UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

SEM 533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I

Sistemas de Primeira e Segunda Ordem

Resp.: Prof. Tit. Paulo S. Varoto

1- OBJETIVOS

A presente aula tem os seguintes objetivos principais:

- Apresentar e discutir as principais características de sistemas de primeira e segunda ordem.
- Estudar a resposta destes sistemas à entradas conhecidas: degrau unitário, rampa, impulso e outras.
- Realizar simulações computacionais no ambiente MATLAB para fixação dos conceitos acima.

Bibliografia:
- Doebelin, E. O., System Dynamics: modeling, analysis, simulation and design, Marcel Dekker, 1998.
- Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Ed. Rima, 2007

2- CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Forma geral de um sistema dinâmico linear de parâmetros concentrados:

$$\underset{q_i(t)}{\text{Entrada}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{SISTEMA}\\ H(s),\, h(t)\end{array}} \longrightarrow \underset{q_o(t)}{\text{Saída}}$$

No domínio do tempo a EDO do sistema é escrita como:

$$\underbrace{a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o}_{\text{SISTEMA } (q_o\,(t) \text{ saída})} = \underbrace{b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + b_1 \frac{dq_i}{dt} \cdots + b_o q_i}_{\text{ENTRADA } (q_i\,(t))} \quad (1)$$

Cont. ...

No domínio da variável de Laplace com ***condições iniciais nulas*** temos:

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) Q_o(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0\right) Q_i(s)$$

Sendo então a F.T. dada por:

$$\boxed{\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}}$$

Cont. ...

A F.T. escrita na forma padrão fica:

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_m}{a_0}\right)s^m + \left(\frac{b_{m-1}}{a_0}\right)s^{m-1} + \cdots + \left(\frac{b_1}{a_0}\right)s + \left(\frac{b_0}{a_0}\right)}{\left(\frac{a_n}{a_0}\right)s^n + \left(\frac{a_{n-1}}{a_0}\right)s^{n-1} + \cdots + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)s + 1}$$

Caso particular: F.T. sem ***numerador dinâmico***

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_0}{a_0}\right)}{\left(\frac{a_n}{a_0}\right)s^n + \left(\frac{a_{n-1}}{a_0}\right)s^{n-1} + \cdots + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)s + 1}$$

Cont. ...

De forma geral a relação entrada-saída pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = H(s)$$

E, no domínio de Laplace pode-se obter a saída do sistema a partir da seguinte relação algébrica

$$Q_o(s) = Q_i(s)\,H(s)$$

E a resposta do sistema pode então ser calculada a partir da transformada inversa de Laplace

$$q_o(t) = L^{-1}\left(Q_i(s)H(s)\right)$$

Expressão válida somente para a determinação da resposta de regime permanente !

SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM

A forma geral de um sistema de primeira ordem é obtida a partir da Eq. (1) :

$$a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_o q_i$$

Ou de forma mais simplificada:

$$a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_o q_i$$

Na forma padrão:

$$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)\frac{dq_o}{dt} + q_o = \left(\frac{b_o}{a_0}\right) q_i$$

Cont. ...

De forma compacta esta última equação pode ser escrita como:

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = Kq_i$$

Onde os parâmetros $\boldsymbol{\tau}$ e ***K*** são denominados de ***constante de tempo*** e ***ganho de regime permamente***, respectivamente. A constante de tempo possui unidade de tempo ([s]) enquanto que a dimensão do ganho de regime é dada pela razão entre a unidade da saída pela entrada ($[K] = [q_o]/[q_i]$).

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os lados da EDO temos:

$$\tau\left(sQ_o(s) - q_o(o)\right) + Q_o(s) = KQ_i(s)$$

Cont. ...

Rearranjando esta última expressão temos:

$$\left(s+\frac{1}{\tau}\right)Q_o(s)-q_o(o)=\frac{K}{\tau}Q_i(s)$$

Devemos observar que esta última expressão inclui a condição inicial ($q_o(0)$). Se esta for nula a equação fica

$$\left(s+\frac{1}{\tau}\right)Q_o(s)=\frac{K}{\tau}Q_i(s)$$

E com base na definição de F.T. temos então:

$$Q_o(s)=\frac{K}{\tau}Q_i(s)\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$

Cont. ...

E então a resposta no tempo é obtida pela transformada inversa de Laplace:

$$q_o(t) = \frac{K}{\tau} L^{-1}\left(Q_i(s)\frac{1}{\left(s+\dfrac{1}{\tau}\right)}\right)$$

É interessante notar que mesmo no caso da condição inicial não nula ainda podemos obter a solução pelo método da transformada. Neste caso

$$q_o(t) = L^{-1}\left(\frac{K}{\tau} Q_i(s)\frac{1}{\left(s+\dfrac{1}{\tau}\right)} + \frac{q_o(0)}{\left(s+\dfrac{1}{\tau}\right)}\right)$$

Cont. ...

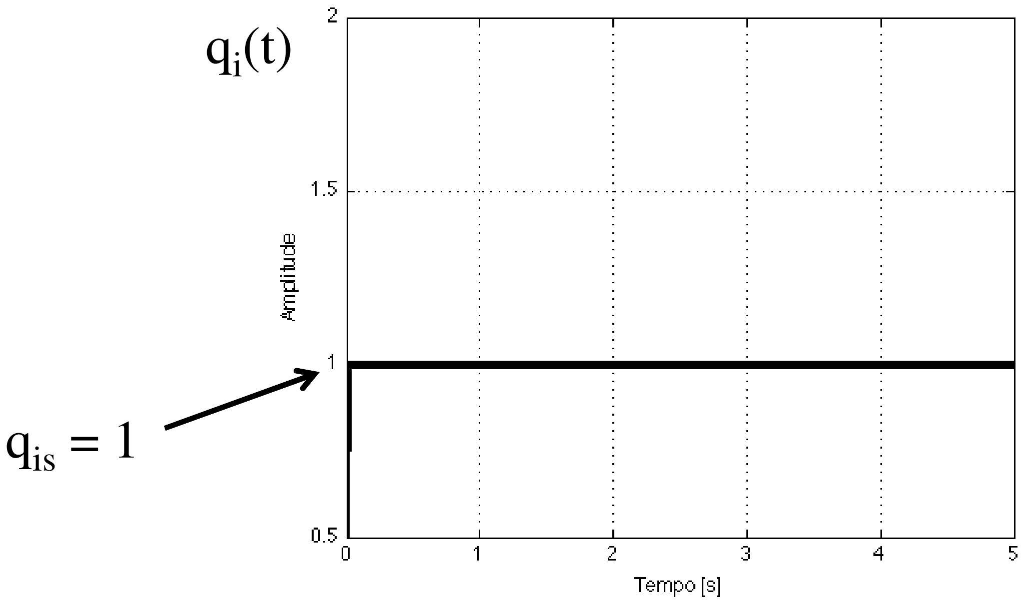
Ou ainda:

$$\underbrace{q_o(t) = q_o(o)L^{-1}\left(\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\right)}_{\text{Transiente}} + \underbrace{\frac{K}{\tau}L^{-1}\left(Q_i(s)\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\right)}_{\text{Permanente}}$$

Como se vê a solução com condições iniciais não nulas ainda é possível. Vejamos a seguir alguns exemplos que ilustram os aspectos teóricos.

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM - EXEMPLOS

Vamos obter a resposta de um sistema de primeira ordem à entrada degrau unitário mostrada abaixo



Analiticamente a entrada degrau unitário pode ser expressa como:

$$q_i(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Obs: a notação $u(t)$ ou $\mu(t)$ são amplamente usadas para denotar funções degrau !

Cont. ...

A Transformada de Laplace da entrada é dada por: $Q_i(s) = L\left(u(t)\right) = \dfrac{1}{s}$

Logo, a solução é dada por

$$q_o(t) = q_o(o)L^{-1}\left(\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\right) + \frac{K}{\tau}L^{-1}\left(\frac{1}{s}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\right)$$

$$q_o(t) = q_o(o)e^{-\frac{1}{\tau}t} + K\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) = K + \left(q_o(o) - K\right)e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

Cont. ...

Agora, para um degrau de amplitude não unitária ($q_{is} \neq 1$) temos:

$$q_o(t) = q_o(o)e^{-\frac{1}{\tau}t} + Kq_{is}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) = Kq_{is} + \left(q_o(o) - Kq_{is}\right)e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

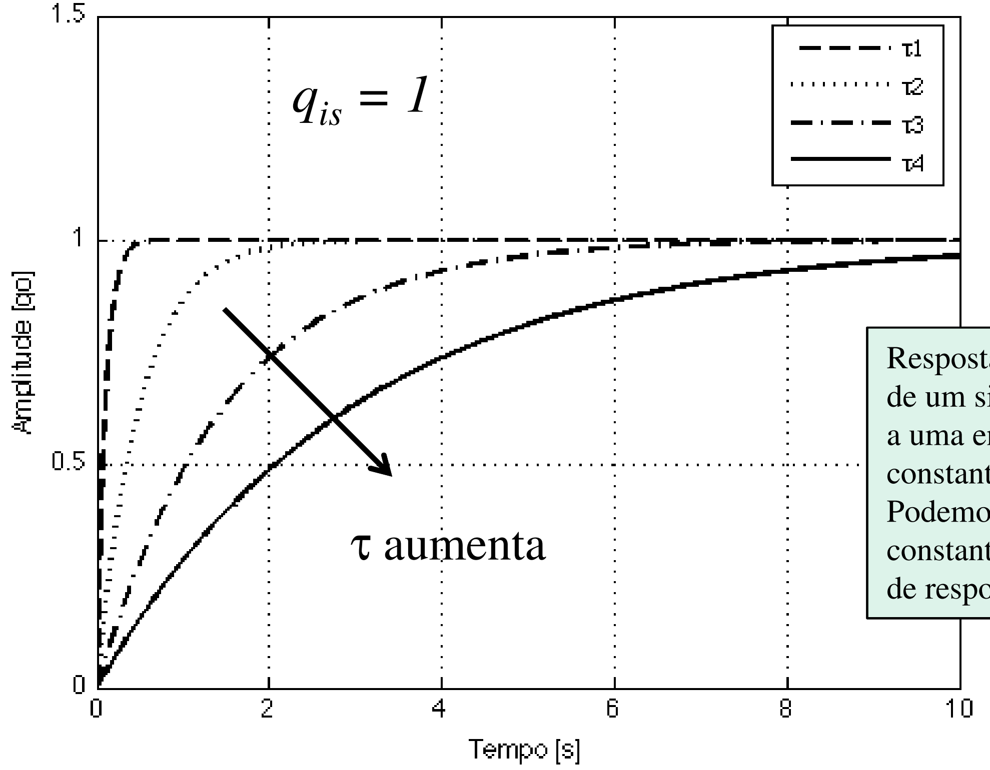
E para condições iniciais nulas ($q_o(0) = 0$) temos

$$q_o(t) = Kq_{is}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$$

Vejamos graficamente como ficam as soluções acima

Cont. ...

$$q_o(t) = Kq_{is}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$$



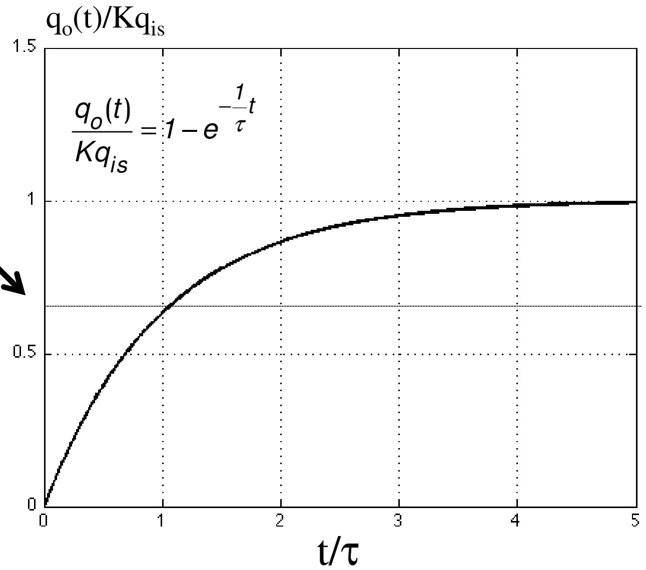
Resposta de regime permanente de um sistema de primeira ordem a uma entrada degrau unitário e constante de tempo variável ! Podemos verificar a influência da constante de tempo τ na velocidade de resposta do sistema !

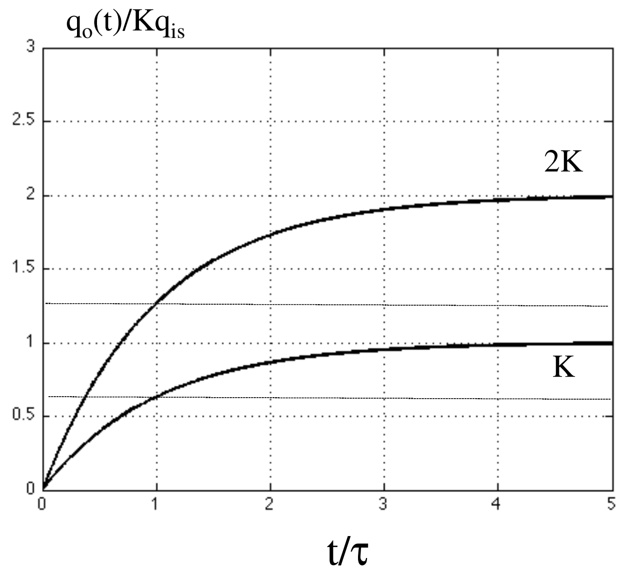
Cont. ...

Conclusão 1: A constante de tempo τ interfere diretamente na velocidade de resposta do sistema de primeira ordem e de forma inversamente proporcional. Quanto menor a constante de tempo maior é a velocidade de resposta do sistema pois o mesmo atinge a resposta de regime permanente num intervalo de tempo menor (e vice versa)

Façamos agora uma análise admensional da resposta de regime ao degrau unitário:

t/τ	$q_o(t)/Kq_{is}$
0	0
1	0,632
2	0,865
3	0,950
4	0.982
∞	1.000

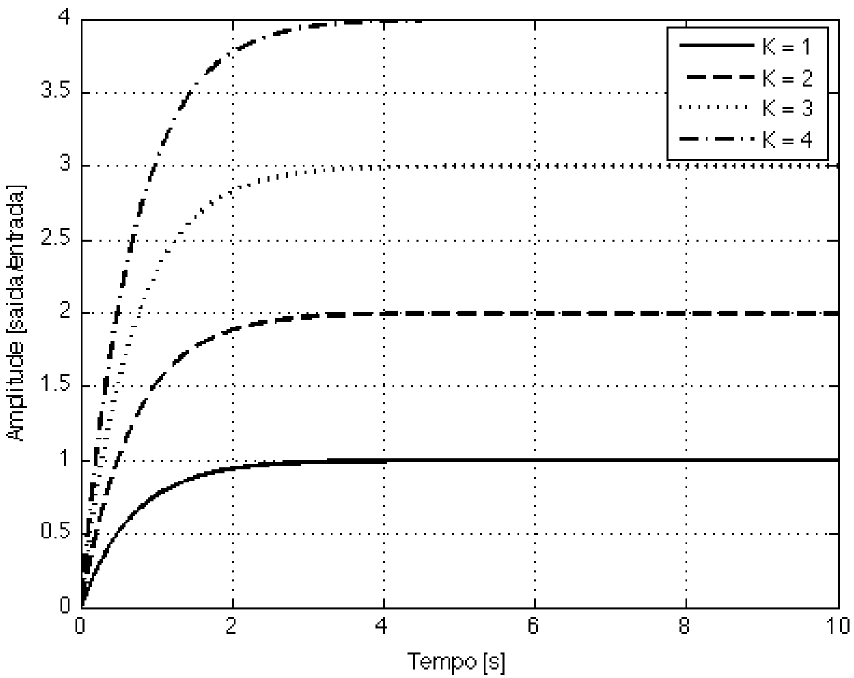




Cont. ...

Definição: A constante de tempo de um sistema de primeira ordem τ representa o intervalo de tempo necessário para que o sistema atinja *63,25 %* da resposta de regime permanente para uma entradad degrau unitário na origem dos tempos e com condições iniciais nulas.

Já o grafico abaixo mostra a influência do ganho de regime K na resposta de regime permanente do sistema:



Cont. ...

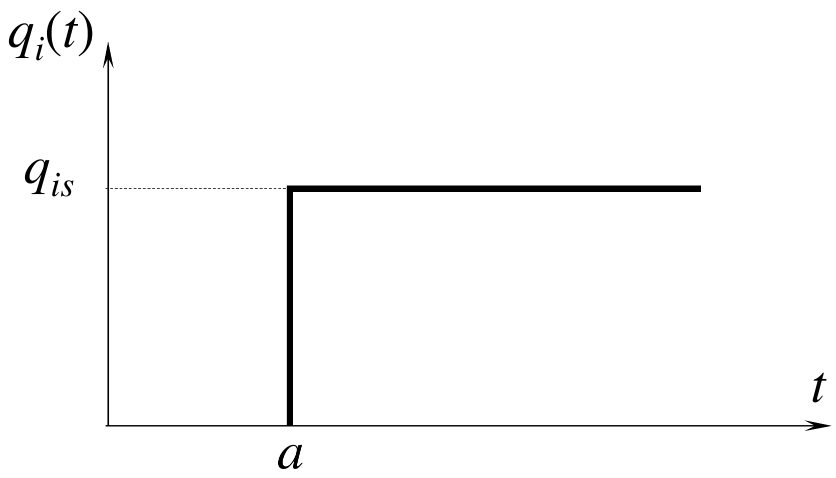
Definição: ***O ganho de regime permanente*** ***K*** (ou ***sensibilidade estática***) é definido como a quantidade de saída que se obtém em regime permanente por cada unidade de entrada aplicada ao sistema.

Algébricamente:

$$K = \frac{[q_o(t)]}{[q_i(t)]}$$

Cont. ...

Vejamos agora o caso onde a entrada degrau unitário apresenta um atraso no tempo:



$$q_i(t) = q_{is}u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ q_{is} & t \geq a \end{cases}$$

E para o cálculo da Transformada de Laplace usamos a seguinte propriedade

$$L\left(f(t-a)\right) = F(s)e^{-as} \Longleftrightarrow L^{-1}\left(F(s)e^{-as}\right) = f(t-a)$$

Onde F(s) representa a transformada da função não defasada

Cont. ...

Logo para o degrau com atraso temos

$$Q_i(s) = q_{is}\left(\frac{1}{s}\right)e^{-as}$$

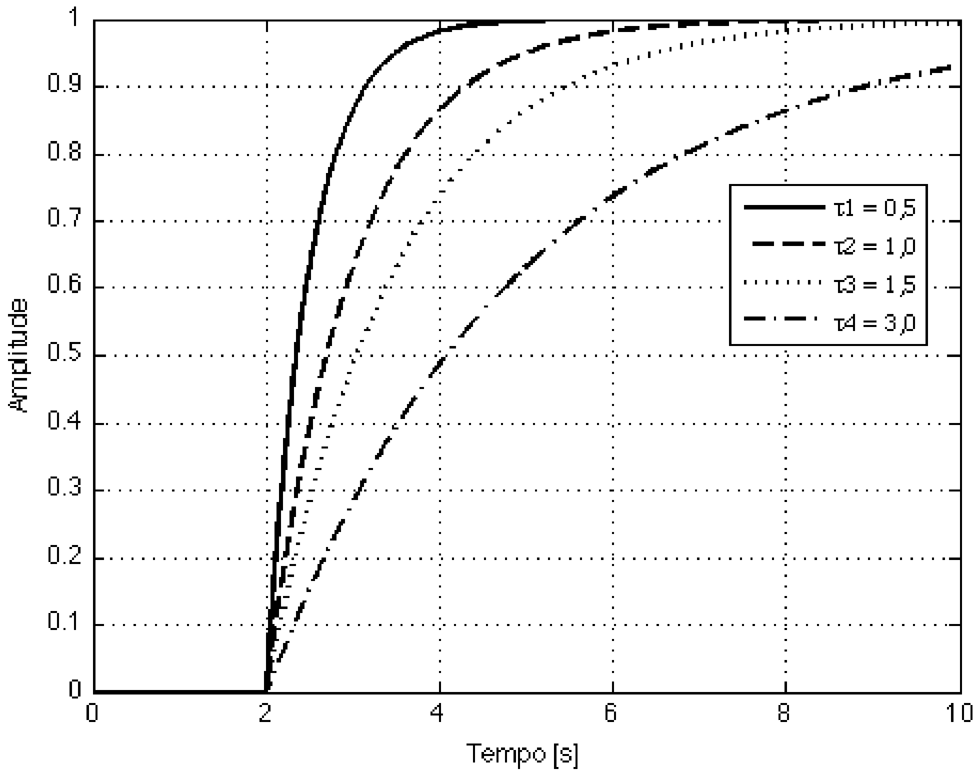
E para determinarmos a resposta de regime permanente usamos

$$q_o(t) = \frac{K}{\tau}L^{-1}\left(Q_i(s)\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\right) \Rightarrow q_o(t) = q_{is}\frac{K}{\tau}L^{-1}\left(\left(\frac{1}{s}\right)\frac{1}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}e^{-as}\right)$$

$$q_o(t) = Kq_{is}\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}(t-a)}\right)u(t-a)$$

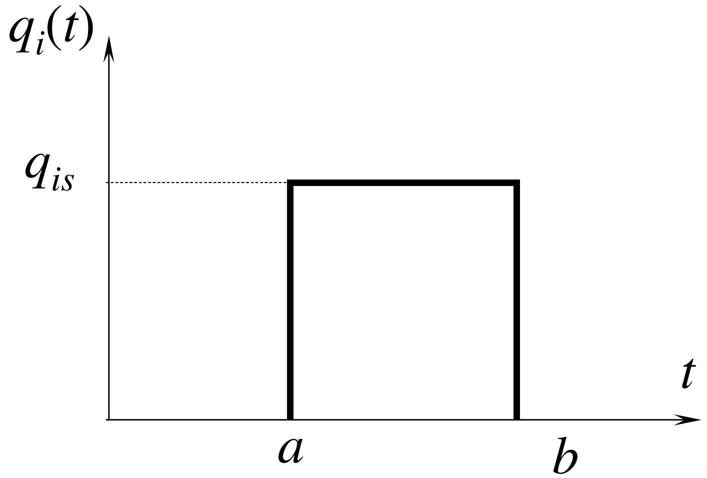
Cont. ...

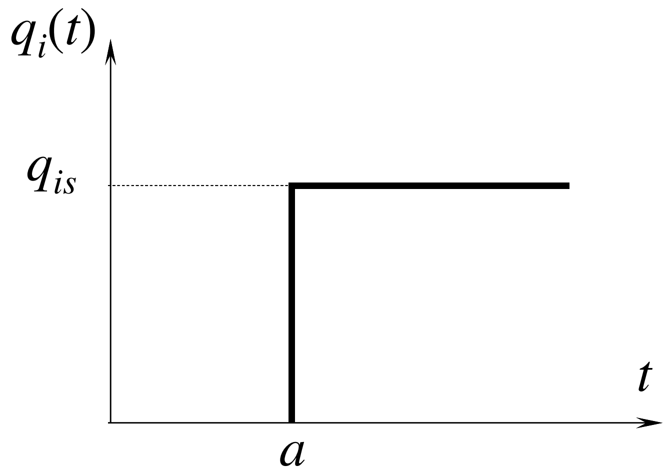
Graficamente:

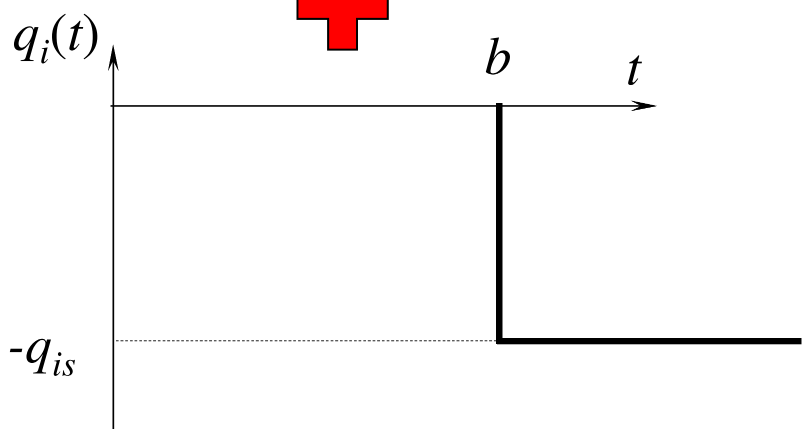


Cont. ...

Vamos agora analisar o seguinte caso







$$q_i(t) = q_{is}u(t-a)u(t-a) - q_{is}u(t-b)u(t-b)$$

$$Q_i(s) = q_{is}\frac{1}{s}e^{-as} - q_{is}\frac{1}{s}e^{-bs}$$

$$= q_{is}\frac{1}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right)$$

Cont. ...

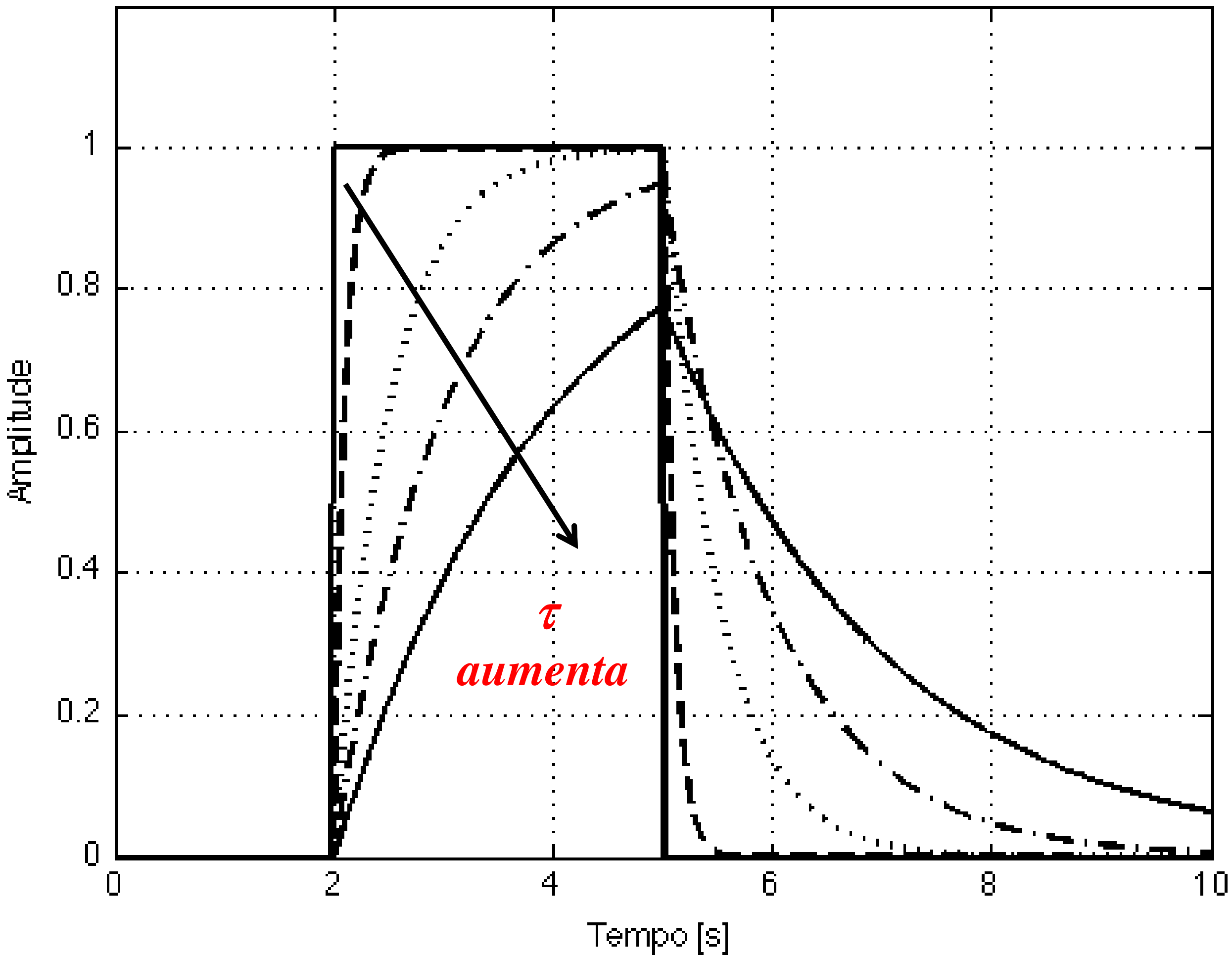
Calculamos agora a resposta de regime permanente do sistema:

$$q_o(t) = \frac{K}{\tau} L^{-1}\left(Q_i(s) \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \right) \Rightarrow q_o(t) = \frac{K}{\tau} q_{is} L^{-1}\left(\frac{1}{s} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} e^{-as} - \frac{1}{s} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} e^{-bs} \right)$$

$$\boxed{q_o(t) = K q_{is}\left(\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}(t-a)}\right) u(t-a) - \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}(t-b)}\right) u(t-b) \right)}$$

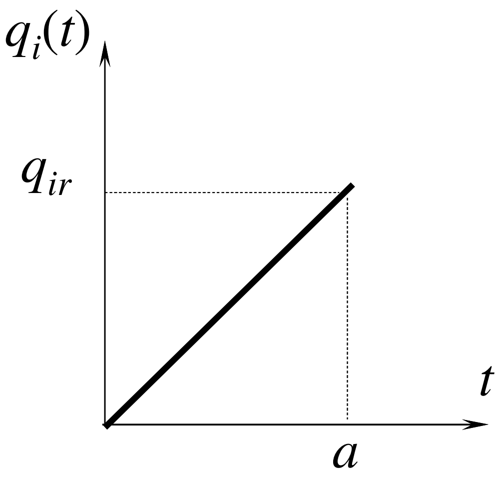
Cont. ...

Graficamente:



Cont. ...

Agora vamos obter a resposta de regime permanente do sistema de primeira ordem à uma entrada do tipo ***rampa.***

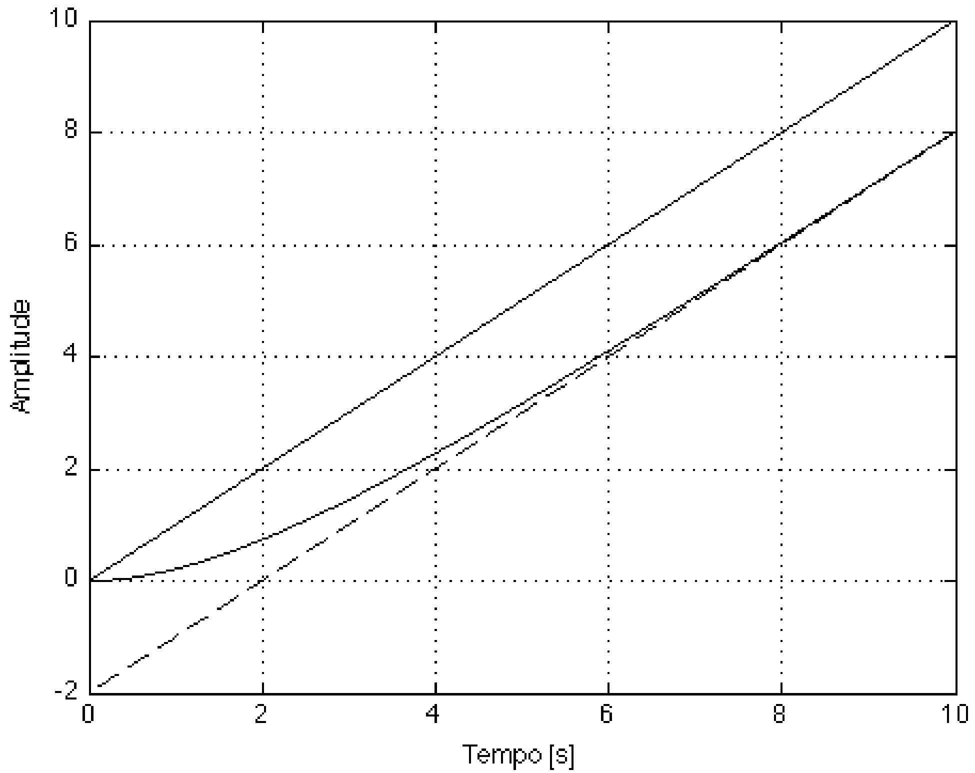


$$q_i(t) = \frac{q_{ir}}{a} t = mt \quad \Rightarrow \quad Q_i(s) = m\,\frac{1}{s^2}$$

$$q_o(t) = \frac{K}{\tau} L^{-1}\left(Q_i(s) \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \right) = \frac{K}{\tau} m L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \right) \quad \Rightarrow$$

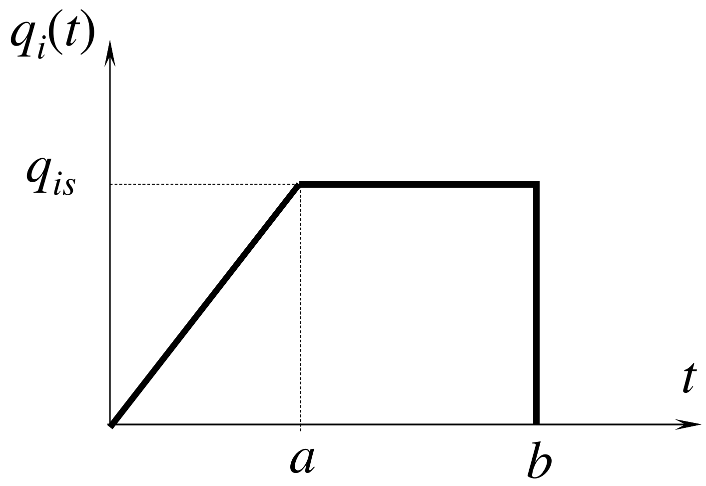
Cont. ...

$$q_o(t) = \frac{K}{\tau} mL^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \right) = \boxed{K\tau \frac{q_{ir}}{a}\left(e^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{1}{\tau}t - 1 \right) u(t)}$$



Cont. ...

Examinemos agora o caso de uma entrada combinada



Analiticamente escrevemos

$$q_i(t) = \frac{q_{is}}{a} tu(t) - \frac{q_{is}}{a} tu(t-a) - q_{is} u(t-b) u(t-b)$$

Cuja Transformada de Laplace é

$$Q_i(s) = \frac{q_{is}}{a} \frac{1}{s^2} - \frac{q_{is}}{a} \frac{1}{s^2} e^{-as} - q_{is} \frac{1}{s} e^{-bs}$$