ao longo do eixo do  $x$ .

# *Paraboloide hiperbólico*

Forma canônica ou padrão  
de uma superfície quádrica  
não centrada.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

Forma canônica da equação  
do parabolóide hiperbólico  
ao longo do eixo dos  $z$ .



$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by$$

Forma canônica da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos  $y$ .

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$$

Forma canônica da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos  $x$ .

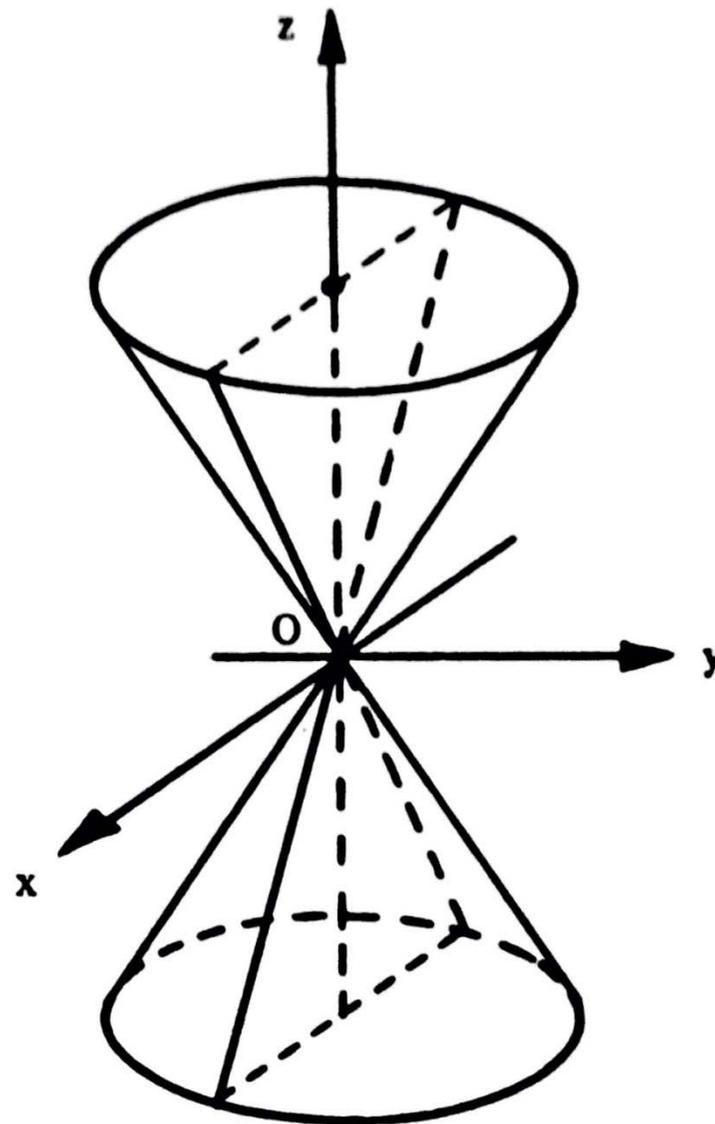
# *Superfície Cônica*

Superfície cônica é uma superfície gerada por uma reta que se move apoiada numa curva plana qualquer e passando sempre por um ponto dado não situado no plano desta curva.

A reta é denominada geratriz, a curva plana é a diretriz e o ponto fixo dado é o vértice da superfície cônica.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Superfície cônica cujo eixo é o eixo dos  $z$ .



$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Superfície cônica cujo eixo é o eixo dos  $x$ .

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Superfície cônica cujo eixo é o eixo dos  $y$ .

# *Superfície cilíndrica*

Seja  $C$  uma curva plana e  $f$  uma reta fixa não contida nesse plano.

Superfície cilíndrica é a superfície gerada por uma reta  $r$  que se move paralelamente à reta fixa  $f$  em contato permanente com a curva plana  $C$ .

