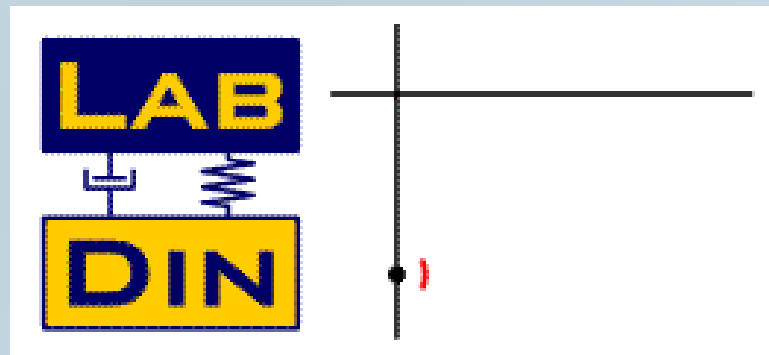


**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Laboratório de Dinâmica

**SEM 533 – MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE
SISTEMAS DINÂMICOS I**

*Resposta do Sistema de Segunda Ordem à Entradas
Especiais – Parte I*



Resp.: Prof. Dr. Paulo S. Varoto



Objetivos

Os objetivos principais desta seção são os seguintes:

- Realizar uma revisão da Transformada de Laplace, teoremas e aplicação na solução de equações diferenciais ordinárias
- Determinar a resposta do sistema de 01 GDL à entradas do tipo degrau unitário, rampa, impulso e combinações
- Introduzir o conceito de Séries de Fourier para um sinal periódico
- Discutir as aplicações das Séries de Fourier
- Determinar a resposta de regime permanente de um sistema de 01 GDL a um carregamento periódico geral usando Séries de Fourier
- Introduzir o método de solução no domínio da frequência

Bibliografia:

- Craig, R., Structural Dynamics, An Introduction to Computer Methods
John Wiley, Capítulo 8.
- Doebbling, E. O. System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design
Marcel Dekker, Capítulo 6



1 – A TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace de uma função real e contínua por partes é dada por

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad t > 0$$

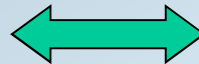
Eq. 1

Onde $s = \sigma + j\omega$ é denominada variável de Laplace, possuindo partes real e imaginária. O operador L é denominado operador de Laplace. Algumas características desta transformada na solução de EDOs são:

- Transforma a EDO em uma equação algébrica !
- Solução completa incluindo as CIs é obtida em um único passo
- Não existe dúvida de quais CIs deveriam ser usadas, já que a transformada as requer automaticamente
- A transformada de Laplace lida com entradas não contínuas de forma mais simplificada

*Domínio do
Tempo => t*

Transformação



*Domínio de
Laplace => s*



1.1 – Algumas Propriedades Importantes da Transformada de Laplace

- Propriedade da Linearidade

$$\mathcal{L} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

Eq. 2

- Diferenciação

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = sF(s) - f(0)$$

Eq. 3

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 f}{dt^2} \right] = s^2 F(s) - sf(0) - \frac{df}{dt}(0)$$

Eq. 4

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n f}{dt^n} \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df}{dt}(0) - \dots - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0)$$

Eq. 5



- Integração

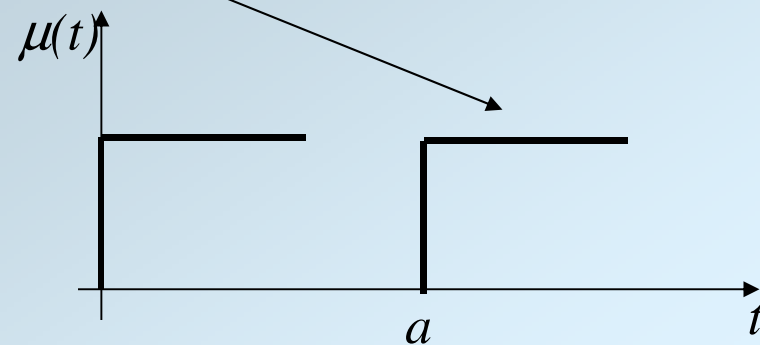
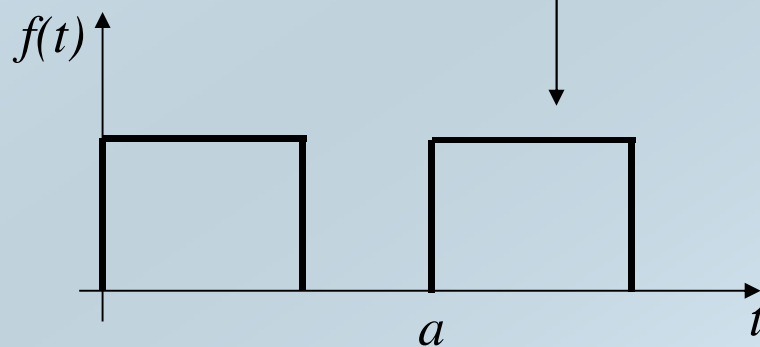
$$\mathcal{L} \left[\int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

Eq. 6

- Teorema do atraso no tempo

$$\mathcal{L} [f(t-a)\mu(t-a)] = e^{-as} F(s)$$

Eq. 7



Algumas transformadas úteis são dadas abaixo

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$1/s$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$	$\frac{1}{s^n}$
$\text{sen } at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$
t	$\frac{1}{s^2}$



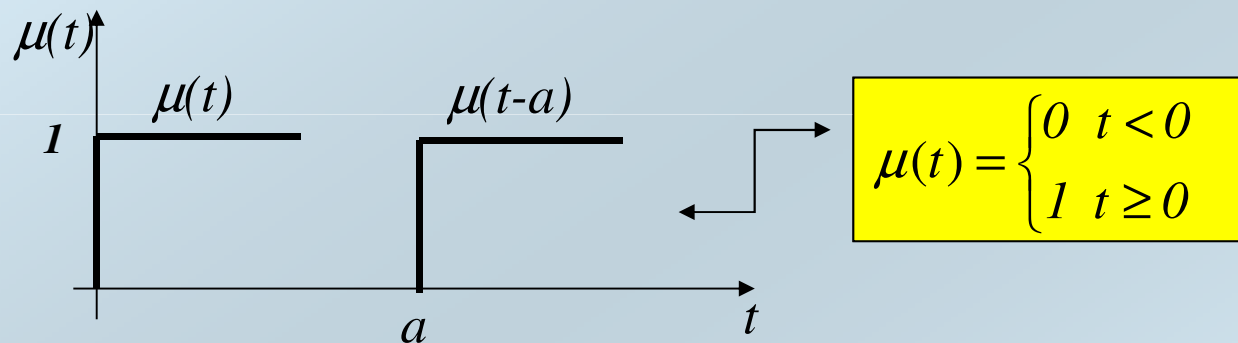
2 – RESPOSTA AO DEGRAU

Neste caso a excitação é dada por:

$$p(t) = p_0 \mu(t)$$

Eq. 8

Onde p_0 é a amplitude e $\mu(t)$ é o degrau unitário que tem por definição



Eq. 9

Então a equação de movimento é a seguinte

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0\mu(t)$$

$$u(0) = u_0 ; \dot{u}(0) = \dot{u}_0$$

Eq. 10



A Eq. 10 pode ainda ser rescrita como:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right) p_0 \mu(t) \quad \text{Eq. 11}$$

Ilustraremos o processo de solução usando as duas técnicas conhecidas. Inicialmente, pelo método clássico a solução da EDO, Eq. 10 é dada por

$$u(t) = u_H(t) + u_P(t) \quad \text{Eq. 12}$$

A solução homogênea $u_H(t)$ é obtida a partir da solução da EDO homogênea associada, como visto anteriormente fazendo-se $p(t) = 0$. Temos para $\zeta < 1$

$$u_H(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad \text{Eq. 13}$$

Onde A_1 e A_2 dependem das condições iniciais (ainda não usadas !)



Já a solução de regime permanente segue a forma da excitação, ou seja:

$$u_P(t) = \frac{p_0}{k} \quad \text{Eq. 14}$$

E então a solução completa é

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) + \frac{p_0}{k} \quad \text{Eq. 15}$$

Agora usamos as condições iniciais do problema para determinar as constantes de integração A_1 e A_2

$$A_1 = u_0 - \frac{p_0}{k} \quad \text{Eq. 16}$$

$$A_2 = \frac{\dot{u}_0}{\omega_d} + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left(u_0 - \frac{p_0}{k} \right) \quad \text{Eq. 17}$$



Usando agora a transformada de Laplace, voltamos à Eq. 11

$$\mathcal{L}(\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u) = \mathcal{L}\left[\left(\frac{\omega_n^2}{k}\right)p_0\mu(t)\right] \quad \text{Eq. 18}$$

Usando as propriedades previamente definidas e a tabela fornecida obtemos

$$(s^2 U(s) - su_0 - \dot{u}_0) + 2\zeta\omega_n(sU(s) - u_0) + \omega_n^2 U(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right)p_0 \frac{1}{s} \quad \text{Eq. 19}$$

Repare então que a Eq. 19

- é agora uma equação algébrica na transformada $U(s)$ de $u(t)$
- contém de imediato todas as condições iniciais do problema !

Agora podemos então resolver a Eq. 19 para $U(s)$ algebricamente !



Rearranjando os termos na Eq. 19 temos

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)U(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right)p_0 \frac{1}{s} + (s + 2\zeta\omega_n)u_0 + \dot{u}_0 \quad \text{Eq. 20}$$

Eq. característica

E podemos então resolver a Eq. 20 para U(s)

$$U(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right)p_0 + \frac{(s + 2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} u_0 + \frac{\dot{u}_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{Eq. 21}$$

A solução completa no tempo pode então ser obtida calculando-se a transformada inversa de cada um dos termos do lado direito da Eq. 21. Embora existam tabelas extensas com muitas transformadas, uma forma simples de calcular as inversas é reduzindo os polinômios quadráticos do denominador em monômios usando-se para tanto a *técnica das frações parciais* !



Por exemplo, se assumirmos que o sistema é sub-amortecido, ($\zeta < 1$) então

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s - s_1)(s - s_2) \quad \text{Eq. 22}$$

Onde:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \quad \text{Eq. 23}$$

São as raízes da equação característica do sistema sub-amortecido e

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{Eq. 24}$$

Então a Eq. 21 pode ser escrita como

$$U(s) = \frac{1}{s(s - s_1)(s - s_2)} \left(\frac{\omega_n^2}{k} \right) p_0 + \frac{(s + 2\zeta\omega_n)}{(s - s_1)(s - s_2)} u_0 + \frac{\dot{u}_0}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad \text{Eq. 25}$$



E então podemos expandir cada um dos termos em frações parciais, por exemplo

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{(s-s_1)} + \frac{B}{(s-s_2)} \quad \text{Eq. 26}$$

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{(s-s_1)} + \frac{B}{(s-s_2)} = \frac{(A+B)s - (Bs_1 + As_2)}{(s-s_1)(s-s_2)} \quad \text{Eq. 27}$$

Em seguida procedemos a igualdade dos coeficientes do numerador das expressões indicadas acima na Eq. 27

$$A + B = 0 \quad \text{Eq. 28}$$

$$-(Bs_1 + As_2) = 1 \quad \text{Eq. 29}$$

De onde obtemos

$$B = \frac{1}{-i2\omega_d} \quad \text{Eq. 30}$$

$$A = \frac{1}{i2\omega_d} \quad \text{Eq. 31}$$



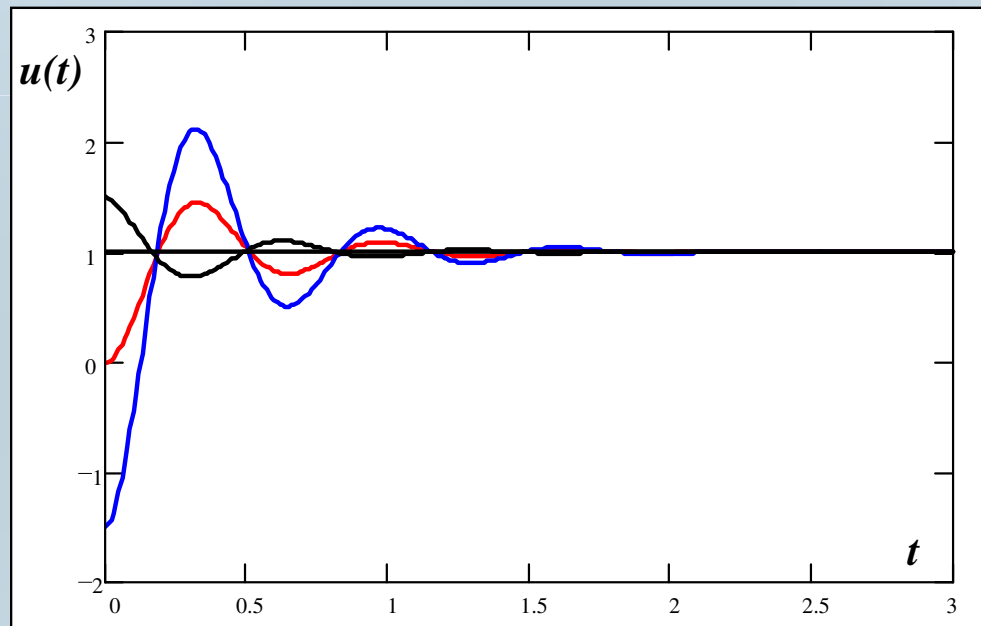
E a principal vantagem de reduzir a frações parciais é que :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{(s-s_1)} + \frac{B}{(s-s_2)}\right) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

$$e^{-at} \xleftrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}$$

Eq. 32

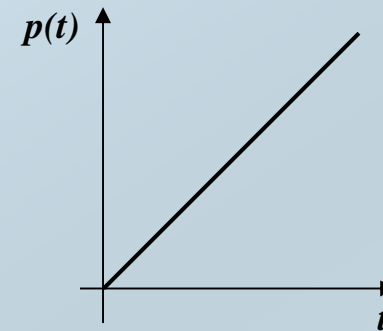
Então expandindo todos os termos da Eq. 25 em frações parciais e calculando a transformada inversa de cada um deles obtém-se a solução mostrada na Eq. 15 e cujo gráfico está mostrado abaixo



3 – RESPOSTA À RAMPA

Neste caso a excitação é dada por:

$$p(t) = p_0 t \mu(t)$$



Eq. 33

E a presença da função degrau unitário na Eq. 33 serve apenas para indicar que a excitação é válida apenas para $t > 0$! Então a equação de movimento é

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 t \mu(t)$$

$$u(0) = u_0 ; \dot{u}(0) = \dot{u}_0$$

Eq. 34

Esta última Eq. 34 também pode ser escrita como:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right) p_0 t$$

Eq. 35



O processo de solução é similar ao caso anterior, podemos resolver pelo método clássico ou Transformada de Laplace. Neste último caso, temos que calcular a transformada da função rampa, dada pela tabela em anexo

$$P(s) = \frac{p_0}{s^2} \quad \text{Eq. 35}$$

Aplicando então a transformada de Laplace à Eq. 34 temos

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)U(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right)p_0 \frac{1}{s^2} + (s + 2\zeta\omega_n)u_0 + \dot{u}_0 \quad \text{Eq. 36}$$

Aplicando a mesma técnica usada no caso do degrau (frações parciais) achamos
A solução para **condições iniciais nulas** é

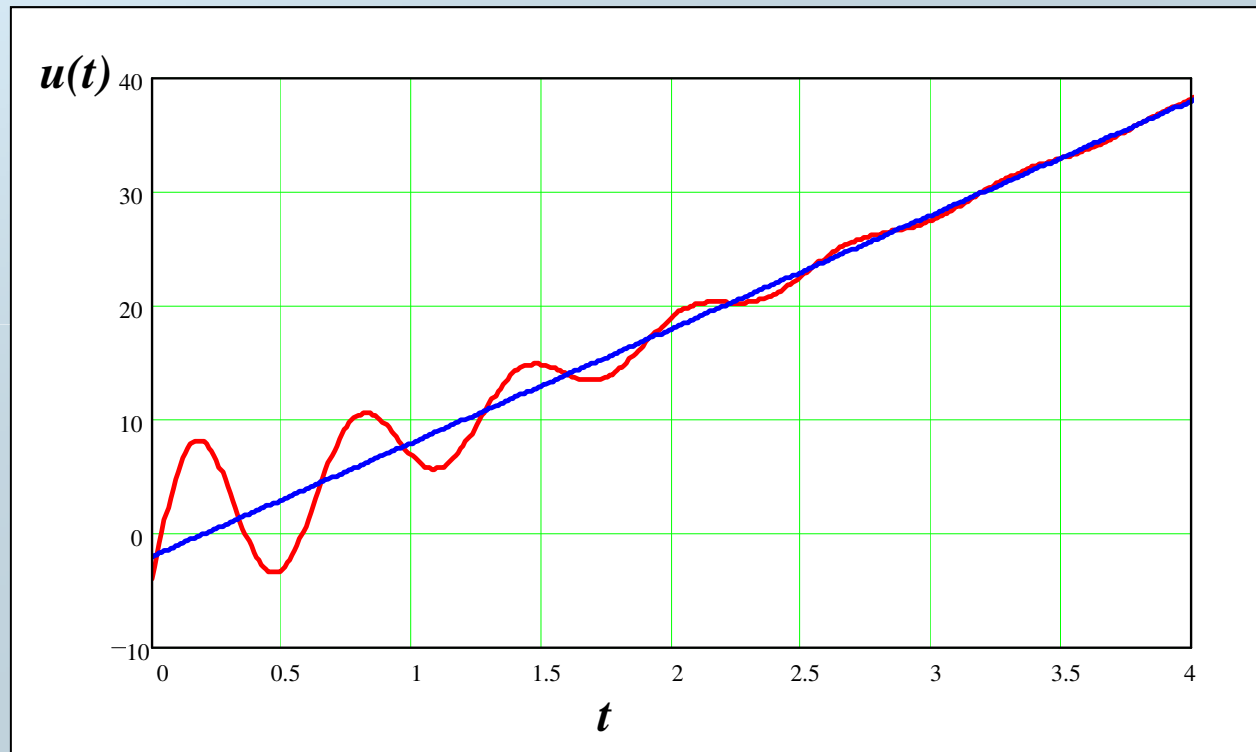
$$u(t) = \frac{\omega_n^2}{k} p_0 t - \frac{2\zeta\omega_n^2 p_0}{k} \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) \right] \quad \text{Eq. 37}$$



Onde ϕ é o ângulo de fase

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta^2 - 1}$$

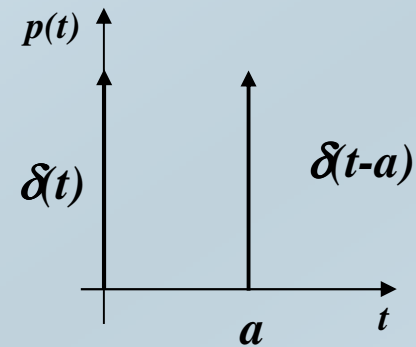
Eq. 38



4 – RESPOSTA AO IMPULSO UNITÁRIO

Neste caso a excitação é dada por:

$$p(t) = \delta(t)$$



Eq. 39

A equação de movimento é então

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right)\delta(t)$$

Eq. 40

Assumindo condições iniciais nulas, a transformada de Laplace fica

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)U(s) = \frac{\omega_n^2}{k}$$

Eq. 41



E a solução é

$$U(s) = \frac{\omega_n^2}{k} \frac{l}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{Eq. 42}$$

Ou ainda

$$U(s) = \frac{\omega_n^2}{k} \frac{l}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad \text{Eq. 43}$$

Calculando a transformada inversa temos a solução no tempo ao impulso unitário com *condições iniciais nulas*

$$u(t) = h(t) = \frac{\omega_n^2}{k} \left(A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t} \right) \quad \text{Eq. 44}$$



Com

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

Eq. 45

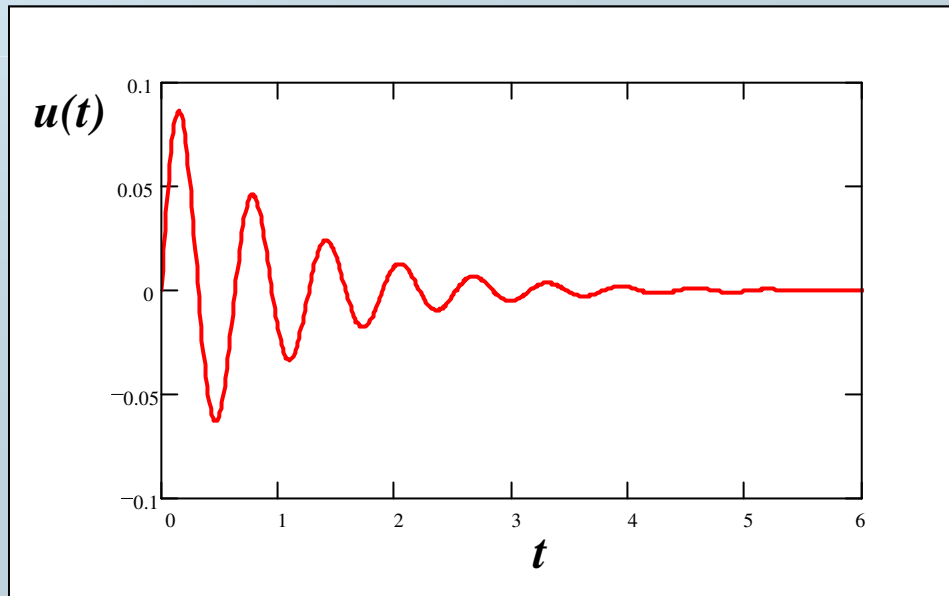
$$A = \frac{1}{i2\omega_d}$$

Eq. 46

$$B = \frac{1}{-i2\omega_d}$$

Eq. 47

Eq. 48



$$h(t) = \left(\frac{1}{m\omega_d} \right) e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t$$

Eq. 48

Para $\zeta = 0$

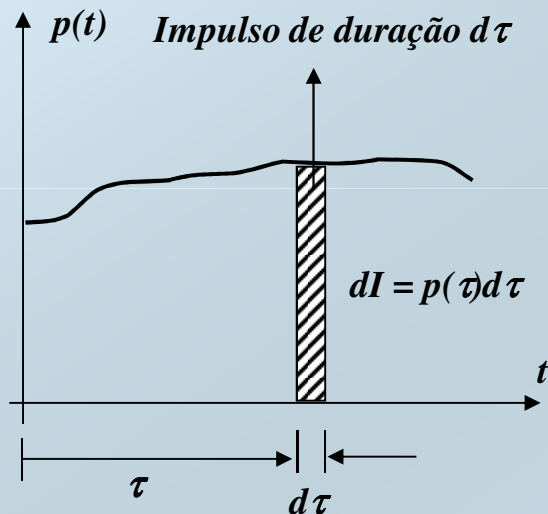
$$h(t) = \left(\frac{1}{m\omega_n} \right) \text{sen } \omega_n t$$

Eq. 49



5 – RESPOSTA À EXCITAÇÃO GERAL – Integral de Duhamel

O método de obtenção da resposta baseado na Integral de Duhamel pode ser desenvolvido a partir da resposta ao impulso unitário discutida no caso anterior. Esta técnica é baseada no *princípio da superposição*, válido apenas para sistemas lineares. Veja a figura abaixo



A resposta ao impulso de duração $d\tau$ é:

$$du(t) = \left(\frac{dI}{m\omega_n} \right) \text{sen } \omega_n(t - \tau) \quad \text{Eq. 49}$$

E a resposta total será a soma de todas as respostas incrementais, ou seja:

$$u(t) = \left(\frac{1}{\omega_n} \right) \int_0^t p(\tau) \text{sen } \omega_n(t - \tau) d\tau \quad \text{Eq. 50}$$



Ou simplesmente

$$u(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Eq. 50

E para o sistema de 01 GDL amortecido temos

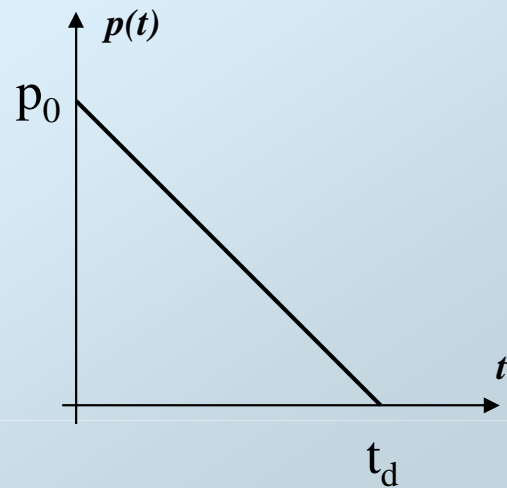
$$u(t) = \left(\frac{I}{m\omega_d} \right) \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \text{sen } \omega_d(t-\tau) d\tau$$

Eq. 51

Estas duas últimas expressões são denominadas ***Integrais de Duhamel*** sendo que a Eq. 50 é uma integral de convolução. As Eqs. 50 e 51 se prestam à obtenção Da resposta do sistema de 01 GDL à entradas gerais e condições iniciais nulas.



Exemplo: Obter a resposta de um sistema de 01 GDL não amortecido à entrada abaixo.



$$\Rightarrow p(t) = \begin{cases} p_0 \left(1 - \frac{t}{t_d} \right) & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & t_d < t \end{cases} \quad \text{Eq. 52}$$

Então para $0 \leq t \leq t_d$

$$u(t) = \left(\frac{1}{m\omega_n} \right) \int_0^t p_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_d} \right) \text{sen } \omega_n (t - \tau) d\tau \quad \text{Eq. 53}$$



Integrando por partes vem

$$u_1(t) = \left(\frac{p_0}{k} \right) \left[1 - \left(\frac{t}{t_d} \right) - \cos \omega_n t + \left(\frac{1}{\omega_n t_d} \right) \sin \omega_n t \right]$$

Eq. 54

Agora a solução para $t > t_d$ é

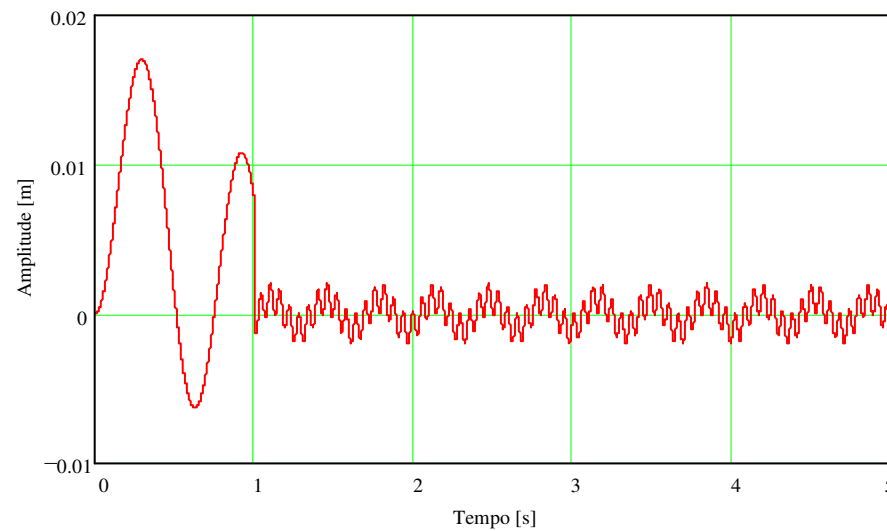
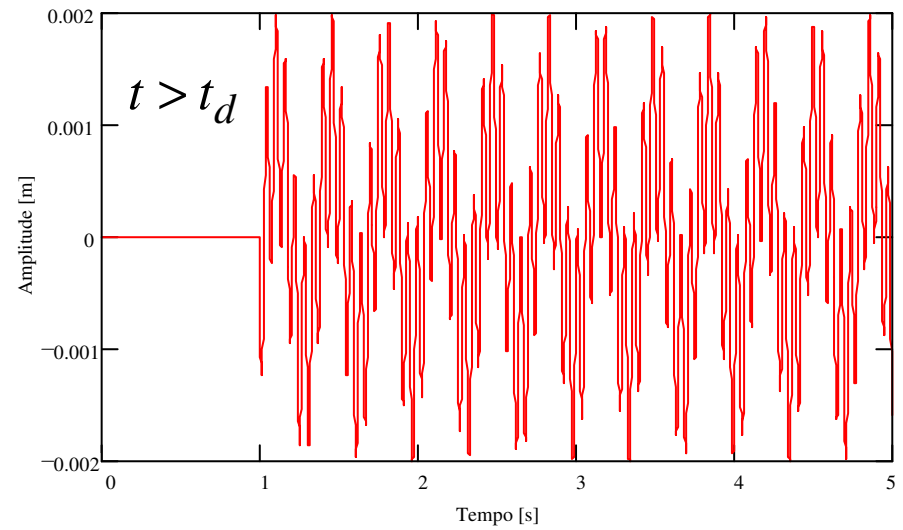
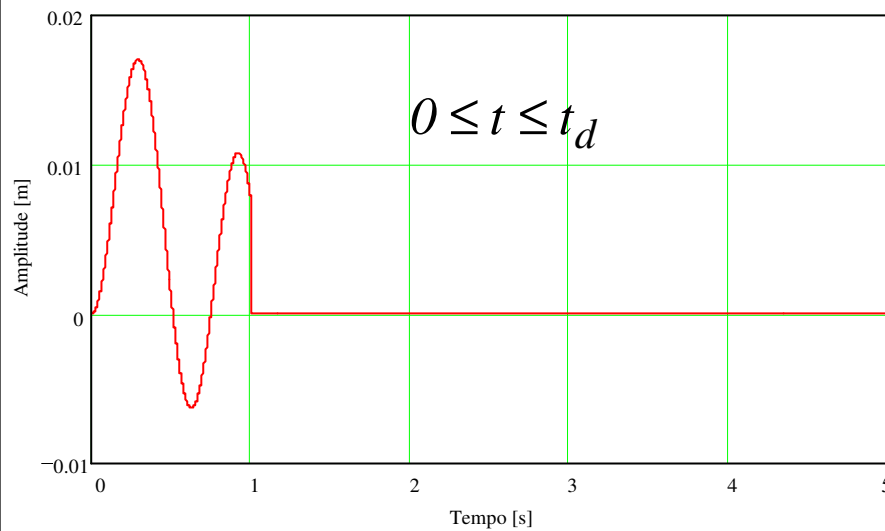
$$u_2(t) = \left(\frac{p_0}{k} \right) [\sin \omega_n t (1 - \cos \omega_n t_d) - \cos \omega_n t (\omega_n t_d - \sin \omega_n t_d)]$$

Eq. 55

E a solução completa é obtida somando-se as soluções dadas pelas Eqs. 54 e 55



Graficamente

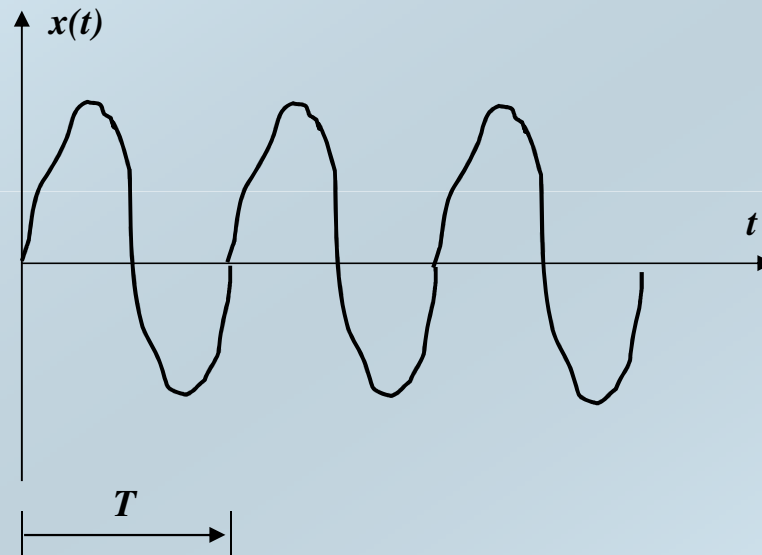


6 – RESPOSTA À EXCITAÇÃO PERIÓDICA

6.1 – A Integral de Fourier

Veremos uma ferramenta muito útil na obtenção da resposta forçada do Sistema de 01 GDL a excitações periódicas: as *Séries de Fourier* !

Seja o sinal abaixo, periódico e de período igual a T



Frequência Fundamental:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Eq. 56

Então

$$x(t + T) = x(t)$$

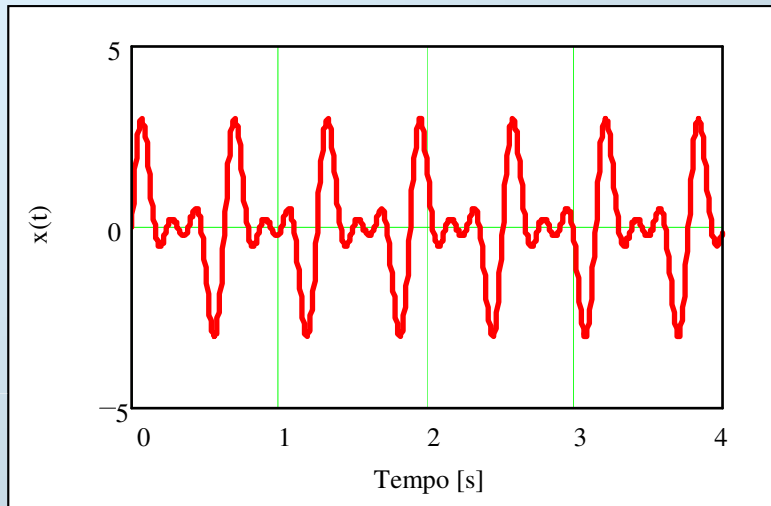
Periódico !

Eq. 57



Idéia central: compor o sinal periódico
Através de sinais conhecidos !

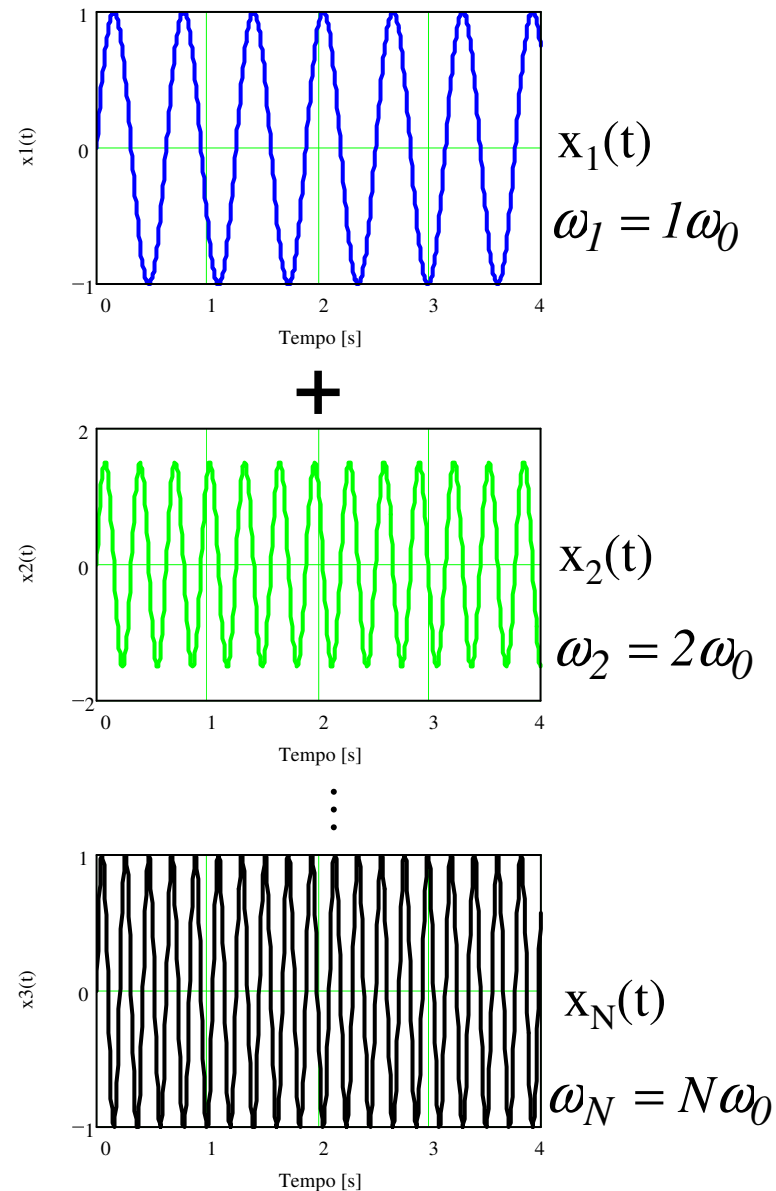
Sinal Periódico



=

Estes sinais conhecidos são na verdade senos e cossenos cuja frequência seja múltipla da frequência fundamental do sinal periódico !

$$x(t) \cong \boxed{A_1} \text{sen}(\omega_1 t) + \boxed{B_1} \text{cos}(\omega_1 t) + \boxed{A_2} \text{sen}(\omega_2 t) + \boxed{B_2} \text{cos}(\omega_2 t) + \dots$$



Harmônicas



Um sinal que seja periódico e contínuo por partes, satisfazendo a Eq. 57 pode ser expandido em séries de Fourier de acordo com a seguinte expressão

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos(p\omega_0 t) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p \sin(p\omega_0 t) \quad \text{Eq. 58}$$

Onde ω_0 é a frequência fundamental do sinal, conforme definido pela Eq. 56 e Os coeficientes a_0 , a_p e b_p são denominados coeficientes da série de Fourier, E são definidos de acordo com as seguintes expressões

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T_0} x(t) dt \quad \text{Eq. 59}$$

$$a_p = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T_0} x(t) \cos(p\omega_0 t) dt \quad \text{Eq. 60}$$

$$b_p = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T_0} x(t) \sin(p\omega_0 t) dt \quad \text{Eq. 61}$$



Embora teoricamente uma expansão em séries de Fourier exija um número infinito de termos, na prática $x(t)$ é aproximado de maneira satisfatória truncando-se a série em apenas alguns de seus termos. O termo a_0 representa o valor médio do sinal no intervalo de tempo T . Para fins de cálculo dos coeficientes, as seguintes relações podem ser empregadas

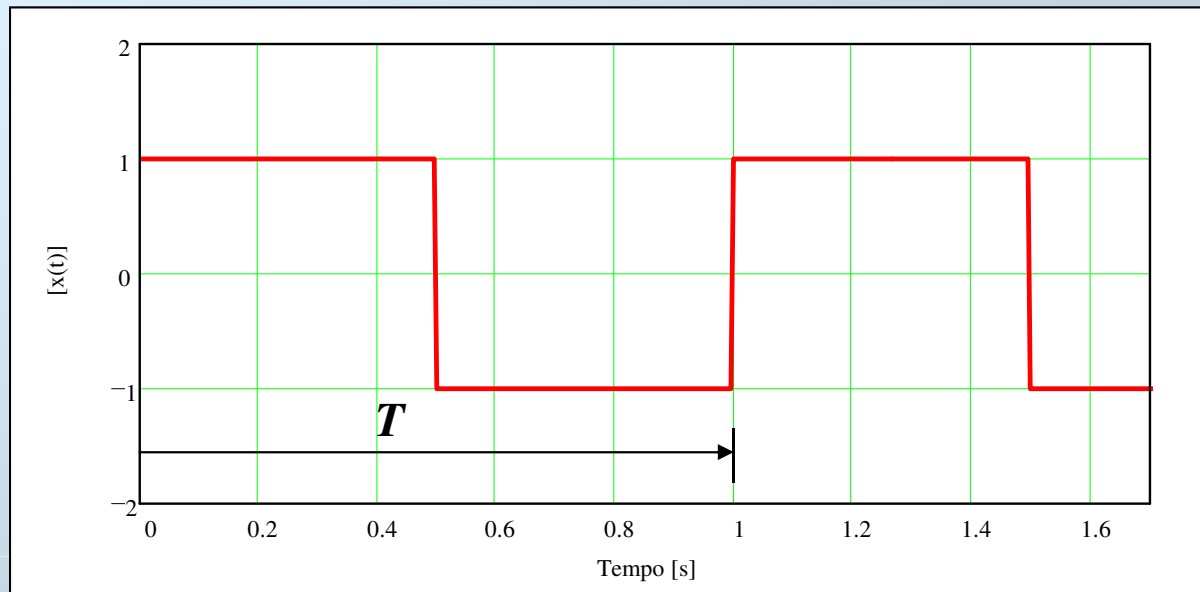
$$\int_0^{T_0} x(t) dt \cong \Delta t \left[\frac{x_0}{2} + \left(\sum_{p=1}^M x_p \right) + \frac{x_M}{2} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Utilizada quando os valores inicial e final de } x(t) \\ \text{forem diferentes} \end{array} \quad \text{Eq. 62}$$

$$\int_0^{T_0} x(t) dt \cong \Delta t \sum_{p=1}^M x_p \quad \begin{array}{l} \text{Utilizada quando os valores inicial e final de } x(t) \\ \text{forem iguais} \end{array} \quad \text{Eq. 63}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 \\ a_p \\ b_p \end{array} \right\} = \frac{2\Delta t}{T} \sum_{i=1}^N q_i \quad \Rightarrow \quad q_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} x(t_i) \\ x(t_i) \cos \omega_p (i\Delta t) \\ x(t_i) \sin \omega_p (i\Delta t) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Para o cálculo dos } a_p \text{ e } b_p \end{array} \quad \text{Eq. 64}$$



Exemplo: Realizar uma expansão por Fourier do sinal periódico abaixo



O sinal é dado por:

$$p(t) = \begin{cases} -p_0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ p_0 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Eq. 65

No nosso caso: $T = 1$ s e $p_0 = 1$



Então temos os seguintes resultados:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) dt = 0 \quad \text{Eq. 66}$$

$$a_p = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) \cos(p\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{Eq. 67}$$

$$b_p = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) \sin(p\omega_0 t) dt = -\frac{2p_0}{p\pi} (\cos(p\pi) - 1) \quad \text{Eq. 68}$$

A Eq. 68 pode ainda ser escrita como:

$$b_p = \frac{4p_0}{p\pi} \quad p = 1, 3, 5, \dots \quad \text{Eq. 69}$$



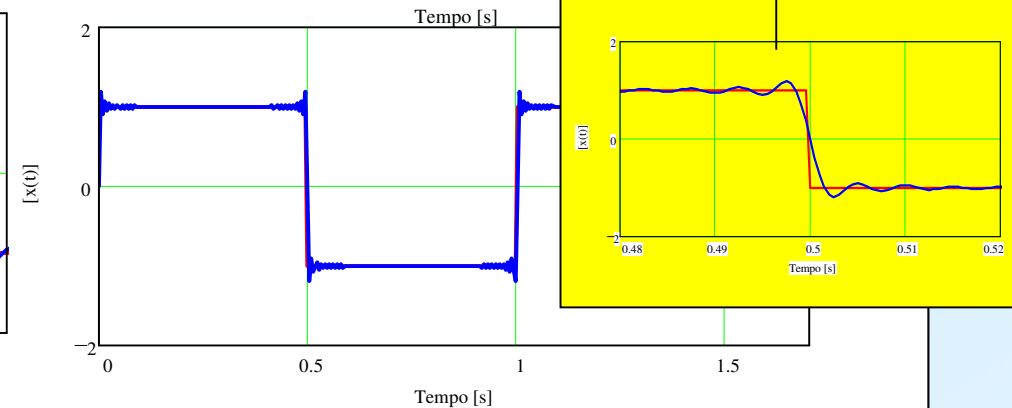
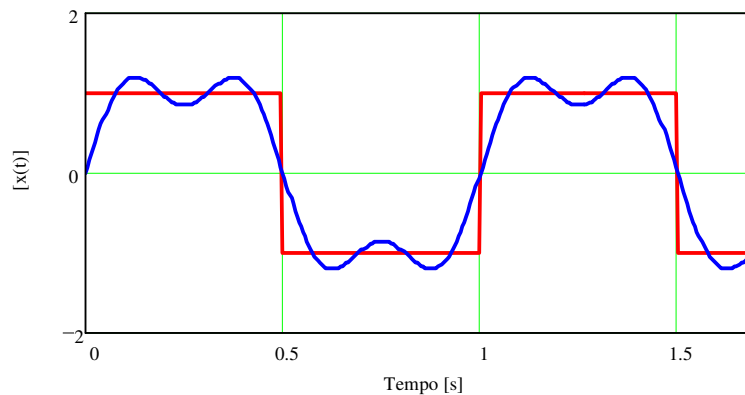
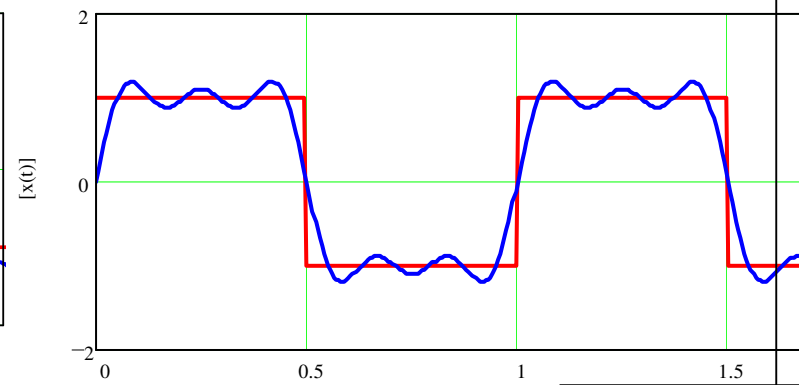
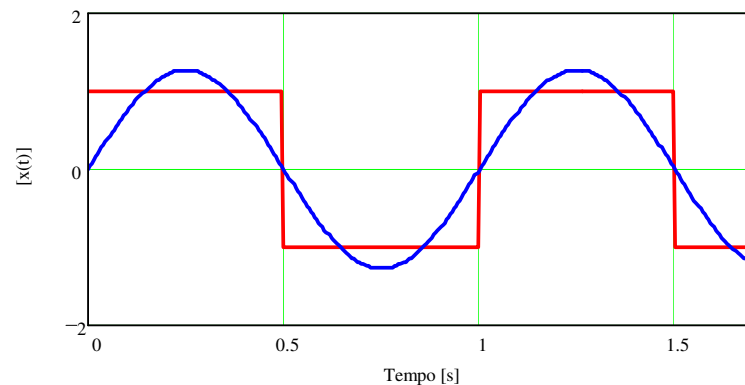
Desta forma a expansão fica

$$x(t) = \frac{4p_0}{\pi} \sum_{p=1,3,5,\dots} \left(\frac{1}{p} \right) \text{sen}(p\omega_0 t)$$

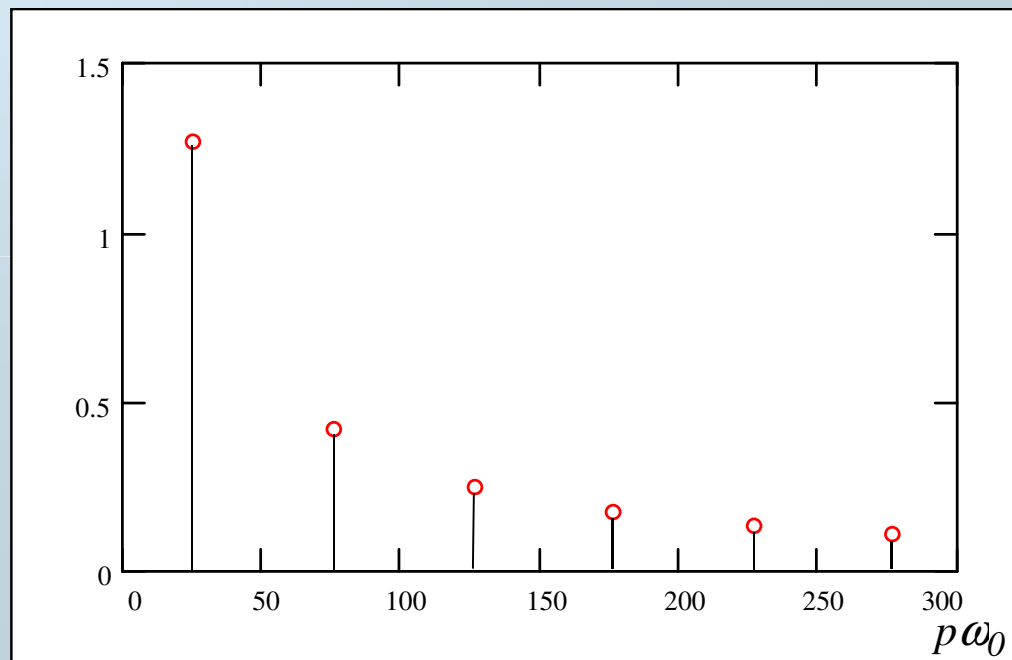
Eq. 70

Gibbs

Vamos ilustrar o resultado da Eq. 70 para diferentes valores de p



Um resultado extremamente útil das Séries de Fourier é o chamado **espectro do sinal**. O espectro é um gráfico dos termos da série em função das frequências múltiplas de ω_0 . Para o nosso exemplo o gráfico seria apenas os b_p visto que $a_p = 0$. Quando os coeficientes são todos não nulos podemos construir o espectro fazendo $(a_p^2 + b_p^2)^{1/2}$.



Notar que a medida que aumentamos o valor de p as amplitudes são cada vez menores indicando que os termos de frequência mais alta contribuem cada vez menos em termos de amplitude na reconstrução do sinal !

