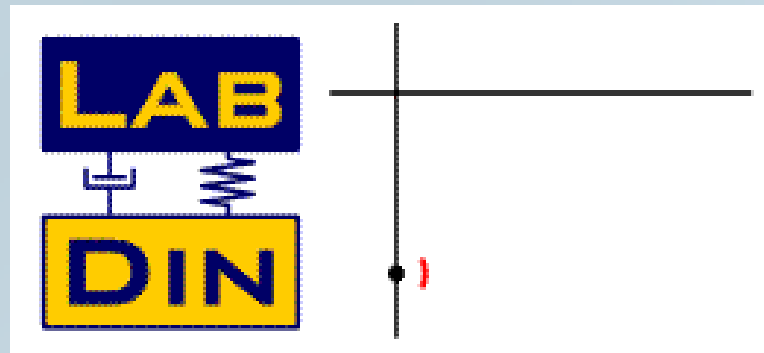


**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Laboratório de Dinâmica

**SEM 533 – MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE
SISTEMAS DINÂMICOS I**

Resposta Transiente de Sistemas de Segunda Ordem



Resp.: Prof. Dr. Paulo S. Varoto



1 – OBJETIVOS

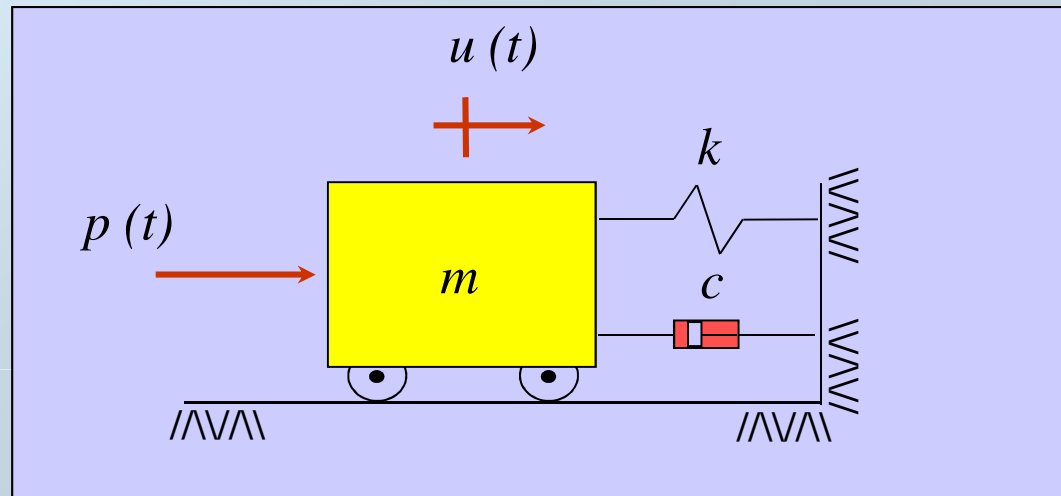
Esta aula tem os seguintes objetivos:

- Discutir a resposta livre de um sistema de 01 GDL sem e com amortecimento
- Apresentar e discutir o conceito de frequência natural de um sistema de 01 GDL para os casos conservativo e não conservativo
- Apresentar e discutir a técnica do decremento logarítmico na determinação experimental do fator de amortecimento viscoso.



2 – Modelo Matemático

Modelo de 01 GDL com amortecimento viscoso:



Equação de movimento: 2ª de Newton

$$\sum \vec{F} = m \ddot{u}$$



Obtém-se então a seguinte equação diferencial do movimento:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

Eq. 1

Onde:

- $m\ddot{u}$ é o termo de inércia
- $c\dot{u}$ é a força de amortecimento viscoso
- ku é a força de mola
- $p(t)$ é a força de excitação externa

A Eq. 1 admite as seguintes condições iniciais

$$u(0) = u_0 \longrightarrow \text{Posição em } t = 0$$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}_0 \longrightarrow \text{Velocidade em } t = 0$$



A Eq. 1 pode ser reescrita em função de alguns parâmetros como a seguir:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right) p(t) \quad \text{Eq. 2}$$

Onde :

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \textbf{Frequência natural não amortecida} \text{ do sistema em rad/s}$$

(Propriedade do sistema que depende somente da massa e rigidez e não é função da excitação)

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} \Rightarrow \textbf{Fator ou razão de amortecimento viscoso} \text{ (adimensional)}$$

(Propriedade mensurável do sistema que exprime dissipação de energia)

$$c_{cr} = 2m\omega_n = \frac{2k}{\omega_n} = 2\sqrt{km} \Rightarrow \text{Constante de amortecimento crítico em Ns/m}$$



A solução da Eq. 2 é dada pela soma das soluções particular e complementar:

$$u(t) = u_p(t) + u_c(t) \quad \text{Eq. 3}$$

Onde:

- $u_p(t)$ é a solução permanente ou de regime e depende somente da excitação $p(t)$
- $u_c(t)$ é a solução complementar ou homogênea e depende das CIs

Para o caso da vibração livre, consideramos $p(t) = 0$ e então

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad \text{Eq. 4}$$

E a solução geral da Eq. 4 é dada por:

$$u(t) = \bar{C} e^{\bar{s}t} \quad \text{Eq. 5}$$

Substituindo, vem :

$$(\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n \bar{s} + \omega_n^2) \bar{C} e^{\bar{s}t} = 0 \quad \text{Eq. 6}$$



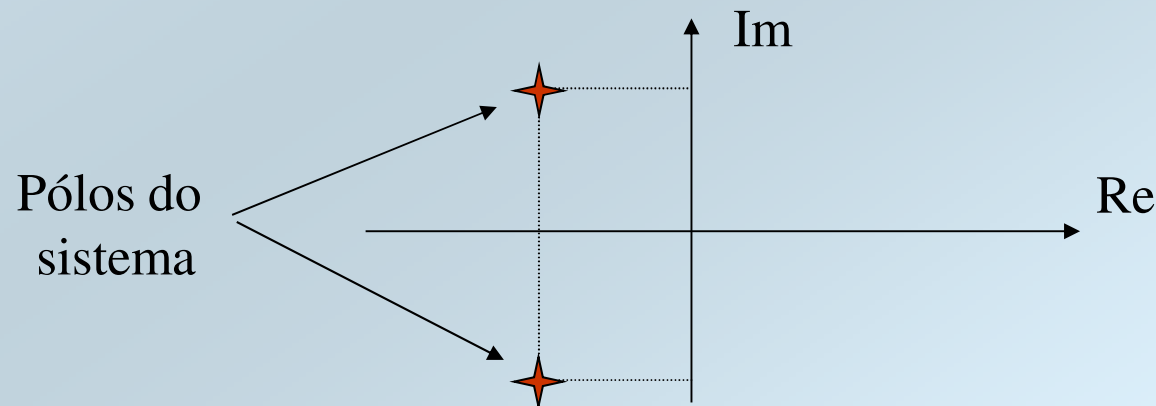
Desta última Eq. 6 obtemos a ***Equação Característica do Sistema Amortecido***, que é dada por

$$\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n \bar{s} + \omega_n^2 = 0$$

Eq. 7

Esta última Eq. 7 é de fundamental importância nos estudos da vibração livre e também no controle da vibração. Conforme será visto, suas raízes fornecem informação importante sobre características físicas do sistema.

Na teoria de controle clássico tais raízes são denominadas ***pólos*** do sistema e fornecem informações sobre a ***estabilidade*** do sistema. Estas raízes são geralmente complexas e possuem parte real negativa para sistemas estáveis !



3 – Resposta Livre Não Amortecida

Neste caso fazemos $\zeta = 0$ na Eq. 4, obtendo assim

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

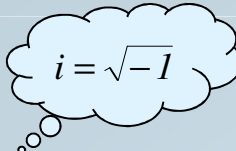
E a correspondente *equação característica não amortecida* é a seguinte

$$\bar{s}^2 + \omega_n^2 = 0$$

Eq. 8

Cujas raízes são dadas por:

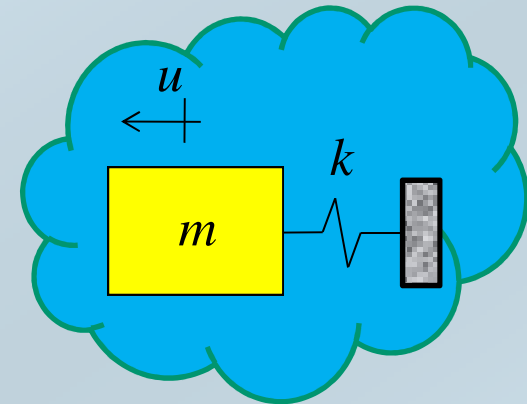
$$\bar{s}_{1,2} = \pm i\omega_n$$


$$i = \sqrt{-1}$$

E recordando que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Eq. 9



As raízes da eq. característica do sistema são complexas conjugadas e imaginárias puras. Elas são também dadas em função da frequência natural não amortecida do sistema !



Então, uma vez que temos duas raízes complexas e conjugadas, a solução da Eq. 7 que é a Eq. 5 é reescrita como

$$\begin{array}{l} \rightarrow \text{Esta é na verdade } u_c(t) \text{ de } u(t) = u_c(t) + u_p(t) \\ u(t) = \bar{C}_1 e^{i\omega_n t} + \bar{C}_2 e^{-i\omega_n t} \end{array} \quad \text{Eq. 8}$$

Onde C_1 e C_2 são constantes de integração e dependem das condições iniciais. A solução para $u(t)$ pode ser reescrita como:

$$u(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad \text{Eq. 9}$$

Onde a Eq. 9 foi obtida com o auxílio das Relações de Euler

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad \text{Eq. 10}$$

Agora, as constantes A_1 e A_2 são dadas por:

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 = A_1 \\ \dot{u}(0) &= \dot{u}_0 = A_2 \omega_n \end{aligned} \quad \text{Eq. 11}$$



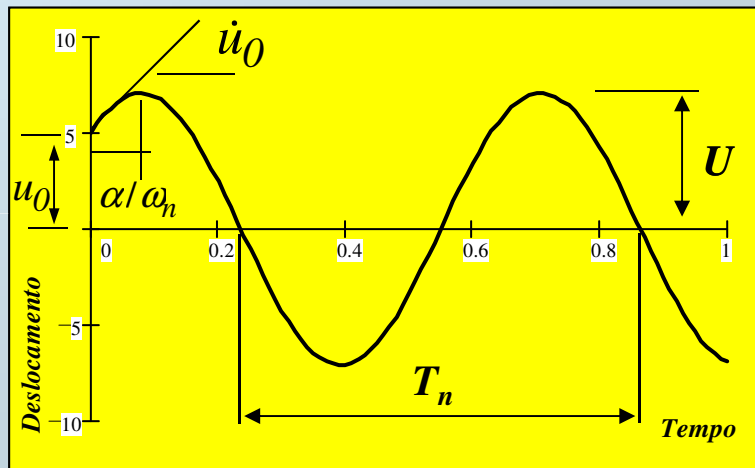
Então, em função dos parâmetros físicos temos:

$$u(t) = u_0 \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \right) \text{sen } \omega_n t$$

O sistema vibra na sua
frequência natural !

Eq. 12

Um exemplo gráfico



$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \text{Período natural não amortecido [s]}$$

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad \text{Frequência natural não amortecida [Hz]}$$

$$U = (A_1^2 + A_2^2)^{1/2} \quad \text{Módulo}$$

α ângulo de fase

Outra forma da solução

$$u(t) = U \cos(\omega_n t - \alpha) = U \cos \omega_n \left(t - \frac{\alpha}{\omega_n} \right)$$

Eq. 13



4 – Resposta Livre Amortecida

Neste caso, a equação de movimento livre é dada por

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad \text{Eq. 13}$$

E como no caso não amortecido assumimos a solução como

$$u(t) = \bar{C} e^{\bar{s}t} \quad \text{Eq. 14}$$

Substituindo-se a Eq. 14 na Eq. 13 temos

$$(\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n \bar{s} + \omega_n^2) \bar{C} e^{\bar{s}t} = 0 \quad \text{Eq. 15}$$

De onde obtemos a equação característica do sistema amortecido

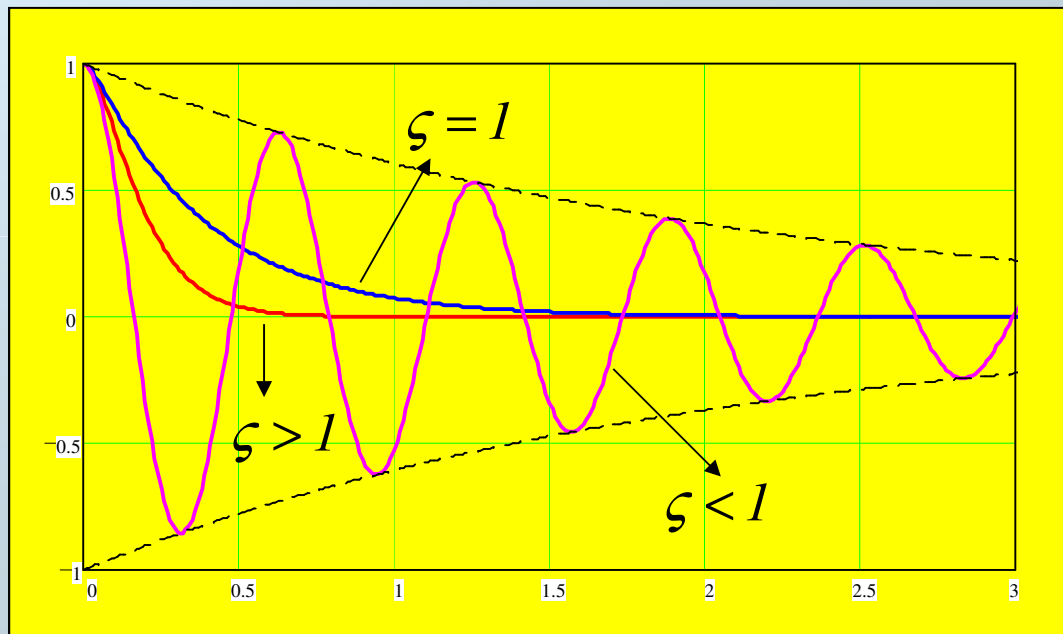
$$\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n \bar{s} + \omega_n^2 = 0 \quad \text{Eq. 16}$$



Neste caso, a equação característica do sistema, Eq. 16 possui duas raízes *complexas conjugadas* da seguinte forma

$$\bar{s}_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{Eq. 16}$$

O valor do fator de amortecimento ζ define três casos possíveis:



- Sub Amortecido: $0 \leq \zeta < 1$
- Criticamente Amort.: $\zeta = 1$
- Sobre Amortecido: $\zeta > 1$

Veremos cada um destes casos individualmente em seguida



a) Sistema sub amortecido $\zeta < 1$

Neste caso, escrevemos as raízes da equação característica como:

$$\bar{s}_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \quad \text{Eq. 17}$$

Onde neste caso, a constante ω_d é frequência natural amortecida (rad.s^{-1}) do sistema:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{Eq. 18}$$

E o *período natural amortecido* T_d é dado por

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \text{Eq. 19}$$

Deve-se notar que este caso ($\zeta < 1$) é o caso mais importante sob o ponto de vista experimental e prático. As grandezas ω_d e T_d são as grandezas mensuráveis nos problemas reais.

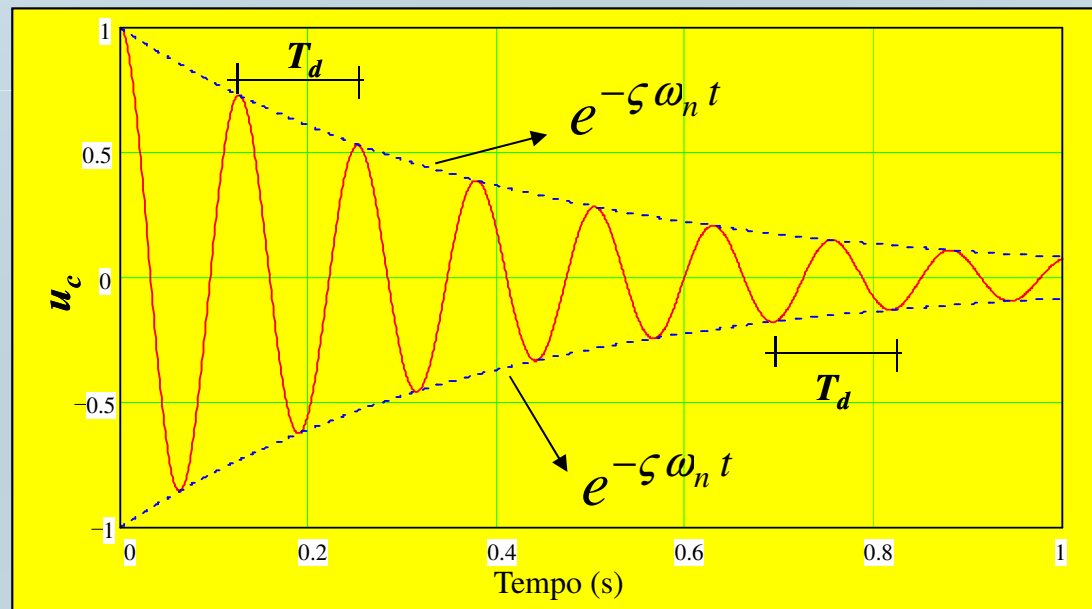


A solução para a vibração livre é então escrita como (Eq. 14):

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad \text{Eq. 17}$$

Ou então em função das CIs

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[u_0 \cos \omega_d t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta \omega_n u_0}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right] \quad \text{Eq. 18}$$



O sistema vibra na
frequência natural
Amortecida !



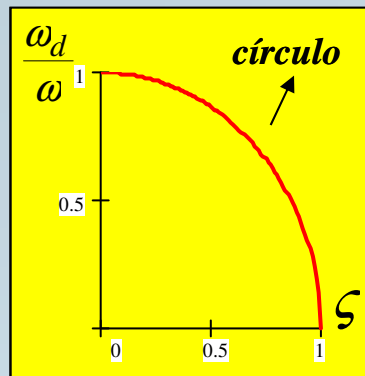
Outra forma de escrevermos a solução seria:

$$u(t) = U e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \alpha) \quad \text{Eq. 18}$$

Com:

$$U^2 = u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta \omega_n u_0}{\omega_d} \right)^2 \quad \text{Eq. 19} \quad \text{Magnitude}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\dot{u}_0 + \zeta \omega_n u_0}{\omega_d u_0} \quad \text{Eq. 20} \quad \text{Ângulo de fase}$$



a) Sistema criticamente amortecido $\zeta = 1$

As raízes da equação característica são dadas por

$$\bar{s} = -\zeta\omega_n \quad \text{Eq. 21}$$

E a solução fica:

$$u(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\zeta\omega_n t} \quad \text{Eq. 22}$$

Ou em função das condições iniciais

$$u(t) = [\dot{u}_0 + (\zeta\omega_n u_0) t] e^{-\zeta\omega_n t} \quad \text{Eq. 23}$$

b) Sistema sobre amortecido $\zeta > 1$

Definimos:

$$\omega^* = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{frequência natural amortecida para } \zeta > 1 \quad \text{Eq. 24}$$

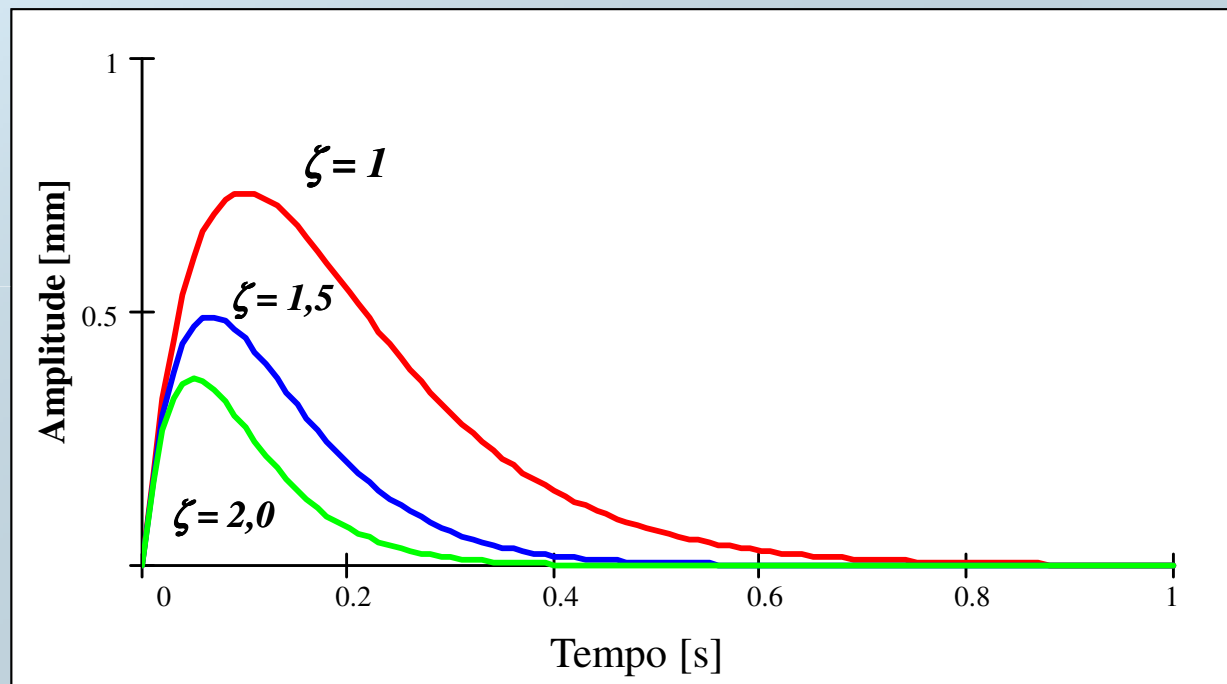


E a solução é então dada por

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (C_1 \cosh \omega^* t + C_2 \sinh \omega^* t)$$

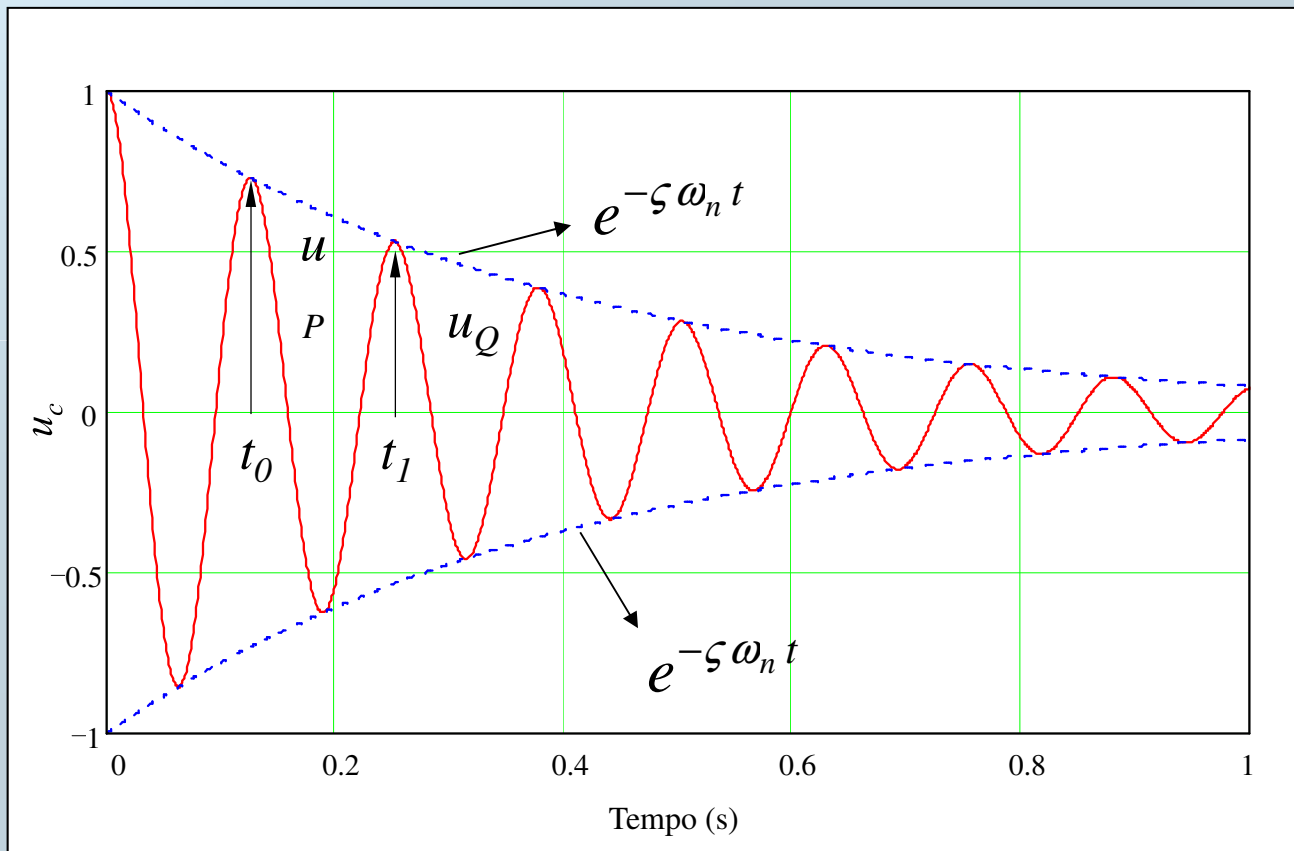
Eq. 25

Exemplos



5 – Determinação Experimental do Amortecimento

Trata-se de algumas técnicas para estimativa do fator de amortecimento ζ a partir de dados experimentais da *resposta livre amortecida*. Temos dois Métodos: o *decremento logarítmico* e o *método da meia amplitude*



No decremento logarítmico toma-se as amplitudes do movimento no início e no final de um ciclo, u_P e u_Q , respectivamente. Então, temos com base na Eq. 18

$$u(t) = Ue^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_P(t) = Ue^{-\zeta \omega_n t_P} \cos(\omega_d t - \alpha) \\ u_Q(t) = Ue^{-\zeta \omega_n t_Q} \cos(\omega_d t - \alpha) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Eq. 26} \\ \text{Eq. 27} \end{array}$$

Agora:

$$\frac{u_P}{u_Q} = e^{\zeta \omega_n T_d} \quad \text{Eq. 28}$$

O decremento log é então definido por

$$\delta = \ln \left(\frac{u_P}{u_Q} \right) = \zeta \omega_n T_d \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{Eq. 29}$$



Então, das Eqs. 28 e 29 obtemos

$$\delta = \zeta \omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Eq. 30

De onde obtemos o valor de ζ . Para valores de $\zeta < 0,2$

$$\delta \cong 2\pi\zeta$$

Eq. 31

Que é equivalente a

$$\zeta \cong \left(\frac{I}{2\pi} \right) \ln \left(\frac{u_P}{u_Q} \right)$$

Eq. 32



O *método da meia amplitude* baseia-se na *curva do envelope*:

$$\hat{u}(t) = Ue^{-\zeta\omega_n t} \quad \text{Eq. 32}$$

Que aplica-se a dois pontos tal que

$$\hat{u}_R = \frac{\hat{u}_P}{2} \quad \text{Eq. 33}$$

Esses pontos encontram-se separados N períodos inteiros amortecidos. Então

$$\frac{\hat{u}_P}{\hat{u}_Q} = e^{\zeta\omega_n NT_d} = 2 \quad \text{Eq. 34}$$

Combinando-se a Eq. 34 com a definição de período amortecido vem

$$\frac{2\pi N\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln(2)$$

Eq. 35

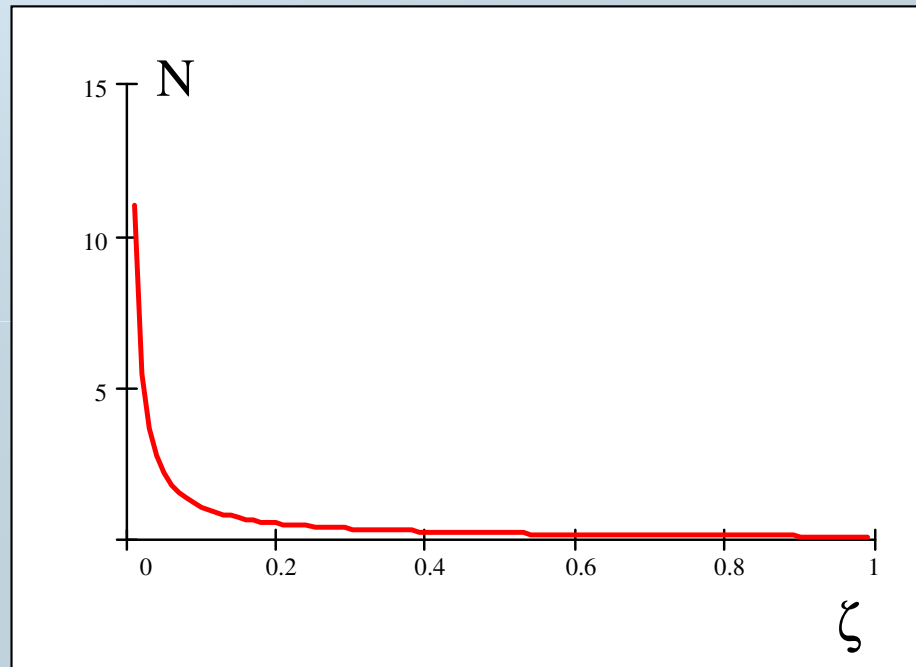
De onde obtemos o valor do amortecimento



Para valores pequenos de ζ temos a seguinte aproximação para este método

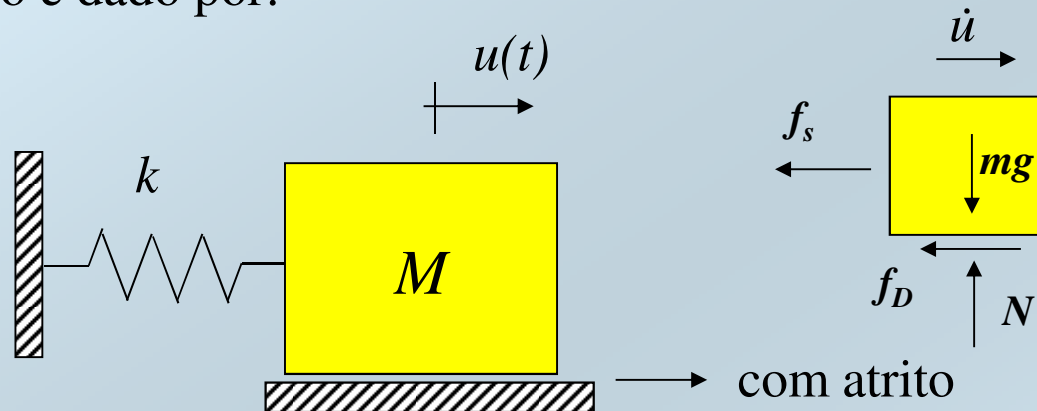
$$\zeta \cong \frac{0,11}{N}$$

Eq. 36



6 – Sistema de 01 GDL – Amortecimento de Coulomb

Neste caso, o modelo é dado por:



O modelo da força de atrito é dado por

$$f_D = \mu_k N = \mu_k mg \quad \text{Eq. 37}$$

A equação de movimento fica

$$-f_s - f_D = m\ddot{u} \quad \text{Eq. 38}$$



com

$$f_S = ku \quad \text{Eq. 39}$$

$$f_D = \mu_k mg \operatorname{sgn}(\dot{u}) \quad \text{Eq. 40}$$

Então

$$m\ddot{u} + ku = -\mu_k mg \quad \dot{u} > 0 \quad \text{Eq. 41}$$

$$m\ddot{u} + ku = \mu_k mg \quad \dot{u} < 0 \quad \text{Eq. 42}$$

Definindo agora

$$u_D = |f_D| \left(\frac{1}{k} \right) = \frac{\mu_k g}{\omega_n^2} \quad \text{Eq. 43}$$

As equações de movimento ficam



Combinando as Eqs. 41, 42 e 43 temos

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = -\omega_n^2 u_D \quad \dot{u} > 0$$

Eq. 44

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = +\omega_n^2 u_D \quad \dot{u} < 0$$

Eq. 45

