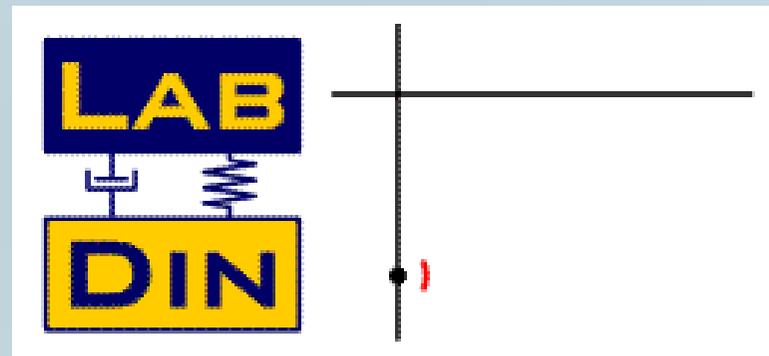


**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Laboratório de Dinâmica**

**SEM 533 – MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE  
SISTEMAS DINÂMICOS I**

*Resposta do Sistema de Segunda Ordem à Entradas  
Especiais – Parte II*



*Resp.: Prof. Dr. Paulo S. Varoto*



## 6.2 – Resposta de Regime do Sistema à Excitação Periódica Geral

Até agora aprendemos como obter uma representação do sinal. Agora precisamos Determinar a resposta do sistema de 01 GDL à força periódica obtida da expansão. Então voltamos ao problema

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad \text{Eq. 71}$$

Onde  $p(t)$  é um sinal de força periódico geral. Realizando a expansão por Fourier e substituindo-se o resultado na Eq. 71 temos

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \frac{p_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos p\omega_0 t + \sum_{p=1}^{\infty} b_p \text{sen } p\omega_0 t \quad \text{Eq. 72}$$

A Eq. 72 é equivalente a

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \frac{p_0}{2} \quad \text{Eq. 73}$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = a_p \cos p\omega_0 t \quad \text{Eq. 74}$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = b_p \text{sen } p\omega_0 t \quad \text{Eq. 75}$$



Já são sabidas as soluções de regime das Eqs. 73, 74 e 75

$$u_1(t) = \frac{a_0}{2k}$$

Eq. 76

$$u_2(t) = \frac{\frac{a_p}{k}}{\sqrt{(1-p^2r^2)^2 + (2\zeta pr)^2}} \cos(p\omega t - \phi_p)$$

Eq. 77

$$u_3(t) = \frac{\frac{b_p}{k}}{\sqrt{(1-p^2r^2)^2 + (2\zeta pr)^2}} \text{sen}(p\omega t - \phi_p)$$

Eq. 78

Com

$$\phi_p = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta pr}{1-p^2r^2} \right)$$

Eq. 79



E então a solução completa fica sendo

$$u(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\frac{a_p}{k}}{\sqrt{(1-p^2r^2)^2 + (2\zeta pr)^2}} \cos(p\omega t - \phi_p) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\frac{b_p}{k}}{\sqrt{(1-p^2r^2)^2 + (2\zeta pr)^2}} \sin(p\omega t - \phi_p)$$

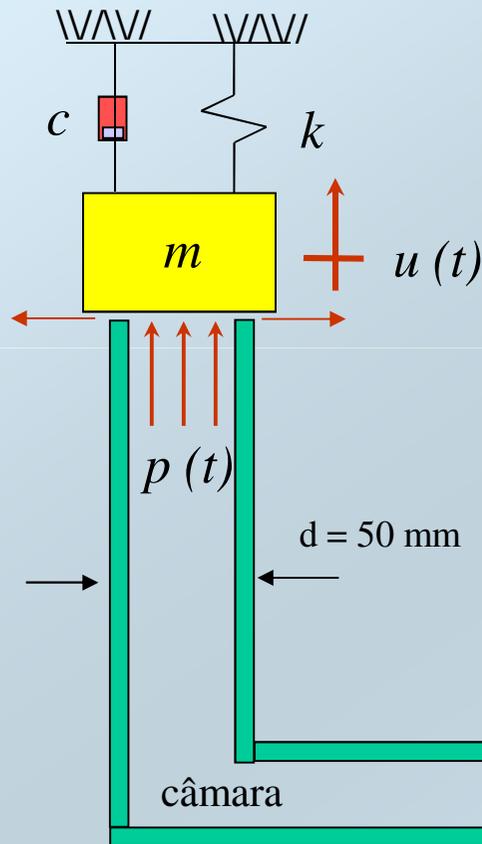
Eq. 80

Note que a Eq. 80 representa apenas a solução de regime permanente da resposta do sistema de 01 GDL. Se as condições iniciais são nulas, então a solução transiente é nula e a Eq. 80 é a resposta total do sistema.

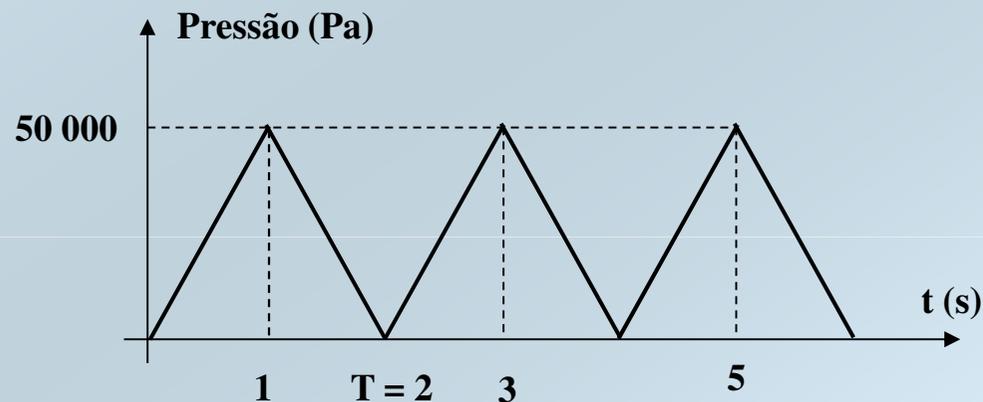


## Exemplo:

No estudo de vibrações de válvulas hidráulicas, usadas em sistemas de controle Hidráulicos, a válvula e seu sistema elástico são modelados como um sistema de 01 gdl Conforme a figura abaixo. São dados:  $m = 0,25 \text{ kg}$ ,  $c = 10 \text{ Nsm}^{-1}$ ;  $k = 2500 \text{ Nm}^{-1}$



Determinar a resposta do sistema à pressão hidráulica abaixo mostrada



Solução:

Inicialmente escrevemos

$$F(t) = \begin{cases} 50000 At & 0 \leq t \leq T/2 \\ 50000 A(2-t) & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Eq. 81



Iniciando a expansão em Séries de Fourier, temos

$$a_0 = \frac{2}{2} \left[ \int_0^1 50000 A t dt + \int_1^2 50000 A (2 - t) dt \right] = 50000 A \quad \text{Eq. 82}$$

$$a_1 = \frac{2}{2} \left[ \int_0^1 50000 A t \cos \pi t dt + \int_1^2 50000 A (2 - t) \cos \pi t dt \right] = -\frac{2 \times 10^5 A}{\pi^2} \quad \text{Eq. 83}$$

De forma análoga encontraremos

$$b_1 = a_2 = b_2 = 0 \quad \text{Eq. 84}$$

$$a_3 = \frac{2}{2} \left[ \int_0^1 50000 A t \cos 3\pi t dt + \int_1^2 50000 A (2 - t) \cos 3\pi t dt \right] = -\frac{2 \times 10^5 A}{9\pi^2} \quad \text{Eq. 85}$$



$$b_3 = \frac{2}{2} \left[ \int_0^1 50000 A t \sin 3\pi t \, dt + \int_1^2 50000 A (2-t) \sin 3\pi t \, dt \right] = 0 \quad \text{Eq. 86}$$

Então,  $a_4 = a_6 = \dots = b_4 = b_5 = b_6 = \dots = 0$

Portanto, aproximaremos a força através de apenas 3 harmônicas

$$F(t) \cong 25000A - \frac{2 \times 10^5 A}{\pi^2} \cos \omega t - \frac{2 \times 10^5 A}{9\pi^2} \cos 3\omega t \quad \text{Eq. 87}$$

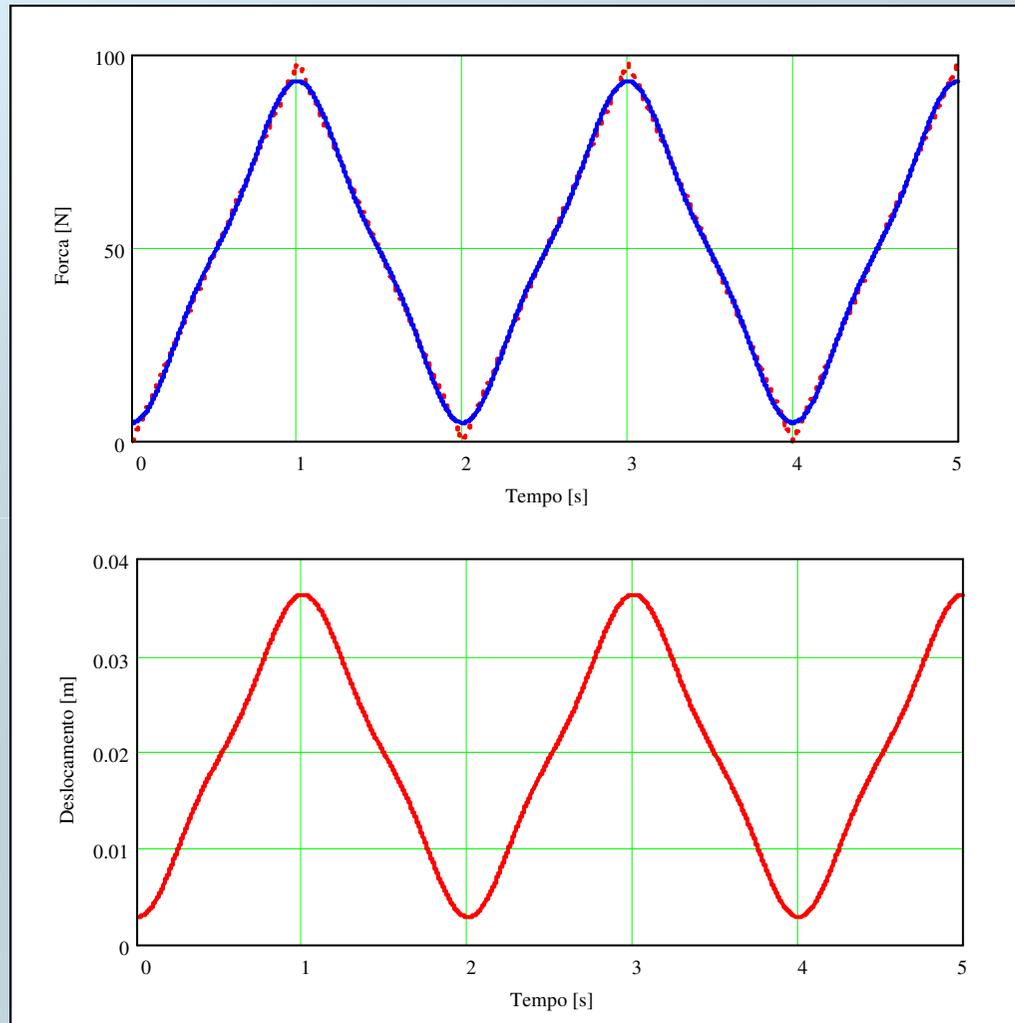
Usando então a Eq. 80 achamos a resposta de regime

$$u(t) = 0,019635 - 0,015930 \cos(\pi t - 0,0125664) - 0,0017828 \cos(3\pi t - 0,0380483)$$

Eq. 88



As figuras abaixo ilustram a aproximação por Fourier e a resposta de regime obtida



## 6.1 – Séries de Fourier Complexas

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos(p\omega_0 t) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p \sin(p\omega_0 t)$$

A base das Séries de Fourier complexas estão nas seguintes relações

$$\cos p\omega_0 t = \frac{1}{2} \left[ e^{jp\omega_0 t} + e^{-jp\omega_0 t} \right]$$

$$\sin p\omega_0 t = \frac{1}{2} \left[ e^{jp\omega_0 t} - e^{-jp\omega_0 t} \right]$$

Elas são definidas pela seguinte expressão

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p e^{jp\omega_0 t}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T_0} x(t) dt$$

$$a_p = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T_0} x(t) \cos(p\omega_0 t) dt$$

$$b_p = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T_0} x(t) \sin(p\omega_0 t) dt$$

Eq. 89

Eq. 90

Eq. 91

A Eq. 91 estabelece que ***um sinal periódico e contínuo por partes pode ser expandido como a soma de exponenciais complexas cada uma delas numa frequência múltipla inteira da frequência fundamental do sinal !***



Os coeficientes  $X_p$  representam coeficientes de correlação entre o sinal  $x(t)$  e as exponenciais complexas, e são dados pela integral de Fourier

$$X_p = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j p \omega_0 t}$$

Eq. 92

O par de equações dado pelas Eqs. 91 e 92 é freqüentemente chamado de *par de transformada de Fourier para sinais periódicos*

Na prática, quando dispõe-se de uma amostra do sinal periódico, os  $X_p$  podem ser calculados a partir da seguinte expressão

$$X_p \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} x(t_i) e^{-j \frac{2\pi p}{N} t_i} \quad p = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

Eq. 93

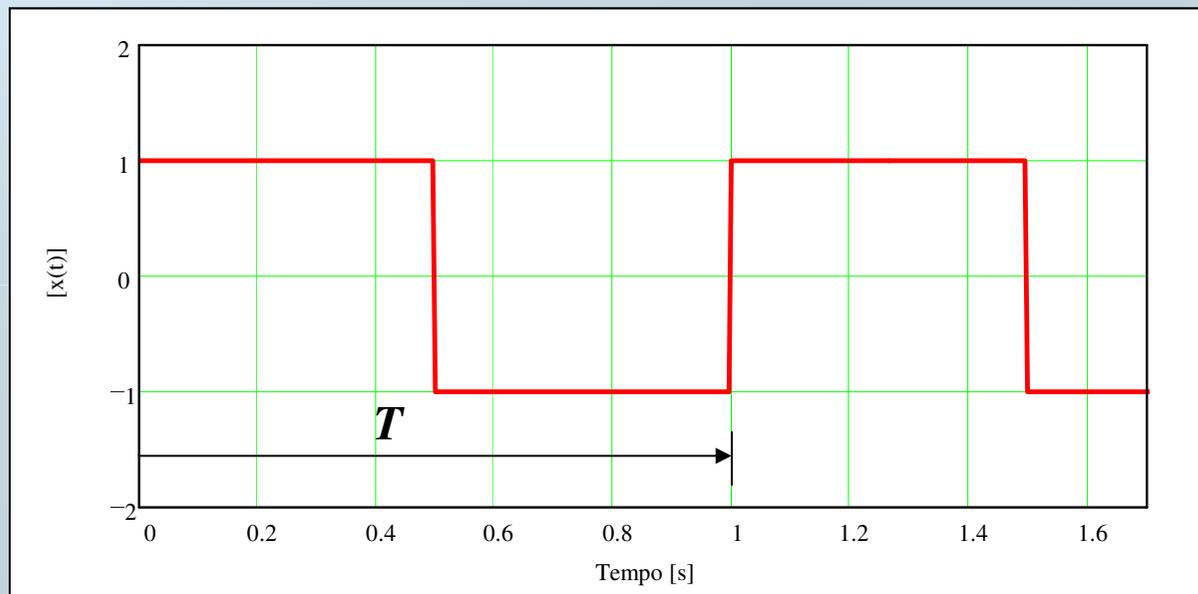
Vejamos um exemplo



Vamos retomar o exemplo anterior onde o sinal é dado por:

$$p(t) = \begin{cases} -p_0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ p_0 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Eq. 94



Vamos proceder o cálculo dos  $X_p$  para este sinal



A Eq. 92 pode ser aplicada para um período completo de 0 a T :

$$X_p = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} p_0 e^{-i p \omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T -p_0 e^{-i p \omega_0 t} dt \quad \text{Eq. 95}$$

Esta última Eq. 95 reduz-se a

$$X_p = -\frac{p_0}{ip\omega_0 T} \left[ e^{-ip\omega_0 t} \Big|_0^{T/2} - e^{-ip\omega_0 t} \Big|_{T/2}^T \right] \quad \text{Eq. 96}$$

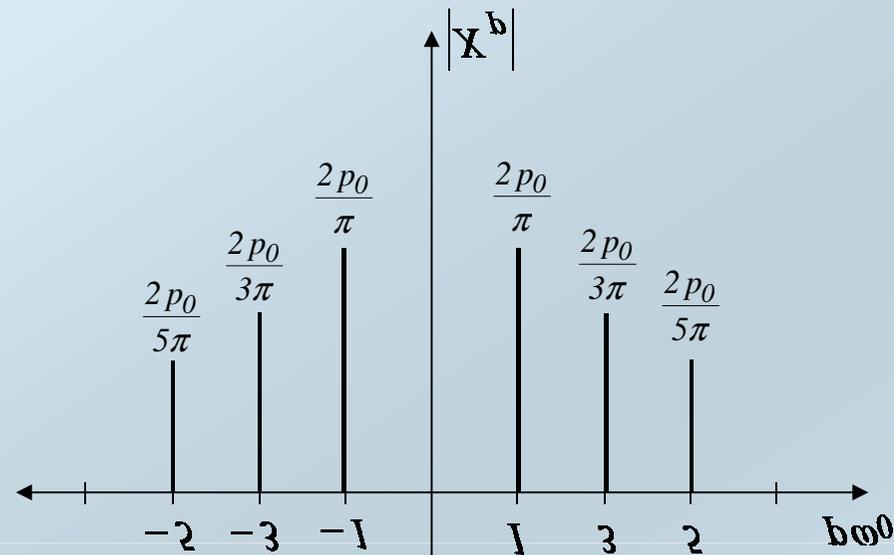
De onde obtemos o seguinte resultado

$$X_p = \frac{ip_0}{2\pi p} (2e^{-ip\pi} - 2) = \begin{cases} 0 & p = \text{par} \\ -\frac{2p_0 i}{p\pi} & p = \text{ímpar} \end{cases} \quad \text{Eq. 97}$$

Observa-se que  $X_p$  são números complexos !



Podemos ilustrar o gráfico de  $X_p$



Para a determinação da resposta de regime, lembremos que

$$u(t) = Ue^{i\omega t} = H(\omega) p_0 e^{i\omega t} = \frac{1/k}{1 - r^2 + i2\zeta r} p_0 e^{i\omega t} \quad \text{Eq. 98}$$

Agora, se

$$p(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p e^{ip\omega_0 t} \quad \text{Eq. 99}$$



Então

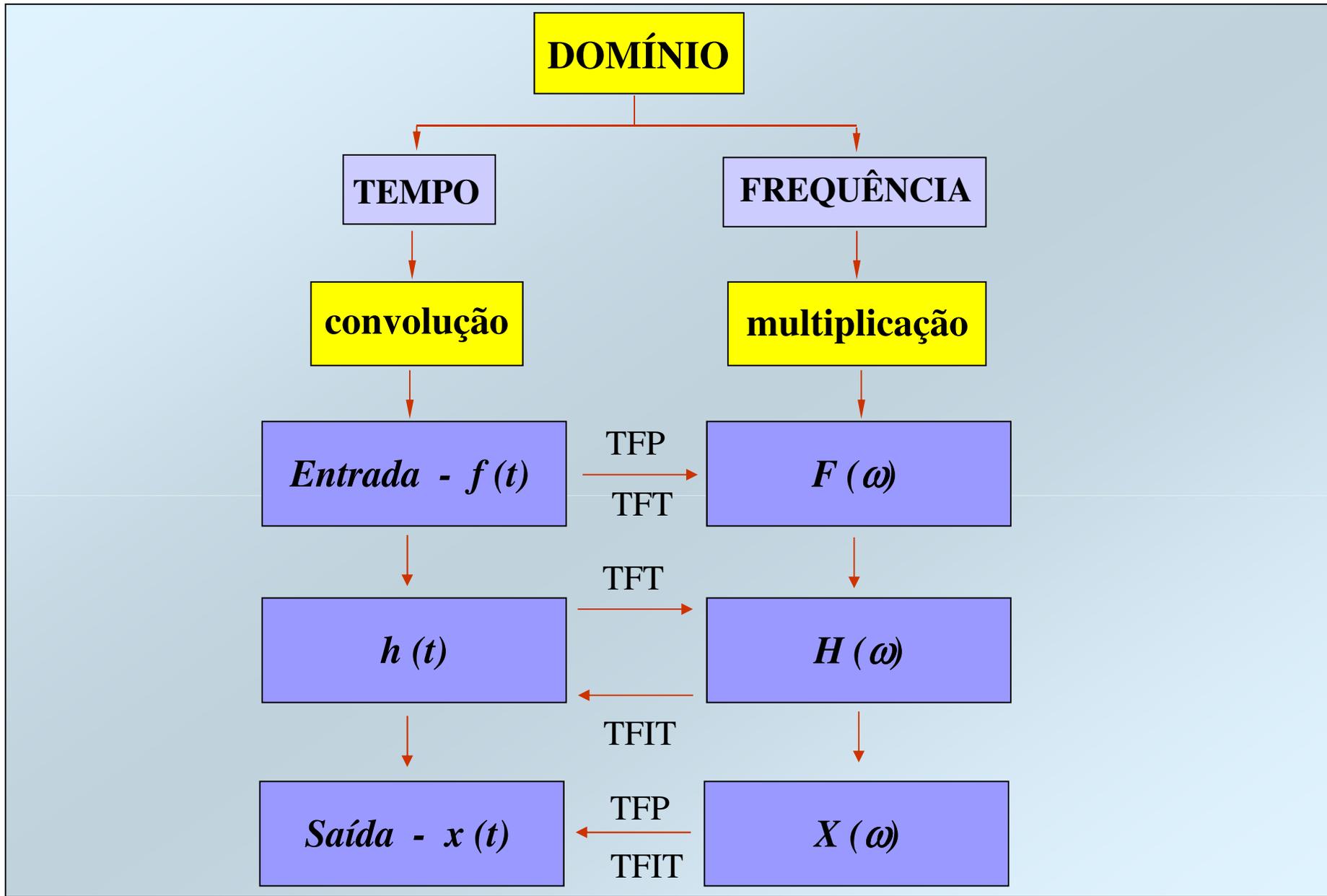
$$u(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} U_p e^{ip\omega_0 t} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_p X_p e^{ip\omega_0 t} \quad \text{Eq. 100}$$

$$H_p(\omega) = \frac{1/k}{1 - (pr)^2 + j2\zeta pr} \quad \text{Eq. 101}$$

com  $r = \frac{\omega_0}{\omega_n}$

A seguir apresentamos um esquema geral para a determinação da resposta do sistema à uma entrada geral.





## 6.2 – A Integral de Fourier

Na seção 6.1 vimos que um sinal periódico pode ser expresso em termos das Séries de Fourier Complexas que são dadas por

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p e^{j p \omega_0 t}$$

Eq. 102

$$X_p = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j p \omega_0 t} dt$$

Eq. 103

Quando o sinal em questão não é periódico, este pode ser representado por uma *Integral de Fourier*, e esta integral é obtida fazendo-se o período  $T$  do sinal tender ao infinito. Para obtermos esta integral, definimos inicialmente

$$\omega_0 = \Delta\omega$$

Eq. 104

$$p \omega_0 = \omega_p$$

Eq. 105

$$X_p(\omega_p) = T X_p = \left( \frac{2\pi}{\Delta\omega} \right) X_p$$

Eq. 106



Usando as Eqs. 104, 105 e 106, as Eqs. 102 pode ser rescrita como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X(\omega_p) e^{j\omega_p t} \Delta\omega \quad \text{Eq. 107}$$

onde

$$X(\omega_p) = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) e^{-j\omega_p t} dt \quad \text{Eq. 108}$$

Conforme T tende ao infinito,  $\omega_p$  torna-se uma variável contínua e  $\Delta\omega$  transforma-se no diferencial  $d\omega$ . Então, as Eqs, 107 e 108 são escritas como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{Eq. 109}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{Eq. 110}$$



As Eqs. 109 e 110 são formam o chamado par de transformada de Fourier. A Eq. 110 é conhecida como a transformada de Fourier de  $x(t)$  e  $x(t)$  a transformada inversa de Fourier de  $X(\omega)$ . Para a existência da integral mostrada na Eq. 110 A seguinte condição deve ser obedecida.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(t)| dt \quad \text{Eq. 111}$$

**Exemplo**: vamos calcular a transformada de Fourier para o pulso retangular

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ x_0 & -T < t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad \text{Eq. 112}$$

A Eq. 110 estabelece que

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{Eq. 113}$$

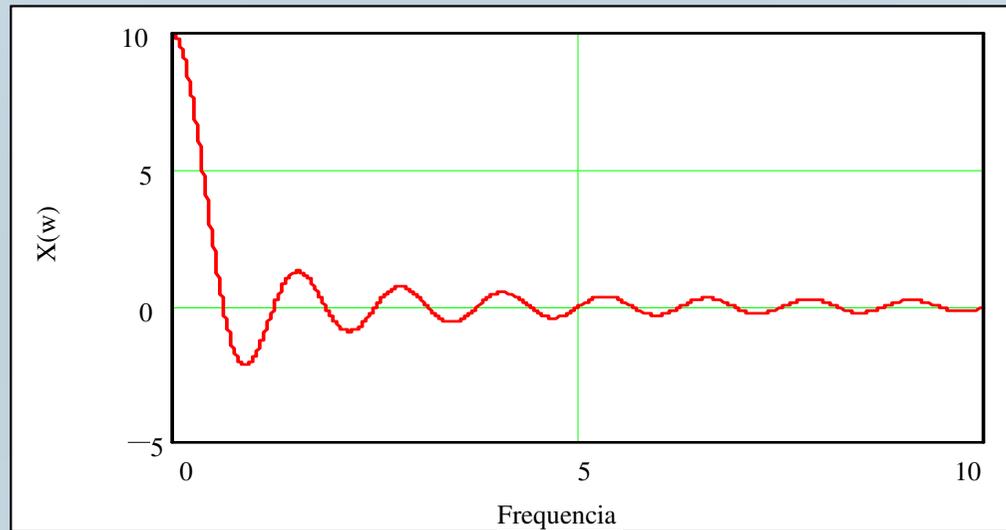


Então temos que

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0 e^{-j\omega t} dt = \left( \frac{p_0}{-j\omega} \right) (e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}) \quad \text{Eq. 114}$$

Esta última expressão pode ser reescrita como

$$X(\omega) = 2 p_0 T \left( \frac{\text{sen } \omega T}{\omega T} \right) \quad \text{Eq. 115}$$



### 6.3 – Relação entre a Resposta ao Impulso e a Resposta em Frequência

Lembramos que a resposta ao impulso de um sistema de 01 GDL com Amortecimento viscoso ( $\zeta < 1$ ) é dada por

$$h(t) = \left( \frac{1}{m\omega_d} \right) e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t \quad \text{Eq. 116}$$

Usando a Eq. 110 podemos calcular a transformada de Fourier da Eq. 116

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t e^{-j\omega t} dt = 1 \quad \text{Eq. 117}$$

Desta forma, através das definições acima é possível concluirmos que

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

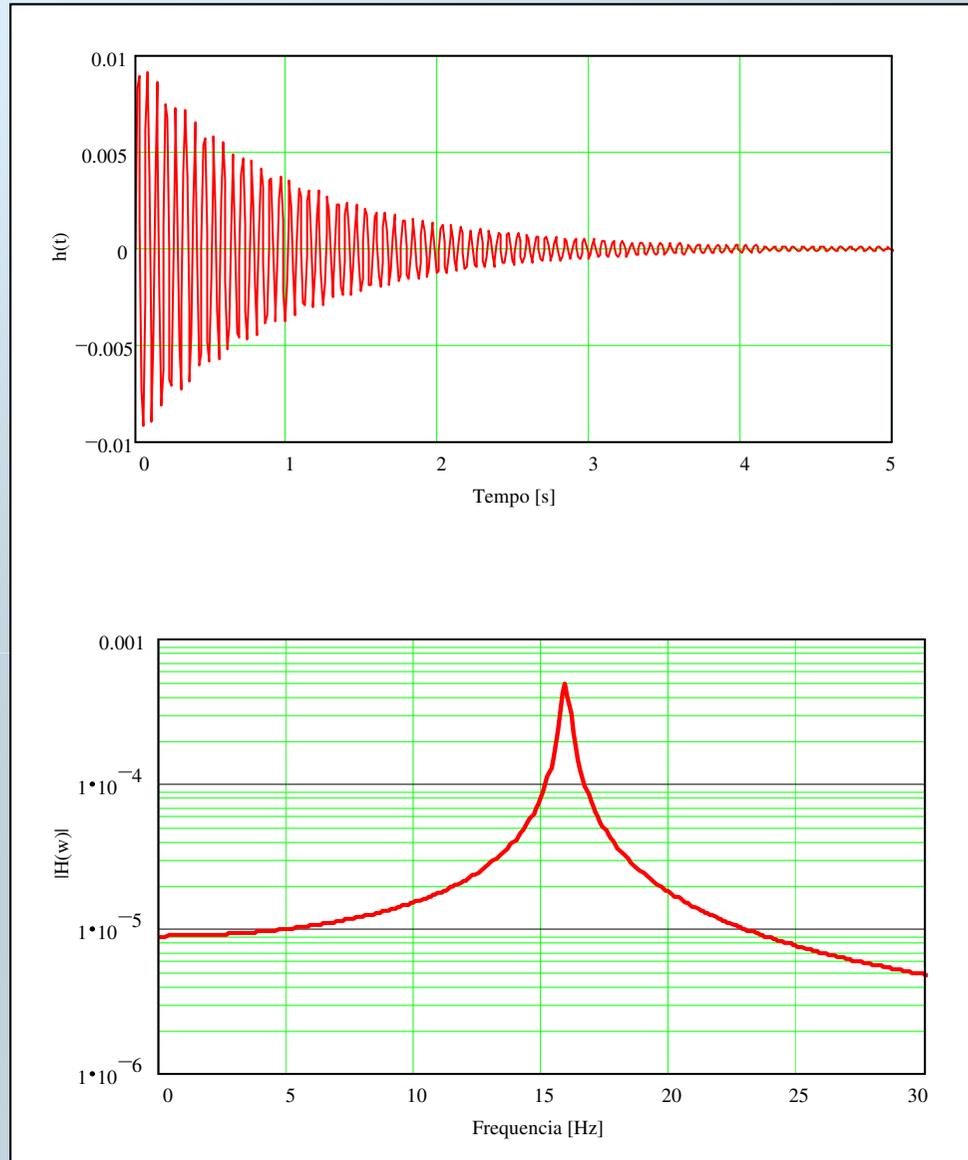
Ou seja, a resposta ao impulso é a transformada inversa de Fourier da resposta em Frequência e vice-versa !

Eq. 118



Exemplo

TRANSFORMADA DIRETA



TRANSFORMADA INVERSA

