UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Laboratório de Dinâmica

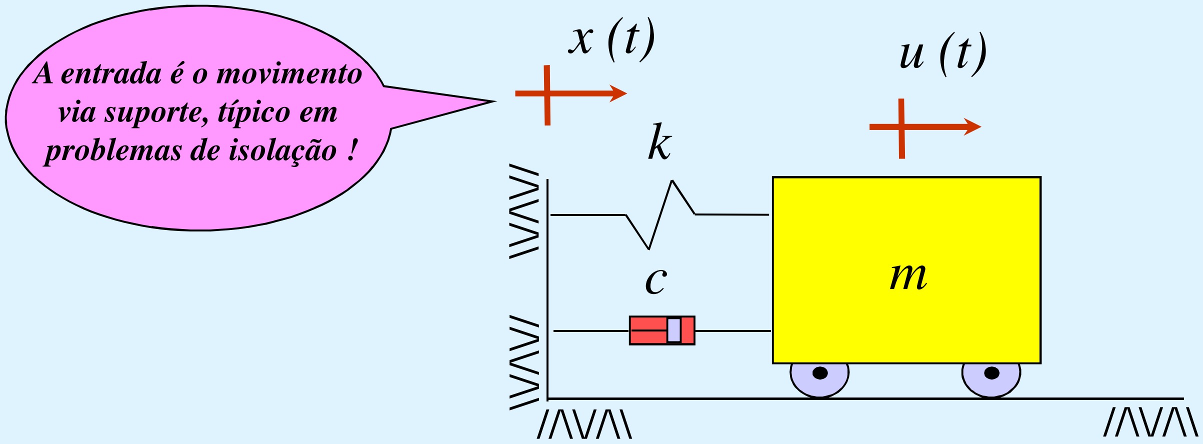
SEM 533 – MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS I

Conceitos de Transmissibilidade - Sistemas de Segunda Ordem

Resp.: Prof. Dr. Paulo S. Varoto

8 - Influência do Movimento no Suporte – *Isolação de Vibração*

Neste caso o modelo é o seguinte



E a equação de movimento é a seguinte:

$$k(x-u)+c(\dot{x}-\dot{u})=m\ddot{u}$$ Eq. 64

Definindo agora o ***deslocamento relativo*** ente a base e a massa:

$$\boxed{z=x-u}$$ Eq. 65

Temos então que a equação de movimento no deslocamento relativo é:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = p_{eff}(t) \qquad \text{Eq. 66}$$

O lado direito da Eq. 66 é o ***carregamento efetivo*** que é dado por:

$$\boxed{p_{eff}(t) = m\ddot{x}} \qquad \text{Eq. 67}$$

Observem que esta ¨***força efetiva***¨ é na verdade uma ***pseudo força de inércia***, pois é dada pelo produto da aceleração da base pela massa ***m*** ! E portanto, a massa responde à esta força como sendo a fonte de distúrbio do sistema. De forma alternativa, podemos expressar a equação de movimento, Eq. 64 em função do deslocamento absoluto da massa m. Neste caso temos:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = kx + c\dot{x} \qquad \text{Eq. 68}$$

Comparando-se os dois modelos acima descritos, Eq. 66 e Eq. 68, temos:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = p_{eff}(t)$$ Eq. 66

- Descrita em termos do deslocamento relativo *z*.
- Experimentalmente requer que *x* e *u* sejam medidos e então *z* calculado !
- A excitação é dada pela pseudo força de inércia

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = kx + c\dot{x}$$ Eq. 68

- Descrita em termos do deslocamento absoluto ***u***.
- Experimentalmente requer que apenas ***u*** seja medido
- A excitação é dada pela soma de parte das forças de mola e amortecedor !

Veremos em seguida a solução de ambos os modelos para entradas harmônicas. Inicialmente, consideramos o modelo descrito pela Eq. 66, definimos

$$p_{eff}(t) = -mX_0 e^{j\omega t}$$ Eq. 69

Agora, substituindo-se a Eq. 69 nas Eqs. 66 e 68 e rearranjando temos

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\omega^2 X_0 e^{j\omega t}$$ Eq. 70

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = (k + jc\omega) X_0 e^{j\omega t}$$ Eq. 71

Assumindo agora soluções harmônicas em z e u

$$z(t) = Z_0 e^{j\omega t}$$ Eq. 72

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t}$$ Eq. 73

Substituição das Eqs. 72 e 73 em 70 e 71 fornecem as amplitudes

$$Z_0 = \frac{-m\omega^2}{k - m\omega^2 + jc\omega} X_0$$ Eq. 74

$$U_0 = \frac{(k + jc\omega)}{k - m\omega^2 + jc\omega} X_0$$ Eq. 75

Reparem que a equação característica nos dois modelos é a mesma !

Com base nas Eqs. 74 e 75, podemos definir a ***Função de Resposta em Freqüência de Transmissibilidade de Movimento***, ou simplesmente ***Transmissibilidade***

$$TRr(\omega) = \frac{Z_0}{X_0}(\omega) = \frac{-m\omega^2}{k - m\omega^2 + jc\omega} \quad \text{Eq. 76}$$

$$TRa(\omega) = \frac{U_0}{X_0}(\omega) = \frac{k + jc\omega}{k - m\omega^2 + jc\omega} \quad \text{Eq. 77}$$

As FRF definidas pelas Eqs. 76 e 77 são importantíssimas no estudo da isolação de vibração pois elas definem a quantidade de movimento transmitida pela base para a massa ***m*** por unidade de movimento de entrada no suporte. São grandezas ***adimensionais***. A Eq. 76 define a transmissibilidade relativa pois a variável de saída é o movimento relativo (***z = x - u***) entre a base e a massa m. A Eq. 77 define a transmissibilidade absoluta, pois é definida em termos do deslocamento absoluto da massa m. Em função da razão de freqüências $r = \omega/\omega_n$ temos :

$$TRr(\omega) = \frac{-r^2}{1 - r^2 + j2\varsigma r} \quad \text{Eq. 78}$$

$$TRa(\omega) = \frac{1 + j2\varsigma r}{1 - r^2 + j2\varsigma r} \quad \text{Eq. 79}$$

Vejamos agora os gráficos das duas ***TR(ω)***

Gráfico da transmissibilidade relativa

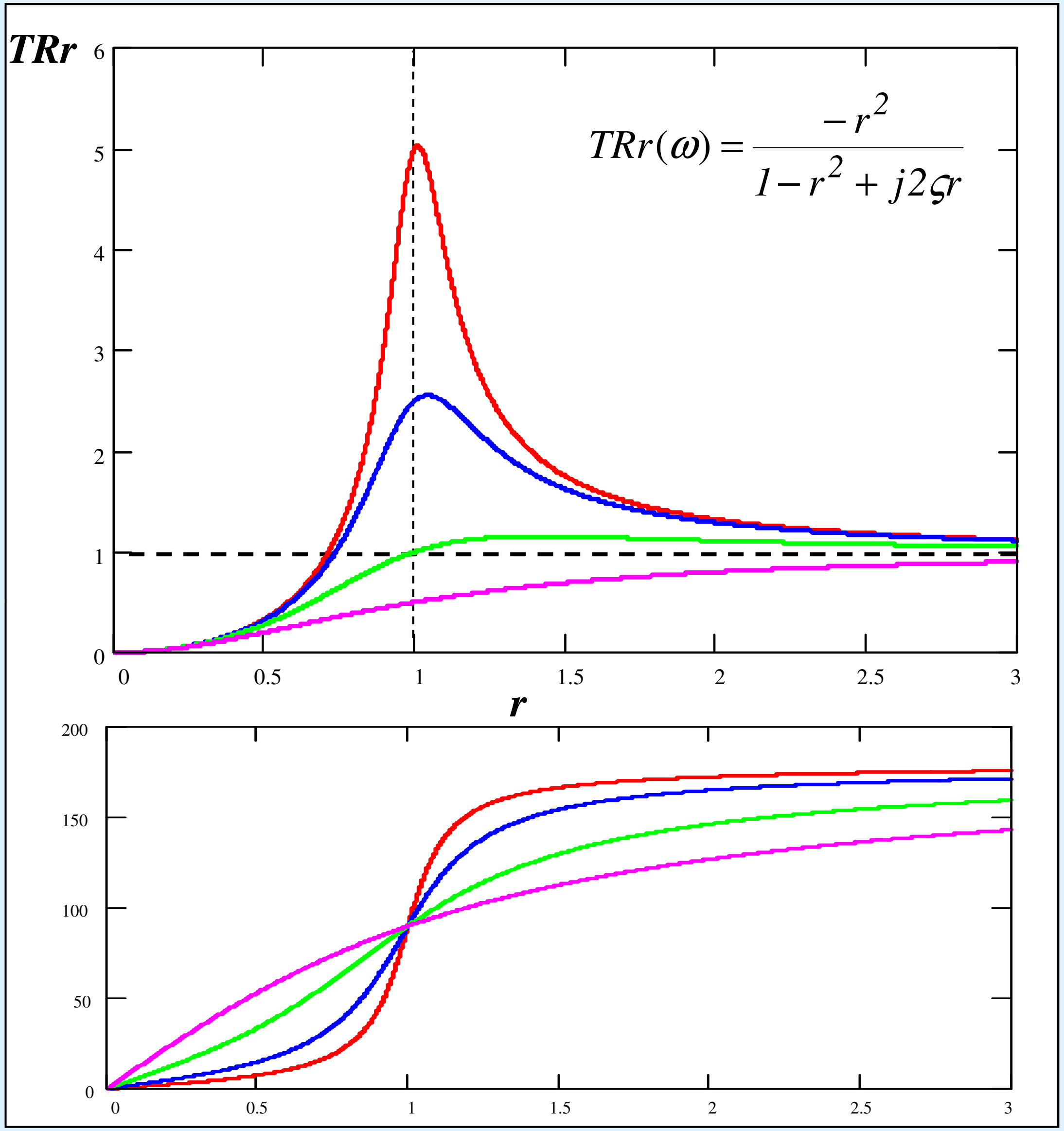
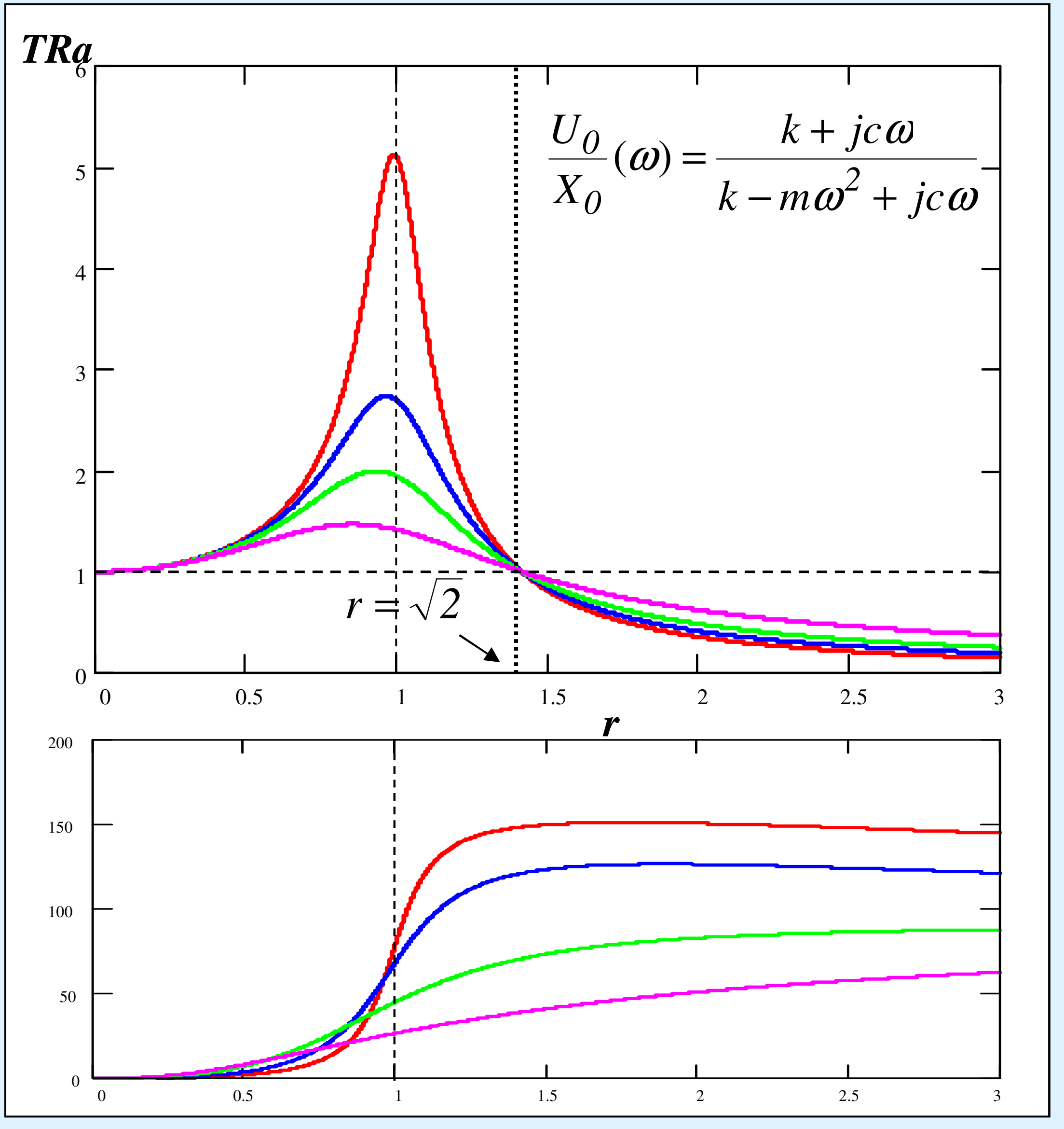


Gráfico da transmissibilidade absoluta



Uma segunda maneira de olharmos o problema de isolação da vibração é avaliarmos a força transmitida pelo suporte, chamada de força de reação. Com base no modelo, esta força é

$$f_{TR}(t) = k(x-u) + c(\dot{x}-\dot{u}) \qquad \text{Eq. 80}$$

Ou ainda em função do deslocamento relativo z :

$$f_{TR}(t) = kz + c\dot{z} \qquad \text{Eq. 81}$$

Lembrando agora que :

$$z(t) = Z_0 e^{j\omega t} \qquad \text{Eq. 82}$$

Substituição da Eq. 82 na Eq. 81 fornece :

$$f_{TR}(t) = (k + jc\omega) Z_0 e^{j\omega t} \qquad \text{Eq. 83}$$

Agora, da Eq. 76

$$TRr(\omega) = \frac{Z_0}{X_0}(\omega) = \frac{-m\omega^2}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$ Eq. 84

Obtemos

$$f_{TR}(t) = (k + jc\omega)TRr(\omega)X_0 e^{j\omega t}$$ Eq. 85

E finalmente :

Eq. 86
$$f_{TR}(t) = F_{TR}(\omega)e^{j\omega t}$$

Com :

$$\boxed{F_{TR}(\omega) = \frac{-m\omega^2(k + jc\omega)}{k - m\omega^2 + jc\omega} X_0}$$ Eq. 87

Desta última Eq. 87, podemos concluir que o produto ***– m*** $\boldsymbol{\omega^2 X_0}$ nada mais é senão a aceleração $\boldsymbol{a_0}$ da base, e então podemos definir a ***Função de Resposta em freqüência de Transmissibilidade de força*** ou simplesmente ***transmissibilidade de força***

$$TR_f(\omega) = \frac{F_{TR}}{a_0}(\omega) = \frac{k + jc\omega}{k - m\omega^2 + jc\omega} \qquad \text{Eq. 88}$$

E esta última expressão é idêntica à transmissibilidade absoluta de deslocamento dada pela Eq. aqui repetida por conveniência

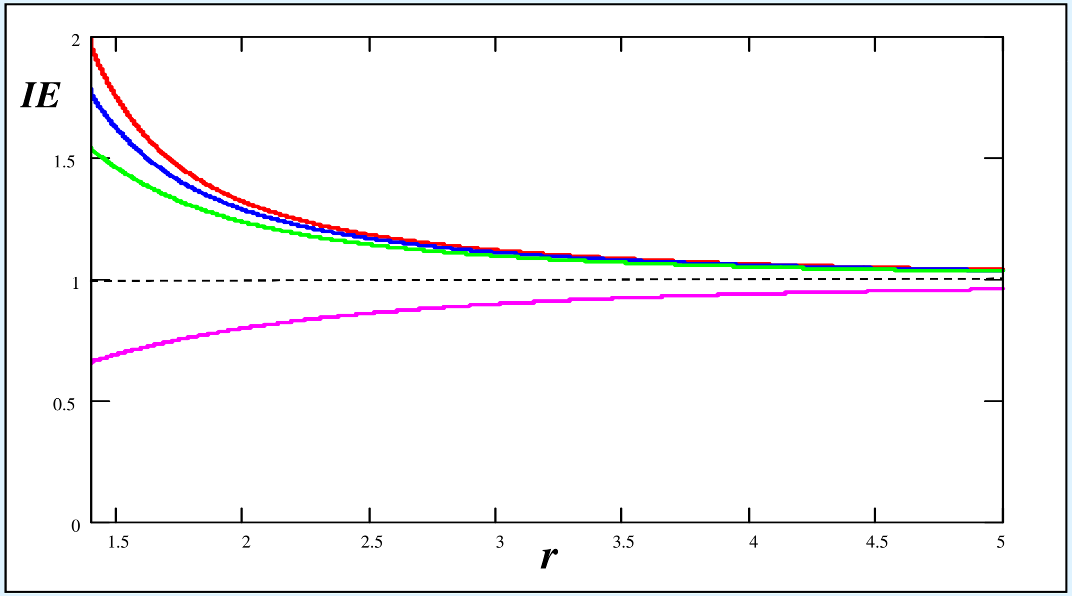
$$TR_a(\omega) = \frac{U_0}{X_0}(\omega) = \frac{k + jc\omega}{k - m\omega^2 + jc\omega} \qquad \text{Eq. 89}$$

Portanto, quando falamos em transmissibilidade, tanto faz referirmos-nos a força ou movimento, já que a função de transferência é essencialmente a mesma !

Quando projetamos um sistema de isolação de vibração que opera em freqüências acima do valor crítico $r = (2)^{1/2}$ é conveniente expressarmos o comportamento do sistema de 01 GDL em termos da ***eficiência de isolação*** (***IE***) ao invés da transmissibilidade

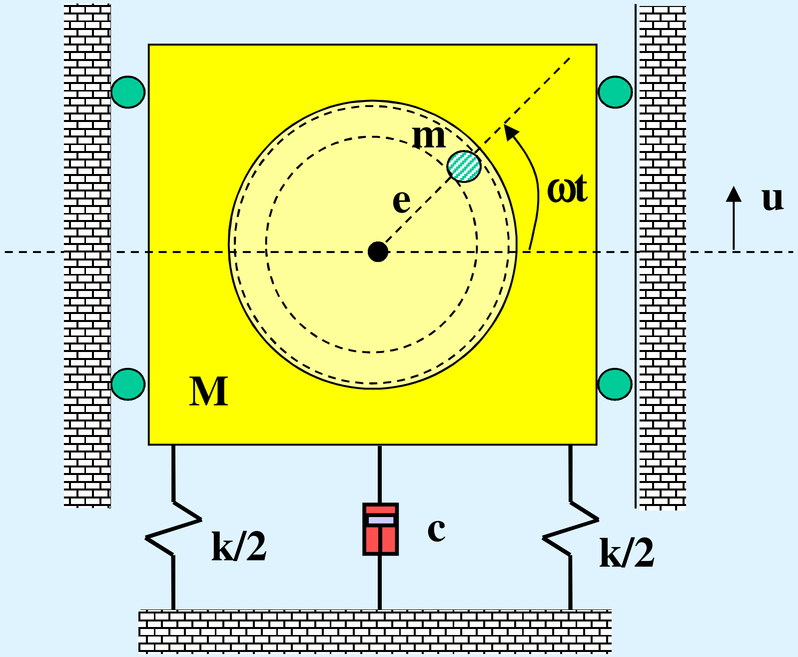
$$\boxed{IE(\omega) = 1 - TR(\omega)} \qquad \text{Eq. 90}$$

Onde $IE = 1$ representa uma isolação perfeita, mas isto requer um valor de r infinitamente grande, enquanto que $IE = 0$ representa nenhuma isolação.



9 – Desbalanceamento Rotativo

O desbalanceamento rotativo é uma fonte comum de excitação em máquinas. Considere o modelo abaixo para o estudo:



O desbalanceamento é causado por uma massa excêntrica ***m*** com excentricidade ***e*** que realiza um movimento circular com velocidade angular ω.

Da sua posição de equilíbrio estático, a posição da massa m é dada por

$$u_m = u + e\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad \text{Eq. 91}$$

E a equação de movimento de translação fica então

$$(M - m)\ddot{u} + m\frac{d^2}{dt^2}(u + e\,\mathrm{sen}\,\omega t) = -ku - c\dot{u} \qquad \text{Eq. 92}$$

A qual pode ser rearranjada para

$$\boxed{M\ddot{u} + c\dot{u} + ku = (me\omega^2)\,\mathrm{sen}\,\omega t} \qquad \text{Eq. 93}$$

E a Eq. 93 mostra claramente que o desbalanceamento é a fonte de excitação do sistema. Assumindo uma solução harmônica como antes, podemos achar a amplitude do movimento e seu ângulo de fase

$$u(t) = U_0\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad \text{Eq. 94}$$

De onde obtemos

$$U_0 = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (cw)^2}}$$ Eq. 95

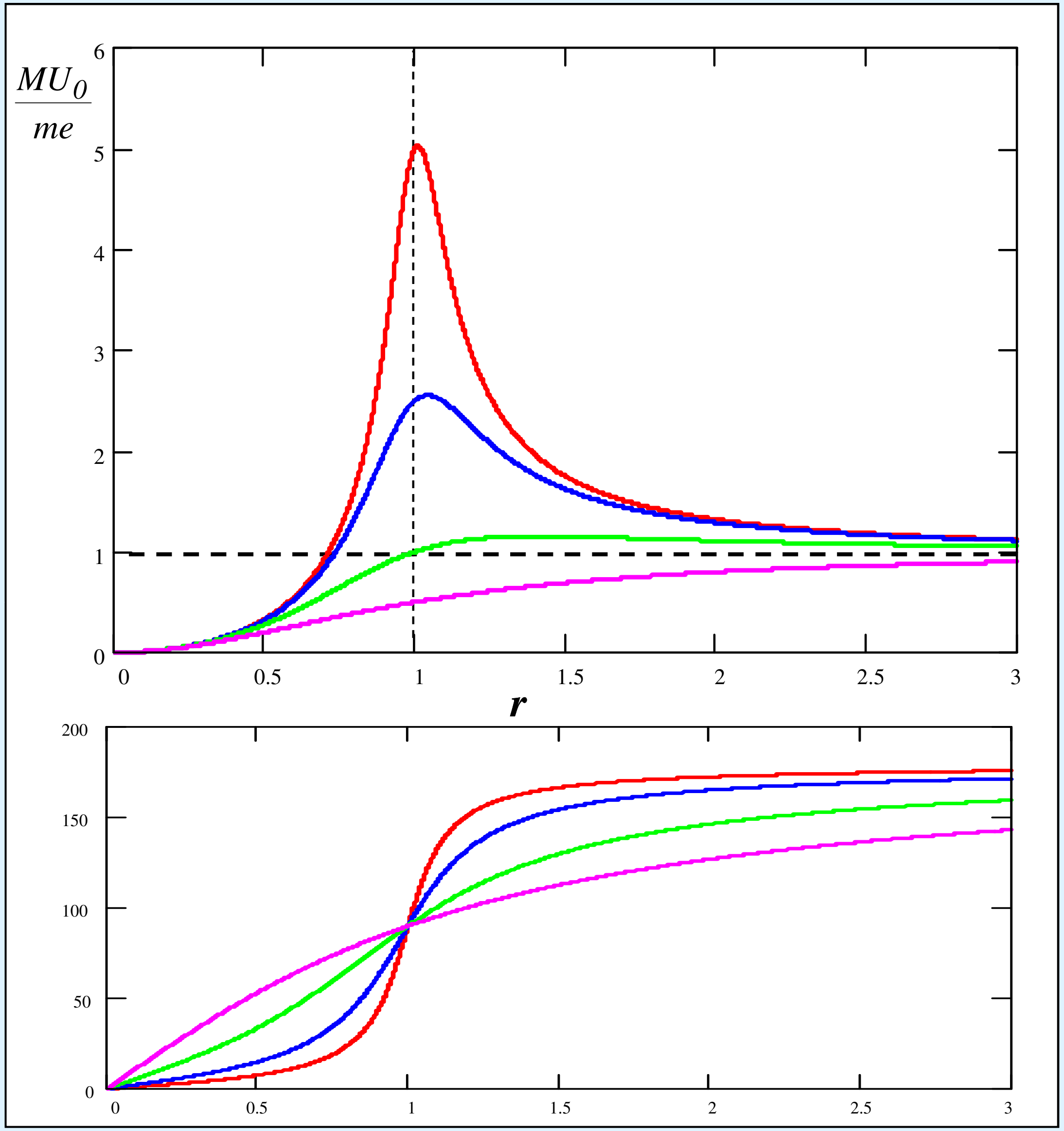
$$tg\phi = \frac{c\omega}{k - M\omega^2}$$ Eq. 96

Ou na forma adimensional

$$\frac{M}{m}\frac{U_0}{e}(r) = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\varsigma r)^2}}$$ Eq. 97

$$tg\phi = \frac{2\varsigma r}{1 - r^2}$$ Eq. 98

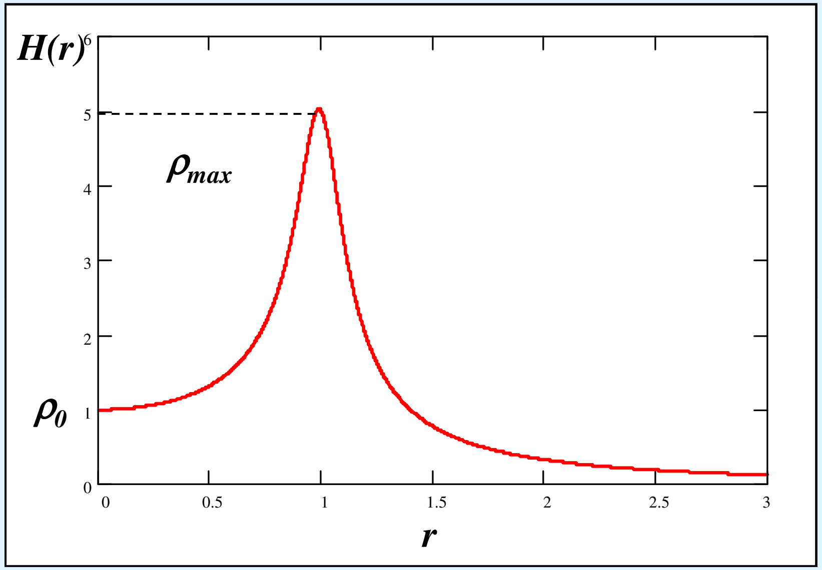
Gráfico do desbalanceamento rotativo



9 – Determinação do Amortecimento Através da FRF

9.1 - Método da Amplificação Ressonante

Este método é baseado na medida da resposta de regime permanente em várias freqüências discretas em uma faixa incluindo a freqüência natural do sistema.



Então, o máximo valor da FRF ocorre em

$$r_{pico} = \sqrt{1 - 2\varsigma^2} \qquad \text{Eq. 99}$$

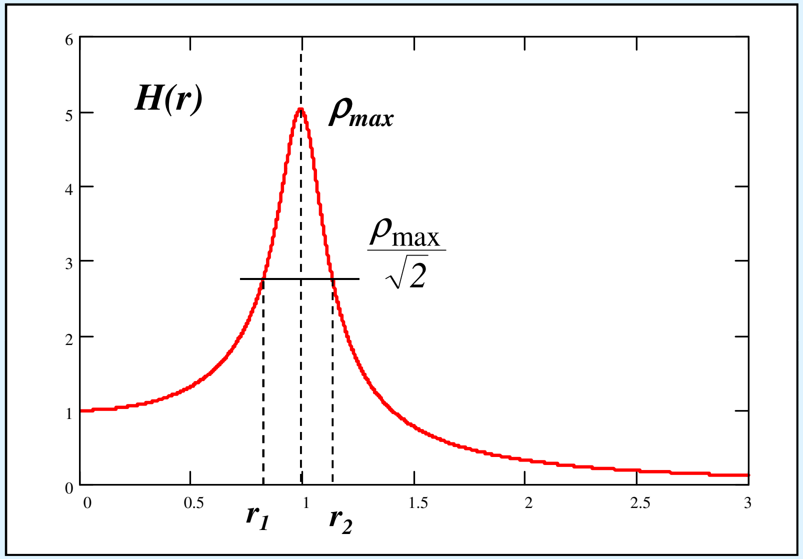
E para valores pequenos de amortecimento

$$\boxed{\varsigma \cong \frac{\rho_0}{2\rho_{\max}}} \qquad \text{Eq. 100}$$

Este método é de simples aplicação, requerendo instrumentação simplificada, mas podendo oferecer alguma dificuldade na determinação do deslocamento estático ρ_0 !

9.2 - Método da Meia Potência

Neste caso, o fator de amortecimento é determinado a partir de freqüências nas quais a amplitude de resposta é reduzida a $1/\sqrt{2}$ vezes a amplitude máxima ρ_{max} !



Então usando esta relação temos:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\varsigma r)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\varsigma}\sqrt{1-\varsigma^2}\right) \quad \text{Eq. 101}$$

Elevando-se ambos os lados ao quadrado:

$$r^2{}_{1,2} = 1-2\varsigma^2 \mp 2\varsigma\sqrt{1-\varsigma^2} \quad \text{Eq. 102}$$

Agora, para pequenos valores de amortecimento:

$$r_{1,2} \cong 1-\varsigma^2 \mp \varsigma\sqrt{1-\varsigma^2} \quad \text{Eq. 103}$$

Subtraindo-se as raízes na Eq. 103

$$r_2 - r_1 = 2\varsigma\sqrt{1-\varsigma^2} \cong 2\varsigma$$ Eq. 104

E somando-se as raízes temos

$$r_2 + r_1 = 2(1-\varsigma^2) \cong 2$$ Eq. 105

Combinando-se as Eqs. 104 e 105 vem :

$$\boxed{\varsigma = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}}$$ Eq. 106

Onde f_1 e f_2 são freqüências para as quais a amplitude de resposta é igual a

$$\rho = \frac{\rho_{\max}}{\sqrt{2}}$$ Eq. 107

Este método de obtenção da razão de amortecimento evita termos que achar o deslocamento estático ρ_0, entretanto, ele requer a obtenção acurada da curva de resposta em freqüência na região do pico de ressonância e no nível $(2)^{-1/2}$!

Para clarificar a essência do método que é chamado de meia potência, considere a potência média aplicada pelo carregamento, a qual deve ser igual à energia dissipada pela força de amortecimento viscosa em regime permanente a uma freqüência $\overline{\omega}$

$$P_{med} = \frac{c\overline{\omega}}{2\pi}\int_0^{2\pi/\overline{\omega}} \dot{u}(t)^2\, dt = c\overline{\omega}^2\left[\frac{\overline{\omega}}{2\pi}\int_0^{2\pi/\overline{\omega}} \dot{u}(t)^2\, dt\right] = \varsigma m \omega_n \overline{\omega}^2 H^2(\omega = \overline{\omega}) \qquad \text{Eq. 108}$$

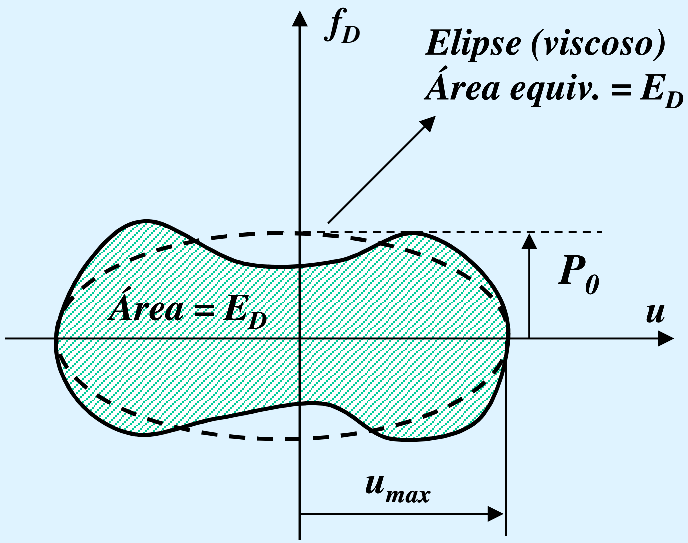
Esta última expressão nos pontos r_1 e r_2 fornece

$$P_{r_1} = \left(\frac{r_1}{r_{pico}}\right)^2 \frac{P_{pico}}{2} \qquad \text{Eq. 109}$$

$$P_{r_2} = \left(\frac{r_2}{r_{pico}}\right)^2 \frac{P_{pico}}{2} \qquad \text{Eq. 110}$$

9.3 - Método da Energia Dissipada Por Ciclo

Este método requer a construção do gráfico abaixo :



Se o sistema possui amortecimento viscoso puramente linear (elipse) então a seguinte relação pode ser usada :

$$p_0 = f_{D_{\max}} = c\dot{u}_{\max} = 2\varsigma m\omega_n \dot{u}_{\max} = 2\varsigma m\omega_n{}^2 u_{\max}$$ Eq. 111

ou

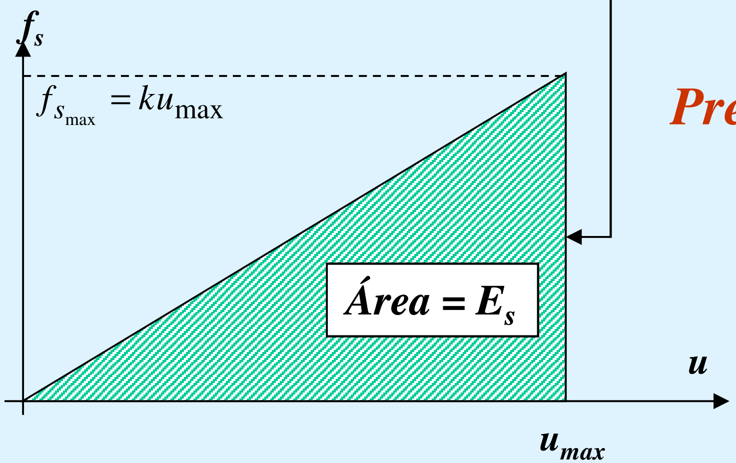
$$\boxed{\varsigma = \frac{p_0}{2m\omega_n{}^2 u_{\max}}}$$ Eq. 112

Agora, se o amortecimento viscoso é não linear (curva hachurada) a energia dissipada por ciclo E_D pode ser obtida pela área do gráfico da f_D, ou seja

$$E_D = \left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right)P_{med} = \left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right)\left(\varsigma_{eq} m \omega_n^{\,3} u_{\max}^{\,2}\right) \qquad \text{Eq. 113}$$

E então

$$\boxed{\varsigma_{eq} = \frac{E_D}{(2\pi m \omega_n^{\,2} u_{\max}^{\,2})} = \frac{E_D}{(2\pi k u_{\max}^{\,2})}} \qquad \text{Eq. 114}$$



Preferível !!

9.4 – Amortecimento Estrutural (Histerético)

Lembrando que o amortecimento estrutural possui a seguinte relação:

$$\boxed{f_D(t) = j\eta k u(t)}$$

Eq. 115

Neste caso, a energia dissipada por ciclo de vibração é dada por :

$$\boxed{E_D = \pi \varsigma k H}$$

Eq. 116

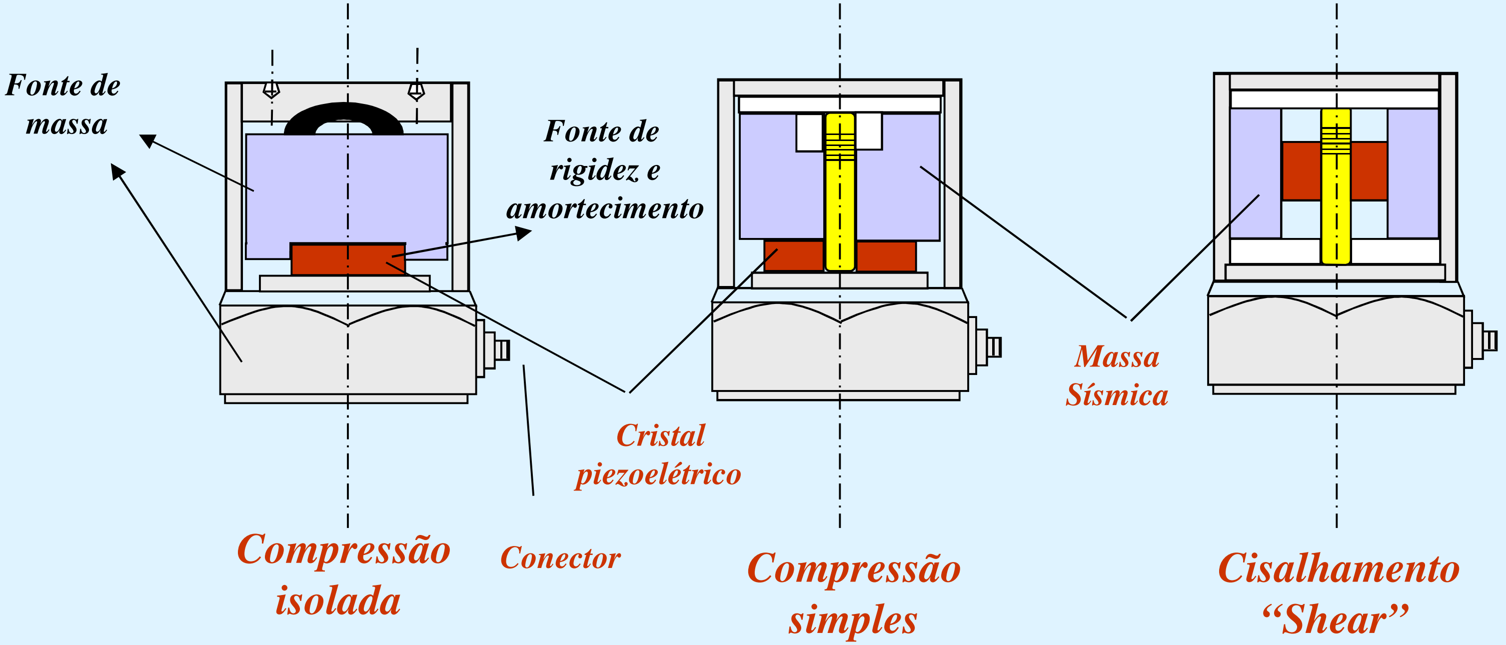
Enquanto que no caso viscoso :

$$\boxed{E_D = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right) P_{med} = 2\pi\varsigma m \omega_n \boxed{\omega} H_{\max}{}^2}$$

Eq. 117

10 – Aplicação do Modelo de 01 GDL – *O Acelerômetro*

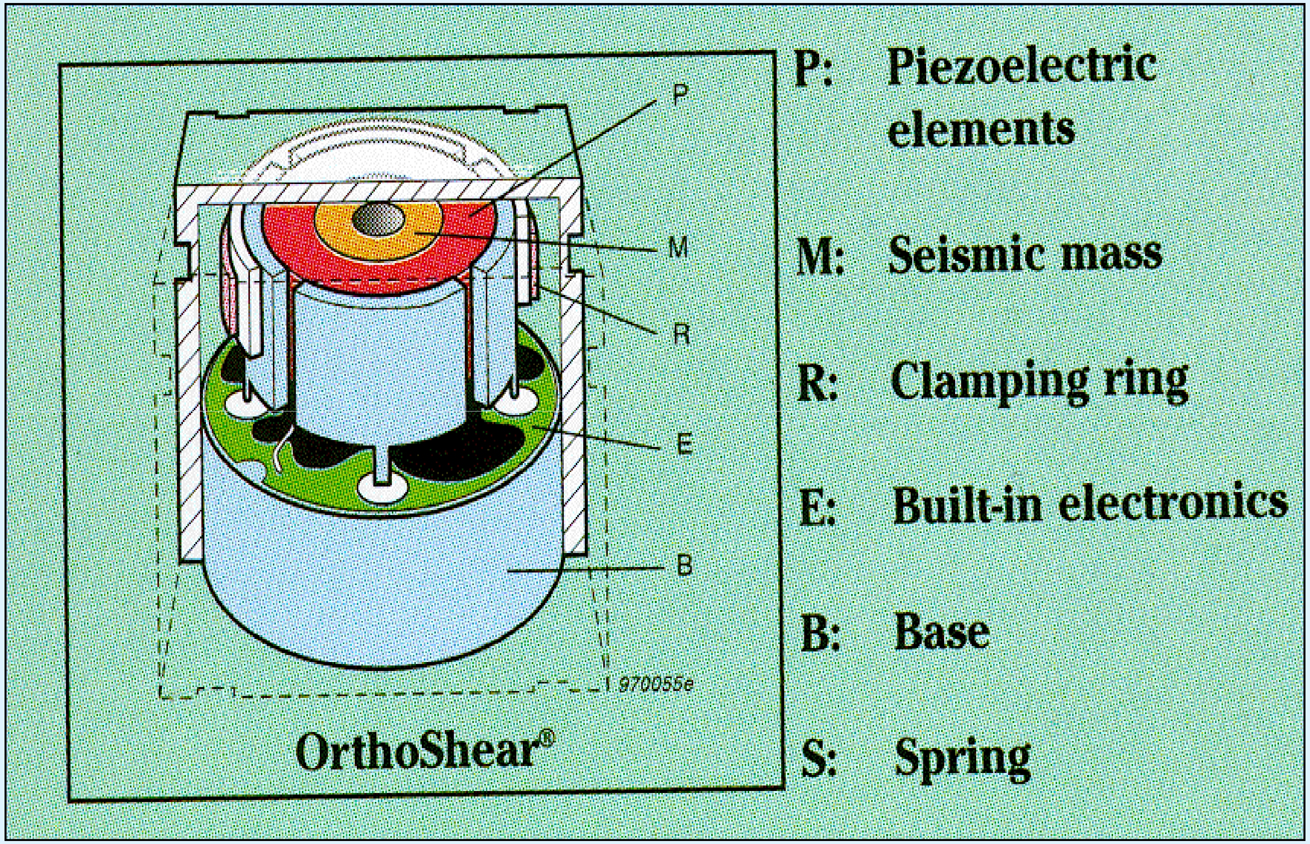
O acelerômetro é um sensor dedicado à medidas de vibração. A figura abaixo mostra três modelos típicos de ***acelerômetros piezelétricos***



Princípio de operação: ***A massa sismica quando sujeita à mesma vibração que se deseja medir causa uma deformação no cristal, que por sua vez possui a capacidade de gerar cargas elétricas proporcionais à aceleração desconhecida !***

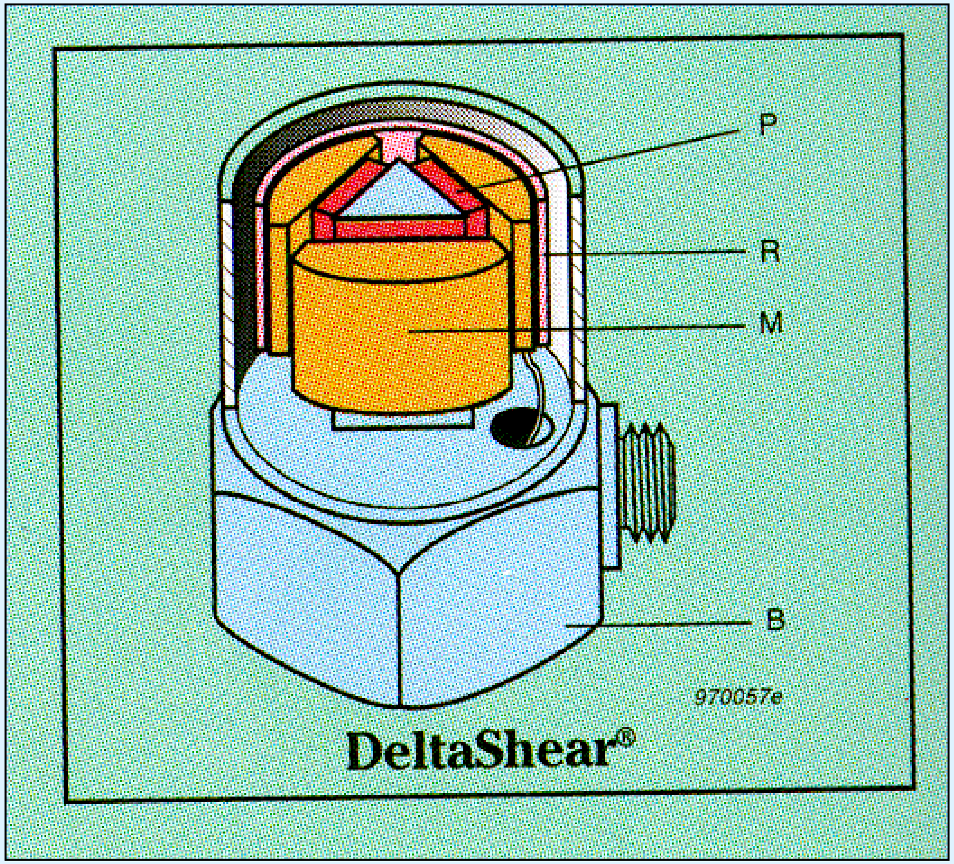
Alguns modelos comerciais

Modelo OrthoShear da Bruel & Kjaer



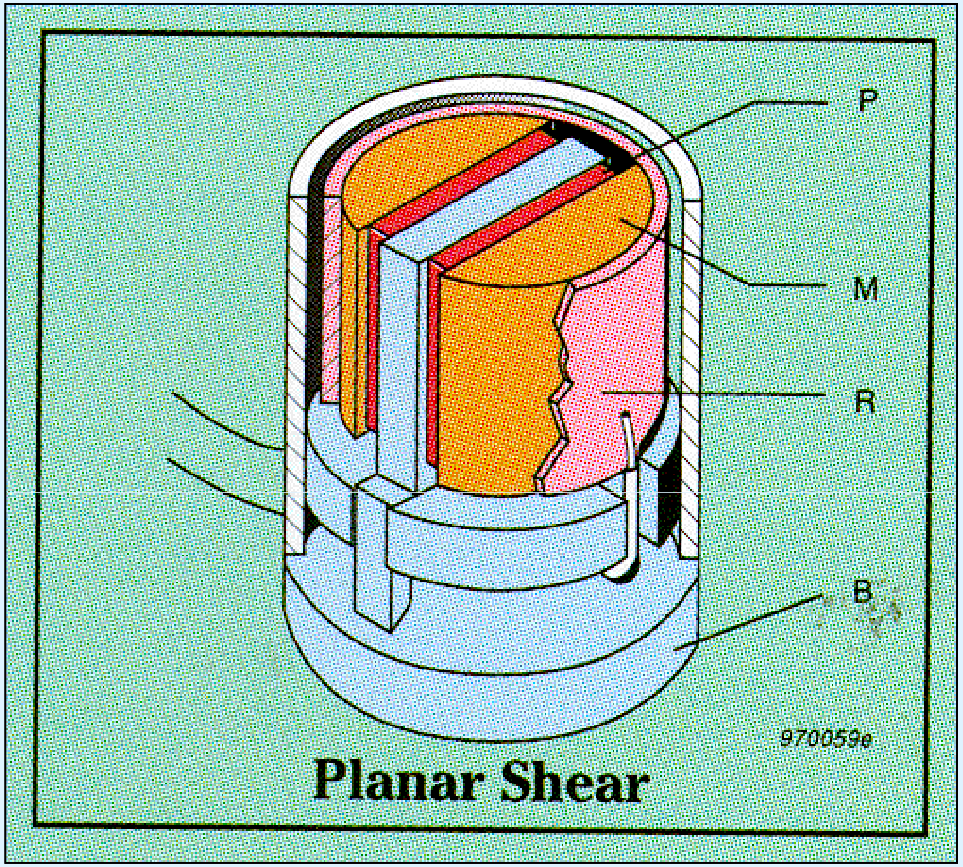
Extraído do Catálogo Master Bruel and Kjaer 1997

Modelo DeltaShear da Bruel & Kjaer



Extraído do Catálogo Master Bruel and Kjaer 1997

Modelo PlanarShear da Bruel & Kjaer

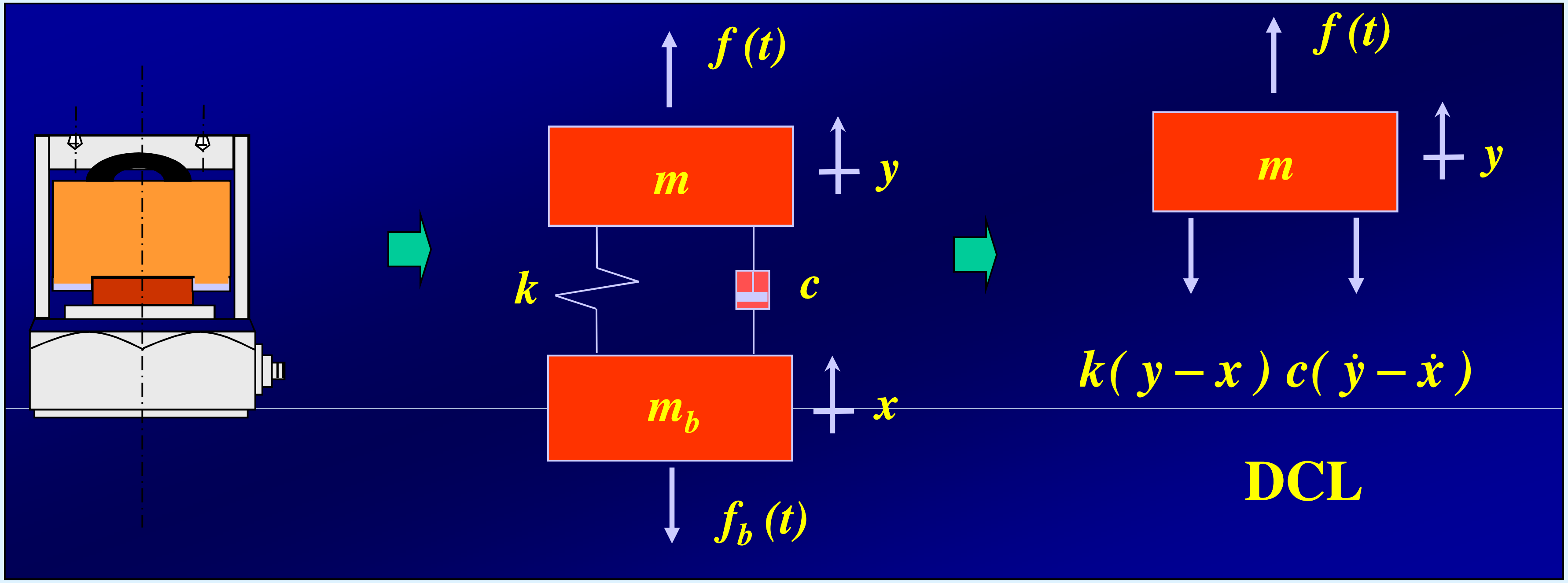


Extraído do Catálogo Master Bruel and Kjaer 1997

Outros modelos da B&K

Extraído do Catálogo Master Bruel and Kjaer 2000

Como temos *duas fontes* de massa no sistema (*base do sensor e massa sísmica*) e *uma fonte de rigidez e amortecimento* (*cristal piezoelétrico*), então um **modelo** conveniente para o sensor seria o de *02 GDL* !



Agora, considerando-se que para seu correto funcionamento o sensor deve ser rigidamente fixado à estrutura tal que a massa da base mb fica incorporada à mesma, então o modelo acima pode ser simplificado para um modelo de 01 GDL com excitação via base, e então podemos usar os conceitos de *transmissibilidade* vistos até agora !!

Então, para a massa sísmica m podemos escrever a seguinte equação

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{x}$$

Onde z é o deslocamento relativo entre a base e a massa sísmica. Devemos Observar que o acelerômetro é projetado para medir $\ddot{x}$. Como antes, a solução Da equação acima fica

$$Z_o = \frac{-mX_o\omega^2}{k - m\omega^2 + jc\omega} = \frac{ma_o}{k(1 - r^2 + j2\varsigma r)}$$

Ou simplesmente

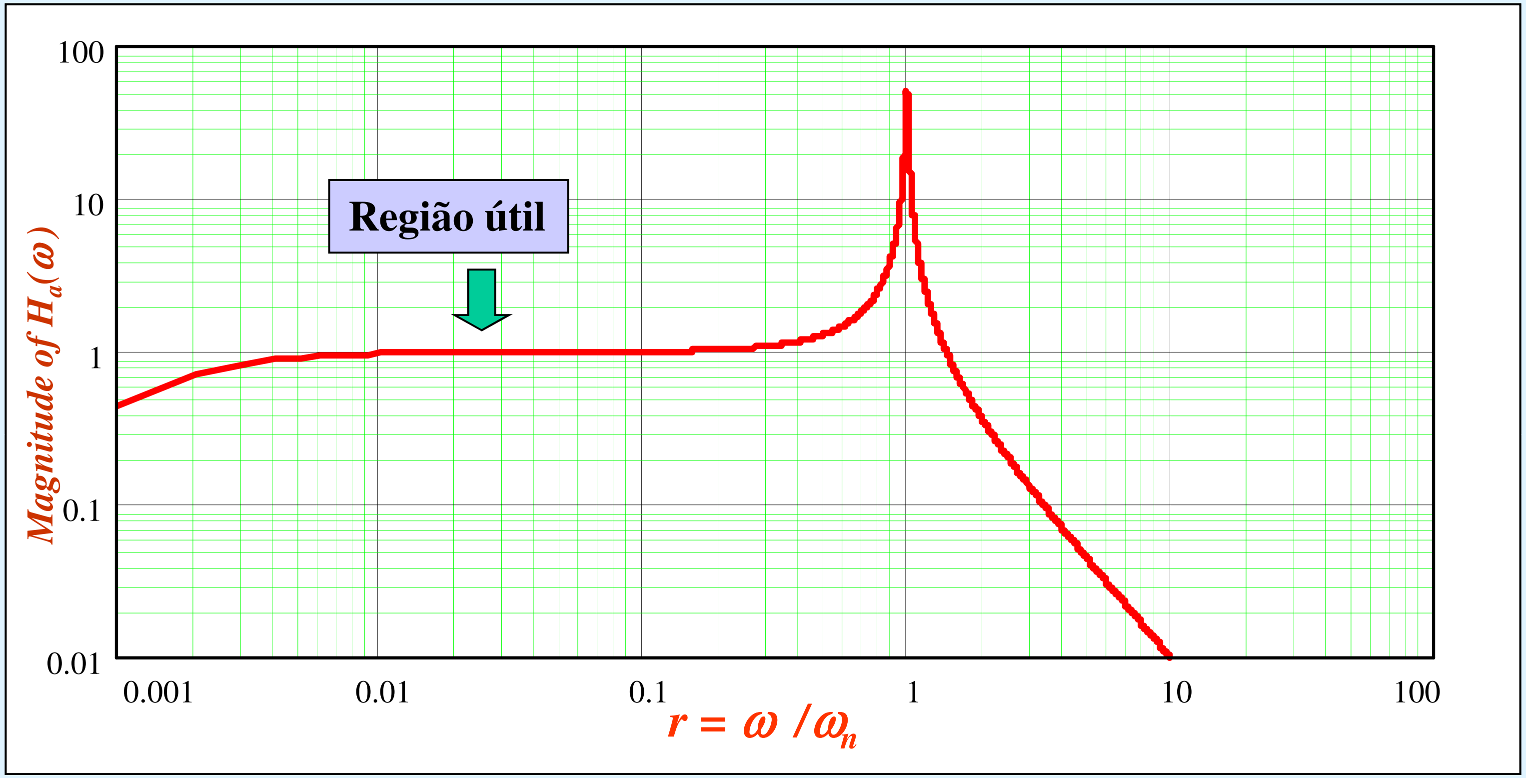
$$Z_o = H(\omega)a_o$$

FRF do sensor

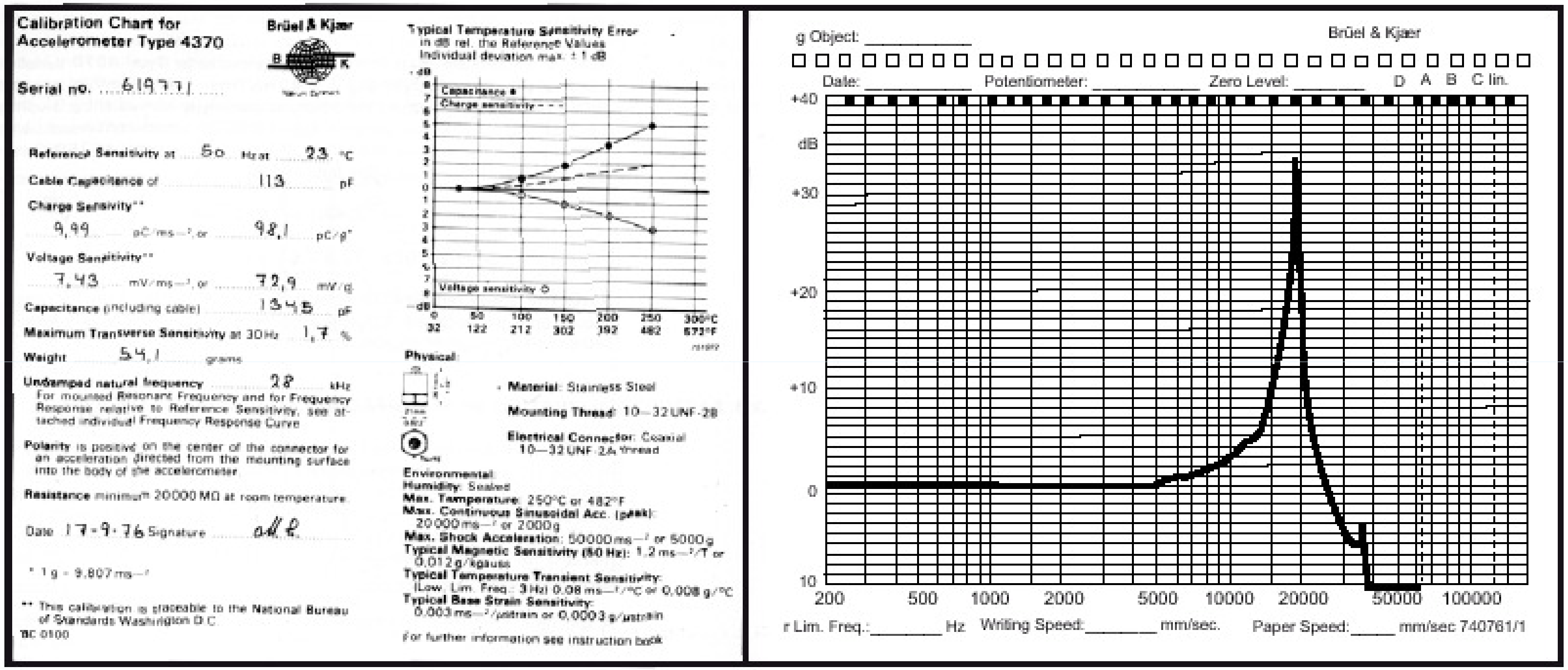
$$H(\omega) = \frac{m}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$

Portanto o que queremos medir é a0, mas o que obtemos é $\mathbf{Z_0}$, ou seja, a_0 afetado da dinâmica do sensor dada pela FRF $H(\omega)$!

Abaixo vemos uma curva típica teórica de um sensor piezelétrico



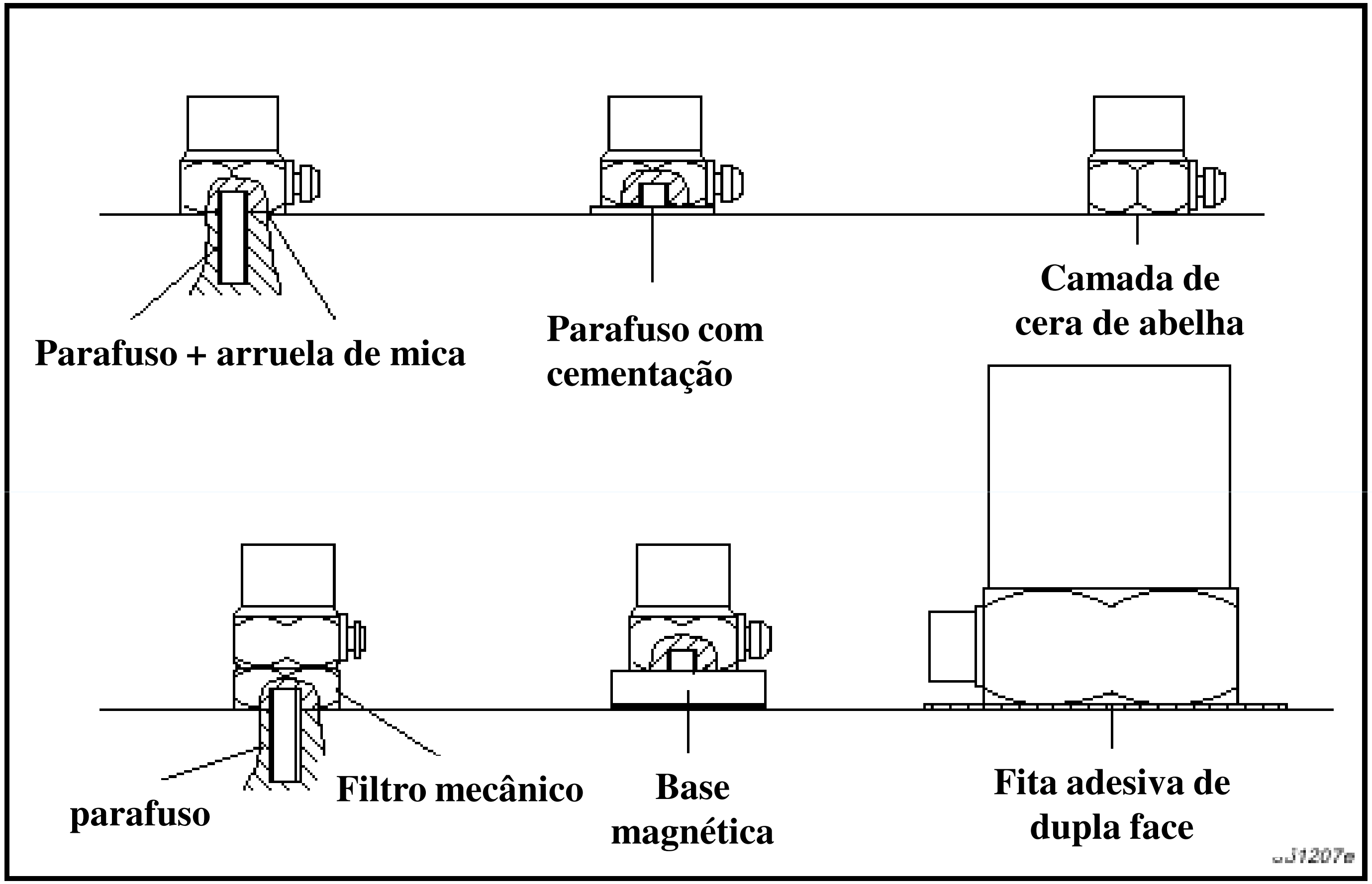
Enquanto que abaixo vemos uma curva típica de um sensor comercial



Fonte: Reproduzida do original BRÜEL & KJAER, **Theory and Application Handbook - Piezoeletric Accelerometer and Vibration Preamplifiers**.

Extraído do Catálogo Master Bruel and Kjaer 2000

Detalhes da montagem do acelerômetro em estruturas



Extraído do Catálogo Master Bruel and Kjaer 2000